



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO

DEPARTAMENTO DE FÍSICA

PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA APLICADA

**Efeitos da frequência nas propriedades de
transporte em supercondutores**

Gizele das Graças Farias de Andrade

Dissertação de Mestrado

Recife

1 de Março de 2018

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

Gizele das Graças Farias de Andrade

**Efeitos da frequência nas propriedades de transporte em
supercondutores**

Dissertação apresentada ao Programa de PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA APLICADA do DEPARTAMENTO DE FÍSICA da UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Física Aplicada.

Orientador: *Prof. Dr. Antonio Rodrigues de Castro Romaguera*

Recife

1 de Março de 2018

*Aos meus pais Givaldo Lopes e Maria Aparecida e ao meu
irmão Filipe José.*

Agradecimentos

- A Antonio Romaguera, meu orientador, pela orientação, disponibilidade e paciência.
- Ao professor Edson Sardella pela contribuição com a dissertação.
- A Jefferson Augusto e Alexandre Rodrigo por todo apoio e amizade, vocês foram imprescindíveis nesta jornada.
- A Diego Fellipp, Êylla Cristina e José Lopes pela confiança e grande incentivo.
- Aos amigos da academia e do laboratório de pesquisa, Bárbara Carvalho, Selton Lima, Luciano Miranda, José Enrique, Felipe Assis, Jaiver Chicangana e Galileu Gênese que contribuíram das mais diversas formas na minha formação.
- Aos amigos da casa, Nataly Gonçalves, José Marcione e Antonio Ariclesio pelos ótimos momentos de descontração.
- Aos meus professores da graduação e do mestrado, principalmente a Mario Monteiro, Lucas Ollyver, Valdemir Mariano, Manoel Henrique, Adauto de Souza, Anderson Barbosa, Fernando Moraes, Jonas Romero, Sara Cristina e Viviane Oliveira pelas valiosas lições.
- Aos professores Kléber Fernando e Rosário Sá Barreto (*in memoriam*) pela amizade, conselhos, confiança e incentivo.
- A todos os integrantes do Departamento de Física.

*Os ideais que iluminaram o meu caminho são a bondade, a beleza e a
verdade.*

—ALBERT EINSTEIN

Resumo

A melhoria das modernas técnicas de microfabricação tem desencadeado um grande interesse nas propriedades eletrônicas dos supercondutores mesoscópicos, que são sistemas que possuem tamanhos comparáveis à escala dos seus comprimentos característicos, o comprimento de coerência e o comprimento de penetração. Nessa escala, comportamentos incomuns aparecem quando os vórtices são submetidos a um ambiente onde os efeitos de confinamento emergem. De fato, a matéria de vórtice nestes sistemas é fortemente influenciada pela geometria e tamanho da amostra. Portanto, o estudo da matéria de vórtice é fundamental, uma vez que a compreensão e manipulação do movimento de vórtices são muito importantes para o desenvolvimento de aplicações tecnológicas.

Assim, em relação a metodologia utilizada neste trabalho, estudamos as propriedades eletrônicas de uma fita supercondutora de geometria retangular e investigamos teoricamente as propriedades dinâmicas dos pares de vórtice-antivórtice (pares V-Av), também conhecidos como vórtices cinemáticos, que surgem nesta fita. A fita está sempre na presença de uma corrente de transporte e em um regime de campo magnético e temperatura nulos. Este estudo foi realizado mediante o formalismo da teoria de Ginzburg-Landau dependente do tempo (*time-dependent Ginzburg-Landau*, TDGL), em que os cálculos envolvidos foram resolvidos numericamente através do método $\psi - U$ (método das variáveis de ligação) por meio de um algoritmo de simulação computacional. Todas as simulações foram realizadas nos computadores do laboratório de acesso remoto do Departamento de Física da UFRPE, que são computadores de alto desempenho e formam o cluster Neuman. As equações TDGL são ferramentas importantes para a compreensão da Física de supercondutores a baixas temperaturas. Dessa forma, analisamos o aparecimento e o desaparecimento dos pares V-Av na fita supercondutora e observamos uma pequena resistência na fita devido a presença de contatos metálicos normais

por onde a corrente é aplicada. Também encontramos que devido a passagem dos pares V-Av pela fita há a existência de uma tensão oscilante e conseqüentemente de uma frequência de oscilação e amplitude. Mostramos que esses pares V-Av são nucleados perpendicularmente à direção da aplicação da corrente no centro da fita (em $x = a/2$); posteriormente, começam a aniquilar-se no centro, quando a dinâmica destes pares mudam. Na ausência de campo, ambos os vórtices cinemáticos aparecem ao mesmo tempo e aniquilam-se ou cruzando as bordas ou indo em direção ao centro simultaneamente.

Abstract

The improvement of modern microfabrication techniques has triggered a great interest in the electronic properties of the mesoscopic superconductors, which are systems that have sizes comparable to the scale of its characteristic length, the length of coherence and the penetration length. On this scale, unusual behaviors appear when the vortices are subjected to an environment where the confinement effects emerge. In fact, the vortex matter in these systems is strongly influenced by the geometry and size of the sample. Thus, the study of vortex matter is fundamental, since the understanding and manipulation of vortex motion are very important for the development of technological applications.

Thus, in relation to the methodology used in this work, we study the electronic properties of a superconducting stripe of rectangular geometry and investigate the dynamic properties of the vortex-antivortical pairs (V-Av pairs), also known as kinematic vortices, that appear on this stripe. The stripe is always in the presence of a transport current and at a regime of magnetic field and temperature null. This study was carried out using the formalism of time-dependent Ginzburg-Landau (TDGL) theory, in which the calculations involved were solved numerically through the $\psi - U$ method (link variables method) by means of an algorithm of computational simulation. All the simulations were performed on the computers of the remote access laboratory of the Physics Department of UFRPE, which are high performance computers and form the Neumann cluster. TDGL equations are important tools for understanding the physics of superconductors at low temperatures. Thus, we analyzed the appearance and disappearance of the V-Av pairs in the superconducting stripe and observed a small resistance in the stripe due to the presence of normal metallic contacts through which the current is applied. We also find that due to the passage of the pairs V-Av by the stripe there is the existence of a oscillating voltage and consequently of a frequency of oscillation and amplitude. We have shown that these V-Av

pairs are nucleated perpendicular to the direction of the current application in the center of the stripe (at $x = a/2$); later, they begin to annihilate themselves in the center, when the dynamics of these pairs change. In the absence of field, both kinematic vortices appear at the same time and annihilate either crossing the edges or going toward the center simultaneously.

Sumário

1	Introdução	1
2	Conceitos teóricos da supercondutividade	5
2.1	Revisão histórica da supercondutividade	5
2.2	Termodinâmica da transição de fase	9
2.3	Teoria de London	13
2.4	Teoria de Ginzburg-Landau	17
2.4.1	Energia livre de GL do estado supercondutor	19
2.4.2	Energia livre de um supercondutor homogêneo na ausência de campo magnético	21
2.4.3	As equações de GL	22
2.4.4	Comprimentos característicos	27
2.4.4.1	Comprimento de penetração	27
2.4.4.2	Comprimento de coerência	28
2.5	Quantização do fluxo magnético	31
2.6	Classificação dos supercondutores	33
2.7	Vórtices em supercondutores	34
2.7.1	Estrutura de um vórtice	36
2.7.2	Energia de um vórtice isolado	38
2.7.3	Vórtices em filmes finos - supercondutividade mesoscópica	39
3	Solução numérica da equação TDGL	41
3.1	Equações TDGL	42

3.2	Invariância de Gauge	45
3.3	Campos auxiliares	46
3.4	Resumo	48
3.5	Discretização da equação TDGL	50
3.5.1	Malha de discretização	50
3.5.2	Definições	51
3.5.3	Aproximações para as derivadas	53
3.5.4	Discretização da primeira equação TDGL	54
3.5.5	Discretização da densidade de corrente	55
3.5.6	Condições de contorno	56
3.6	Discretização do potencial eletrostático	57
3.6.1	Solução da parte homogênea	57
3.6.2	Solução da parte não homogênea	62
3.7	Algoritmo	66
3.7.1	Detalhes da simulação	67
4	Simulação da dinâmica de pares V-Av numa fita supercondutora	71
4.1	Sistema estudado	71
4.2	Propriedades eletrônicas da fita	72
4.3	Dinâmica dos pares V-Av	78
4.4	Oscilações na tensão	80
5	Conclusões	87

Lista de Figuras

- 2.1 Diagrama esquemático dos parâmetros críticos do supercondutor. Este diagrama mostra que o estado supercondutor é destruído quando um campo magnético \mathbf{H} , uma densidade de corrente \mathbf{J} ou uma temperatura T excede seus correspondentes valores críticos. 6
- 2.2 Efeito Meissner em uma esfera supercondutora com campo magnético uniforme aplicado. Para a esfera (a) quando $T > T_c$ o material comporta-se como um condutor normal. Para a esfera (b) quando $T < T_c$ a esfera torna-se supercondutora. 7
- 2.3 A energia livre G_n de um metal normal é aproximadamente independente da intensidade do campo magnético aplicado \mathbf{H}_0 . Em uma temperatura $T < T_c$ o metal é um supercondutor em campo magnético nulo, de modo que G_{s0} é menor que G_{n0} . Um campo magnético aplicado aumenta a energia livre em $H_c^2/8\pi$. Se \mathbf{H}_0 é maior que \mathbf{H}_c a energia livre no estado normal é menor que do supercondutor, sendo agora o estado normal mais estável. 11
- 2.4 Diagrama de fase de um supercondutor. Observe que ao longo da linha vertical $dT = 0$. Na presença de campo magnético aplicado \mathbf{H}_0 a transição de fase ocorre em uma temperatura $T < T_c$. 12
- 2.5 Penetração de um campo magnético aplicado em um supercondutor semi-infinito. O comprimento de penetração λ é definido como a distância em que o campo descrece. 16

- 2.6 Diferença da energia livre GL para o (a) estado normal $\alpha > 0$, ou seja $T > T_c$, com o mínimo de energia localizado em $\psi = 0$ e (b) supercondutor $\alpha < 0$, ou seja $T < T_c$, a energia possui dois mínimos $\psi = \pm\sqrt{-\alpha/\beta}$. Os pontos vermelhos mostram a posição dos mínimos do funcional. 22
- 2.7 Amostra no estado supercondutor com buraco no interior, contornado por um caminho fechado C . O caminho fechado representado pela linha tracejada, está no interior da amostra afastado da superfície, de modo que a densidade de corrente seja nula nesta região. 31
- 2.8 (a) Diagrama de fase para supercondutores tipo I , que não apresentam o estado de vórtices. Ao atingir o valor do campo crítico, a supercondutividade é destruída. (b) Em supercondutores tipo II , \mathbf{H}_{c1} é o valor do campo onde ocorre a entrada de fluxo magnético quantizado. Com o aumento do mesmo, mais fluxo penetra no material até atingir \mathbf{H}_{c2} , onde há destruição da supercondutividade. 34
- 2.9 (a) Magnetização versus campo magnético aplicado para um supercondutor exibindo o efeito Meissner. Um supercondutor com esse comportamento é chamado de supercondutor de tipo I . Acima do campo crítico \mathbf{H}_c , a amostra é um condutor normal e a magnetização é desprezível. O valor negativo de \mathbf{M} corresponde ao diamagnetismo. (b) Curva de magnetização de um supercondutor de tipo II . O fluxo começa a penetrar a amostra em um campo \mathbf{H}_{c1} inferior ao campo crítico termodinâmico \mathbf{H}_c . A espécime está em um estado de vórtice entre \mathbf{H}_{c1} e \mathbf{H}_{c2} , e possui propriedades supercondutoras até \mathbf{H}_{c2} . Acima de \mathbf{H}_{c2} , a espécime é um condutor normal. Para um dado \mathbf{H}_c , a área sob a curva de magnetização é a mesma para um supercondutor de tipo I e tipo II . 35
- 2.10 Imagens da estrutura do vórtice obtidas pela decoração de Bitter em $T = 4.2$ K e $\mathbf{H} = 1$ Oe em (a) MgB_2 e (b) monocristais de $NbSe_2$. Diferença nas espessuras das amostras implica em número de vórtices diferentes para MgB_2 e $NbSe_2$ com o mesmo campo aplicado. Figura retirada da referência [53]. 36

- 2.11 Estrutura de um único vórtice, mostrando a distribuição radial do campo local $\mathbf{H}(\mathbf{r})$, a densidade de corrente supercondutora $\mathbf{J}_s(\mathbf{r})$ e a densidade de elétrons supercondutores $n_s(\mathbf{r})$. Figura adaptada da referência [53]. 37
- 3.1 Geometria da região supercondutora Ω_{sc} , delimitada em cinza no centro da Figura, e do meio externo Ω delimitada pelo contorno retangular azul. O domínio supercondutor Ω_{sc} é limitado pelas linhas tracejadas $\partial\Omega_{sc}$. 49
- 3.2 Malha de discretização no plano xy . A Figura ilustra o esquema do método das variáveis de ligação para uma rede de passos Δx e Δy nas direções x e y respectivamente. 51
- 3.3 Potencial homogêneo ao longo do filme supercondutor. De acordo com esta Figura, observamos que o potencial é simétrico em relação a fita. Os eixos x e y representam as dimensões da fita. 62
- 4.1 Visão esquemática da fita supercondutora com contatos metálicos (largura w) anexos nas extremidades. A corrente é aplicada através dos contatos metálicos e a tensão é medida a uma pequena distância desses contatos. 72
- 4.2 Curva característica I-V da fita supercondutora e resistência diferencial dV/dI da fita em função da corrente aplicada. 73
- 4.3 Alguns valores do parâmetro γ para as (a) primeira, (b) segunda, (c) terceira e (d) quarta correntes críticas $\mathbf{I}_{c1}, \mathbf{I}_{c2}, \mathbf{I}_{c3}, \mathbf{I}_{c4}$ respectivamente. 74
- 4.4 Curva I-V e módulo do parâmetro de ordem para $\gamma = 0$ e $\mathbf{I} = 6\mathbf{I}_0$. 75
- 4.5 Curva I-V e módulo do parâmetro de ordem para $\gamma = 45$ e $\mathbf{I} = 6\mathbf{I}_0$. 76
- 4.6 Alguns valores do parâmetro γ para as (a) primeira, (b) segunda, (c) terceira e (d) quarta amplitudes da resistência diferencial. 77
- 4.7 Módulo do parâmetro de ordem para diferentes correntes aplicadas I/I_0 , a legenda de cada Figura mostra o valor dessa corrente. 82

- 4.8 Processo de nucleação do par V-Av no centro da amostra e aniquilação nas bordas para uma corrente fixa de $\mathbf{I} = 1.74\mathbf{I}_0$. Os eixos x e y representam as dimensões da fita. 83
- 4.9 Processo de nucleação do par V-Av nas bordas da amostra e aniquilação no centro para uma corrente fixa de $\mathbf{I} = 2.38\mathbf{I}_0$. Os eixos x e y representam as dimensões da fita. 84
- 4.10 Evolução temporal da tensão para alguns valores de corrente aplicada. Os valores de \mathbf{I} estão indicados nas legendas das figuras (as que estão sem a legenda com o valor de \mathbf{I} correspondem ao zoom da respectiva imagem ao lado). 85
- 4.11 Frequência e amplitude da voltagem como função da corrente aplicada. 86

Lista de Tabelas

- 2.1 Valores do comprimento de coerência intrínseco e do comprimento de penetração para alguns metais, no zero absoluto. Tabela retirada da referência [46]. 29

Glossário

- H_{c1} Campo crítico inferior à temperatura T . Seu valor define a intensidade mínima do campo magnético necessária para permitir a nucleação de vórtices em um supercondutor tipo II .
- H_{c2} Campo crítico superior à temperatura T . Seu valor define a intensidade do campo magnético capaz de destruir a supercondutividade no interior de um supercondutor tipo II .
- H_0 Campo magnético aplicado no supercondutor.
- H_c Campo crítico termodinâmico que define a transição supercondutor/normal nos supercondutores tipo I .
- λ Parâmetro que caracteriza o material escolhido e é proporcional ao tempo de espalhamento inelástico do elétron-fônon.
- μ Parâmetro relacionado ao relaxamento do parâmetro de ordem.
- G_{nH} Energia livre de Gibbs para uma amostra no estado normal na presença de campo magnético.
- G_{n0} Energia livre de Gibbs para uma amostra no estado normal na ausência de campo magnético.
- G_{sH} Energia livre de Gibbs para uma amostra no estado supercondutor na presença de campo magnético.
- G_{s0} Energia livre de Gibbs para uma amostra no estado supercondutor na ausência de campo magnético.

CAPÍTULO 1

Introdução

No nível macroscópico, o estado de um material supercondutor pode ser descrito em termos de um parâmetro de ordem ψ e de um potencial vetor \mathbf{A} . Essas variáveis determinam as propriedades supercondutoras e eletromagnéticas de sistemas em equilíbrio. Elas são conhecidas como as soluções das equações de Ginzburg-Landau (GL). Tais soluções correspondem a pontos críticos do funcional de energia livre GL e são determinadas minimizando o funcional de energia [1, 2].

Entretanto, o mecanismo físico de resistividade em supercondutores está associado à uma variação temporal de ψ e \mathbf{A} , pois na presença de um campo elétrico o comportamento de um supercondutor é não estacionário (descrito por estados de não-equilíbrio) [3]. Este comportamento deve ser investigado pelas equações dinâmicas da supercondutividade [4, 5], que são conhecidas como as equações de Ginzburg-Landau dependentes do tempo (time-dependent Ginzburg-Landau, TDGL). Os estados resistivos em amostras supercondutoras submetidas à uma corrente de transporte já tem sido amplamente investigados [4]. Assim, para explicar o comportamento destes estados, foi introduzido o conceito de PSC (*phase-slip centers*), que são locais onde o ψ é nulo, devido à corrente aplicada ultrapassar um valor de corrente capaz de destruir os pares de Cooper [6]. Os PSC ocorrem em amostras de largura w muito menor que o comprimento de coerência ξ , ou seja, $w \ll \xi$ [5].

Posteriormente o conceito relacionado ao estado resistivo de uma amostra supercondutora foi ampliado para o caso em que a largura desta amostra é bem maior que os comprimentos característicos de um supercondutor, ou seja, $w \gg \xi, \lambda$ [7]. Dessa forma, outros conceitos de estados resistivos em amostras supercondutoras foram definidos: PSL (*phase-slip line*) convencional e os vórtices cinemáticos que também formam um tipo de PSL. A PSL convencional, que surge devido a aplicação de correntes muito elevadas em amostras supercondutoras é con-

siderada como um vórtice cinemático que possui velocidade infinita [4, 5]. Ela é formada por uma linha no centro da amostra com ψ nulo, devido ao fato da corrente aplicada ultrapassar o valor da corrente de ligação dos pares de Cooper [8]. Já os vórtices cinemáticos, surgem devido a injeção de uma corrente não uniforme através da amostra, em que o ψ é nulo em alguns pontos. A dinâmica dos vórtices cinemáticos através da PSL é satisfeita tanto para uma espécime cinemática quanto para duas, sendo o vórtice e o antivórtice cinemático (par V-Av). O movimento dos vórtices cinemáticos causam uma degradação do ψ , formando uma linha no centro da amostra (onde ocorre o movimento) com a supercondutividade reduzida [8]. Tais vórtices cinemáticos foram observados em simulações numéricas utilizando as equações TDGL em 2D [8], e evidências experimentais são reportadas nas referências [9, 10].

As equações TDGL, foram formuladas pela primeira vez por Schmid [11], posteriormente foram estendidas por Kramer e Watts-Tobin [12], para supercondutores com gap. Estas equações são generalizações não triviais das equações GL (independentes do tempo), uma vez que a taxa de variação temporal deve ser introduzida de tal modo que a invariância de gauge seja preservada em todos os momentos [13]. Estamos interessados, em particular, em soluções de vórtices cinemáticos das equações TDGL. Estas são soluções que representam oscilações do ψ , onde a sua fase muda ao longo da dinâmica dos pares V-Av. Como já mencionado anteriormente, este tipo de solução ocorre devido a assimetria das correntes de transporte aplicadas através da amostra. O movimento do vórtice leva à dissipação de energia no sistema e à existência de uma tensão e um campo elétrico finito no supercondutor. Caso a amostra também seja colocada na presença de um campo magnético perpendicular a ela e maior que o primeiro campo crítico, os vórtices de Abrikosov penetram a amostra e formam uma rede de vórtices [5].

O estudo das propriedades de transporte em filmes finos tem sido de grande interesse devido às suas aplicações. Uma importante aplicação é a detecção de “ fóton-único” [14]. Este é um dispositivo que tem seu funcionamento baseado na criação de estados resistivos através da aplicação de correntes de transporte. Quando um fóton atinge a amostra supercondutora, o local da incidência é aquecido levando o material para o estado normal, cria-se um estado

resistivo cuja resposta é um pico na tensão medida, permitindo a detecção do fóton. Uma vez que este dispositivo tem seu funcionamento baseado no aparecimento de estados resistivos, este trabalho é importante no sentido de melhor entender a origem de tais estados. Outras aplicações relevantes são a detecção de “elétron-único” [15, 16], o controle de spin por vórtices [17] e uma possível aplicação, o dispositivo para a detecção de ondas eletromagnéticas [18]. Conseqüentemente, o conhecimento da dinâmica dos vórtices nesses dispositivos é importante para melhorar estas aplicações.

Neste trabalho, investigamos os processos de não-equilíbrio e qual a relação que há entre eles e o aparecimento de tensões oscilantes em uma fita supercondutora mesoscópica de geometria retangular que possui dois contatos metálicos anexos em suas extremidades. A fita está sempre na presença de uma corrente de transporte aplicada e consideramos que o campo magnético e a temperatura são sempre nulos em nossas simulações. Para este estudo, resolvemos numericamente a primeira equação TDGL usando um algoritmo de simulação computacional. Esta equação foi resolvida através do método de diferenças finitas em que utilizamos uma malha retangular dividida em intervalos de tamanhos Δx e Δy onde $\Delta x = \Delta y$, com $N_i \times N_j$ pontos. Depois reescrevemos as equações diferenciais transformando-as em equações discretizadas onde substituímos as variáveis por seus valores nos pontos da malha, e suas derivadas por quocientes incrementais. No limite em que Δx e Δy tendem a zero, recuperam-se as equações diferenciais originais, de forma que, escolhemos uma largura da malha pequena para resolver o problema algébrico. Estas equações foram resolvidas num certo domínio espacial e temporal, partindo de condições iniciais para ψ , e de condições de contorno específicas ao problema. Com isso foi possível analisar as propriedades eletrônicas da fita, assim como o aparecimento dos estados resistivos.

As equações TDGL apresentam invariância sob transformações de gauge. Porém, neste tipo de equações, ao aplicarmos o método de diferenças finitas os sistemas discretos que aproximam as equações diferenciais podem não permanecer invariantes sob transformações de gauge. Para evitar que isto aconteça é usado um sistema discreto que apresente invariância de gauge. Isto foi usado inicialmente em teorias de gauge na rede (*lattice gauge theories*) [19] mostrando uma

forma de manter tal invariância. Assim, foram definidas variáveis de ligação as quais permitem que a invariância de gauge seja preservada quando as equações são escritas na sua forma discreta. As simulações computacionais realizadas atuaram basicamente no sentido de se aplicar passos de correntes até que o sistema encontrasse um estado estacionário. Este estado é definido por dois critérios de paradas: um estático e um dinâmico que correspondem ao caso em que na amostra ainda não há a presença dos estados resistivos e depois quando estes estados surgem na amostra, respectivamente. Já se sabe que os efeitos de confinamento quântico em supercondutores tornam-se importantes quando o tamanho da amostra é comparável ao comprimento de coerência ξ ou ao comprimento de penetração de London λ , amostras mesoscópicas [20]. O efeito do tamanho finito da amostra, bem como o efeito dos contatos metálicos normais são considerados.

Nos próximos capítulos, fazemos uma revisão das teorias fenomenológicas e apresentamos o algoritmo desenvolvido para encontrar a solução da equação TDGL, que não possui uma solução exata. Por fim, apresentamos os resultados obtidos através dos gráficos construídos utilizando os dados de saída gerados com a execução do código. De forma que a dissertação está organizada da seguinte maneira. No **Capítulo 2** é feita uma revisão da história da supercondutividade, um estudo das propriedades termodinâmicas de supercondutores e um estudo das teorias fundamentais da supercondutividade, a teoria de London e de Ginzburg-Landau e a física de vórtices. No **Capítulo 3** introduzimos a primeira equação de Ginzburg-Landau dependente do tempo, assim como o método numérico utilizado para solucioná-la. Também discutimos as condições de contorno necessárias para este sistema. Como a espessura d da amostra supercondutora é muito menor que ξ o que permite considerar a aproximação que, em princípio, o filme supercondutor não afeta o campo magnético. Dessa forma, o potencial vetor no supercondutor é o mesmo do campo externo homogêneo o que permite ignorar a segunda equação TDGL, ou seja, desprezar a variação temporal de \mathbf{A} . No **Capítulo 4** discutimos os resultados apresentados. No **Capítulo 5** finalizamos a dissertação com as conclusões do trabalho.

Conceitos teóricos da supercondutividade

2.1 Revisão histórica da supercondutividade

A supercondutividade é um fenômeno quântico em escala macroscópica [21] que resulta da existência de uma função de onda, também conhecida como parâmetro de ordem supercondutor [2]. A função de onda do estado supercondutor descreve o condensado de muitas partículas e mantém coerência de fase em grandes distâncias [2]. Como a fase é comum a todas as partículas, os efeitos a ela associados não são trivialmente anulados, de forma que estas partículas não são espalhadas por impurezas nem por vibrações da rede, como ocorre em sistemas de elétrons independentes [2, 22]. A coerência de fase de longo alcance dá origem a consequências interessantes como a quantização do fluxo magnético através de um anel supercondutor e a formação de vórtices no estado misto de um supercondutor [1, 2].

O fenômeno da supercondutividade foi descoberto em 1911 por Heike Kamerlingh Onnes [23] quando estudava as propriedades de transporte do Hg (Mercúrio) à baixas temperaturas. Ele encontrou que abaixo da temperatura de liquefação do gás hélio, em torno de 4.2 K, a resistividade do mercúrio caía abruptamente à zero. Este resultado foi bastante surpreendente, pois as expectativas eram de que a resistividade seria nula [24, 25] ou divergisse em $T = 0$ K [26], mas não que desapareceria a uma temperatura finita. Em um metal, a resistividade à baixas temperaturas tem uma contribuição proporcional a T^2 devido ao espalhamento elétron-elétron [27] e uma contribuição proporcional a T^5 da dispersão de fônons [28, 29]. Assim, o desaparecimento da resistividade a baixas temperaturas é uma clara indicação de um novo estado fundamental.

Em 1913 ¹, Onnes conduziu experiências que provaram a supercondutividade do Mercúrio e revelaram que o estado supercondutor não está apenas limitado por T_c , mas também por um dado valor limite da densidade de corrente elétrica [24]. Já em 1914, foi observado por Onnes que depois de um valor limite, o campo magnético externo também leva o material de volta ao estado normal, definindo assim o campo crítico H_c [24].

Desta forma, a supercondutividade está limitada por três parâmetros críticos: a temperatura crítica, a densidade de corrente crítica e o campo magnético crítico, como pode ser visto na Figura 2.1. Estes irão determinar a permanência do estado supercondutor.

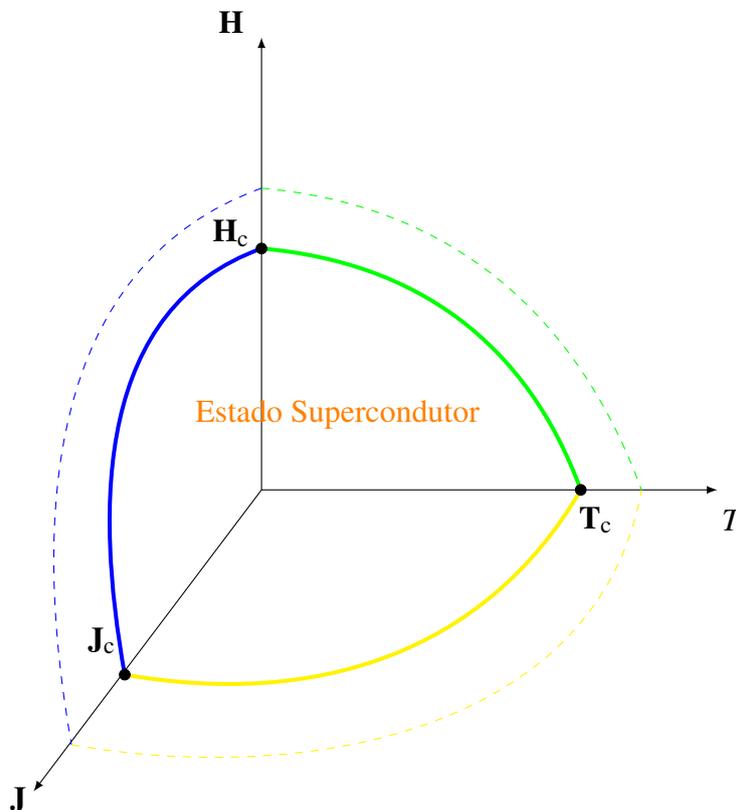


Figura 2.1 Diagrama esquemático dos parâmetros críticos do supercondutor. Este diagrama mostra que o estado supercondutor é destruído quando um campo magnético H , uma densidade de corrente J ou uma temperatura T excede seus correspondentes valores críticos.

Outra propriedade do estado supercondutor foi descoberta em 1933 por Walther Meissner e Robert Ochsenfeld [30]. Eles descobriram que a densidade de fluxo magnético B é expelida

¹Ano no qual Onnes ganhou o prêmio Nobel em Física, pelas suas pesquisas nas propriedades da matéria.

abaixo da temperatura de transição supercondutora T_c , isto é, $\mathbf{B} = 0$ dentro de um material supercondutor, o chamado efeito Meissner, Figura 2.2. Isso significa que o supercondutor é um diamagnético perfeito.

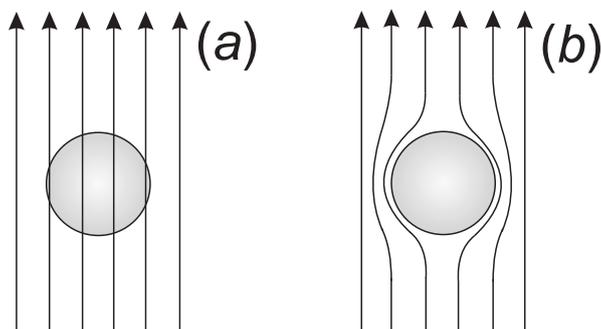


Figura 2.2 Efeito Meissner em uma esfera supercondutora com campo magnético uniforme aplicado. Para a esfera (a) quando $T > T_c$ o material comporta-se como um condutor normal. Para a esfera (b) quando $T < T_c$ a esfera torna-se supercondutora.

Portanto, a supercondutividade possui duas características fundamentais: o desaparecimento da resistividade elétrica abaixo de T_c e a expulsão do campo magnético aplicado (efeito Meissner), também abaixo de T_c e abaixo de \mathbf{H}_c .

O campo magnético dentro de um condutor perfeito é constante ao longo do tempo, pois os condutores perfeitos blindam seu interior de campos externos, mas, uma vez estabelecido um fluxo magnético em seu interior, este não seria expelido à uma temperatura inferior a T_c . Diferentemente para um supercondutor onde o campo magnético é nulo, não constante, em seu interior, ou seja, a indução magnética no interior de um supercondutor é nula para qualquer campo externo aplicado abaixo de \mathbf{H}_c , não importando a história magnética do material antes da transição. Por exemplo, considere que um campo magnético é aplicado ao material acima de T_c , quando ainda não é um supercondutor. Se resfriarmos o sistema abaixo de T_c , o efeito Meissner diz que o campo aplicado deve ser expulso do material, já que $\mathbf{B} = 0$ dentro dele. No entanto, para um condutor perfeito, o campo permaneceria dentro do material. Isso significa que um supercondutor não é apenas um condutor perfeito. Se o campo magnético aplicado a um supercondutor é aumentado, eventualmente o estado supercondutor é destruído, fazendo com que o sistema volte ao estado normal. Com base nesse fato, os irmãos Fritz e Heinz Lon-

don em 1935 [31] propuseram um modelo fenomenológico que descreve o comportamento da indução magnética e das correntes dentro de um material supercondutor utilizando as equações de Maxwell. A teoria era capaz de explicar como a corrente e o campo magnético atuam no interior de um supercondutor, fazendo relação com os fenômenos observados por Onnes e Meissner.

Em 1950, Ginzburg e Landau [32] formularam uma teoria fenomenológica mais abrangente que explicava a maioria das propriedades macroscópicas dos supercondutores. A quantidade principal no modelo de Ginzburg-Landau é o parâmetro de ordem complexo $\psi(\mathbf{r})$, que pode ser interpretado como a função de onda dos elétrons supercondutores. A teoria consegue prever, através do parâmetro de ordem $\psi(\mathbf{r})$ e do potencial vetor \mathbf{A} , a existência do comprimento de penetração λ e do comprimento de coerência ξ . Tal teoria possibilita por meio do parâmetro de Ginzburg-Landau, $\kappa = \lambda/\xi$, a descrição de dois tipos de supercondutores: tipo *I* ($\kappa < 1/\sqrt{2}$) e tipo *II* ($\kappa > 1/\sqrt{2}$). Em supercondutores tipo *I*, não há um estado intermediário que separe a transição do supercondutor para o estado normal ao aumentar o campo. Nos supercondutores tipo *II*, por outro lado, existe um estado intermediário, denominado estado misto, que aparece antes da transição para o estado normal. No estado misto, o campo magnético penetra parcialmente no material através da formação de vórtices, quase-partículas que carregam um quantum de fluxo magnético [1, 2].

Em 1957, Alexei Abrikosov [33] previu a existência de uma estrutura de rede periódica de fluxo magnético, a rede de vórtices, para o supercondutor tipo *II* usando a teoria GL. Essas estruturas foram observadas em laboratório em 1967 [34].

A abordagem microscópica para a supercondutividade só ocorreu em 1957 com a famosa teoria de Bardeen, Cooper e Schrieffer (teoria BCS) [35], quase 50 anos após a descoberta experimental de Kamerlingh Onnes. O ponto principal da teoria BCS é a interação elétron-elétron mediada pelos fônons que dá origem a pares de Cooper, ou seja, estados vinculados formados por dois elétrons de spins e momentos opostos [36]. Esses pares de Cooper formam um estado fundamental macroscópico coerente, que exhibe um gap de energia entre o estado fundamental e os estados excitados.

No entanto, a teoria BCS, não explica satisfatoriamente o fenômeno nos supercondutores de alta temperatura crítica (*high- T_c*) que foram descobertos por G. Bednorz e A. Müller, em 1986. Neste ano eles anunciaram a supercondutividade em amostras cerâmicas (compostos do sistema Ba-La-Cu-O) com $T_c = 30$ K [37]. Posteriormente, em 1987, foi descoberta a supercondutividade em compostos do sistema Y-Ba-Cu-O com temperatura crítica por volta de 90 K, sendo possível utilizar o nitrogênio líquido como material criogênico para resfriar as amostras.

2.2 Termodinâmica da transição de fase

A fim de compreendermos a natureza da transição de fase normal-supercondutor, iremos estudar nesta seção o comportamento e as propriedades termodinâmicas de um material que ocorrem nesta transição. Uma transição de fase manifesta-se através de uma singularidade na energia livre e é caracterizada por uma mudança nas propriedades do material, que ocorre devido a variação de parâmetros externos como temperatura e campo magnético. No caso da transição normal-supercondutor essa mudança ocorre no comportamento dos elétrons quando a temperatura do sistema é conduzida a uma temperatura menor que a de transição, a temperatura crítica T_c [22].

Podemos associar tal mudança de comportamento a uma variável, o parâmetro de ordem, que não existia antes na fase normal ou desordenada. O parâmetro de ordem caracteriza o estado do sistema, sendo que o estado supercondutor se manifesta como um estado eletrônico mais ordenado. A medida que o estado supercondutor é mais ordenado que o estado normal, significa que a entropia no estado supercondutor é menor, e a variável termodinâmica associada a essa diminuição da entropia é a temperatura [38].

As propriedades termodinâmicas são determinadas a partir da energia livre do sistema, onde um sistema em equilíbrio ou estável é aquele que apresenta a menor energia livre possível. Consideremos então, a energia livre de Gibbs [39]

$$G = E - TS - \mathbf{H} \cdot \mathbf{M}, \quad (2.1)$$

onde E é a energia interna, S a entropia e \mathbf{M} a magnetização.

Seu diferencial no estado de equilíbrio

$$dG = -SdT - \mathbf{M} \cdot d\mathbf{H}. \quad (2.2)$$

A entropia do sistema pode ser calculada por

$$S = - \left(\frac{\partial G}{\partial T} \right)_{\mathbf{H}} \quad (2.3)$$

e a magnetização,

$$\mathbf{M} = - \left(\frac{\partial G}{\partial \mathbf{H}} \right)_{\mathbf{T}}. \quad (2.4)$$

Vamos empregar isso a uma amostra supercondutora que está inicialmente em campo nulo, posteriormente é aplicado um campo magnético de intensidade \mathbf{H}_0 paralelo ao seu eixo principal.

$$\begin{aligned} G_{s\mathbf{H}} - G_{s0} &= \int_0^{\mathbf{H}_0} dG \\ &= \frac{1}{8\pi} H_0^2 \end{aligned} \quad (2.5)$$

onde foi feita a seguinte substituição, $\mathbf{M} = -\mathbf{H}/4\pi$, que advém do efeito Meissner [40], pois $\mathbf{B} = 0$ e a relação entre \mathbf{B} e \mathbf{H} é dada por, $\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M}$. Dessa forma, quando aplicamos um campo de intensidade \mathbf{H}_0 na amostra, sua energia livre de Gibbs foi aumentada, pois internamente surgiram correntes de blindagem que criaram um campo magnético no sentido contrário de forma a anular o campo \mathbf{H}_0 . A Figura 2.3 mostra o efeito de um campo magnético sobre a energia livre de Gibbs.

No estado normal, a magnetização é desprezível, $\mathbf{M} \approx 0$. Logo, a aplicação de um campo

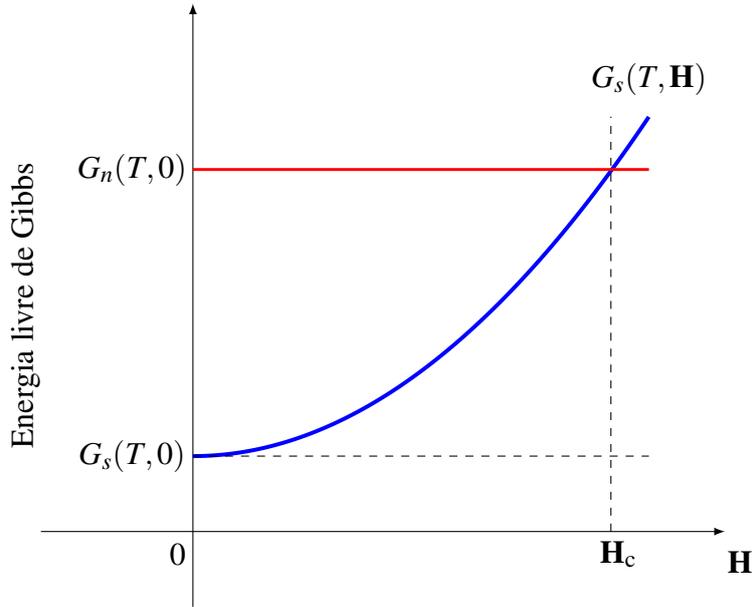


Figura 2.3 A energia livre G_n de um metal normal é aproximadamente independente da intensidade do campo magnético aplicado \mathbf{H}_0 . Em uma temperatura $T < T_c$ o metal é um supercondutor em campo magnético nulo, de modo que G_{s0} é menor que G_{n0} . Um campo magnético aplicado aumenta a energia livre em $H_c^2/8\pi$. Se \mathbf{H}_0 é maior que \mathbf{H}_c a energia livre no estado normal é menor que do supercondutor, sendo agora o estado normal mais estável.

magnético não irá variar a energia livre do estado normal, dessa forma,

$$G_{n\mathbf{H}} - G_{n0} \approx 0. \quad (2.6)$$

Da teoria termodinâmica, sabemos que, para que as duas fases estejam em equilíbrio, é necessário que as energias livres de Gibbs sejam iguais [1],

$$G_{s\mathbf{H}_c} = G_{n\mathbf{H}_c}. \quad (2.7)$$

Assim, ao longo da curva do campo crítico, \mathbf{H}_c , onde os estados supercondutor e normal estão em equilíbrio, das equações (2.5) e (2.7), temos que,

$$G_{s0} - G_{n0} = -\frac{1}{8\pi}H_c^2. \quad (2.8)$$

Esta equação representa o valor máximo de campo magnético que pode se aplicar na amos-

tra para que ainda haja estado supercondutor, ou seja, quando $\mathbf{H}_0 > \mathbf{H}_c$ é energeticamente mais favorável para a amostra ir ao estado normal do que criar correntes de blindagem e pares de Cooper para manter a supercondutividade [41]. Isto prova que o estado supercondutor é mais estável, já que a energia do estado supercondutor é menor que a do estado normal.

A expressão para o campo crítico \mathbf{H}_c em relação a temperatura, proposta empiricamente por Onnes, é dada por uma lei parabólica [1, 2],

$$\mathbf{H}_c = \mathbf{H}_{c0} \left[1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^2 \right]. \quad (2.9)$$

Das equações (2.3) e (2.8), obtemos a diferença das entropias, que revela a natureza da transição de fase entre os estados normal e supercondutor,

$$S_n - S_s = -\frac{\mathbf{H}_c}{4\pi} \frac{d\mathbf{H}_c}{dT}. \quad (2.10)$$

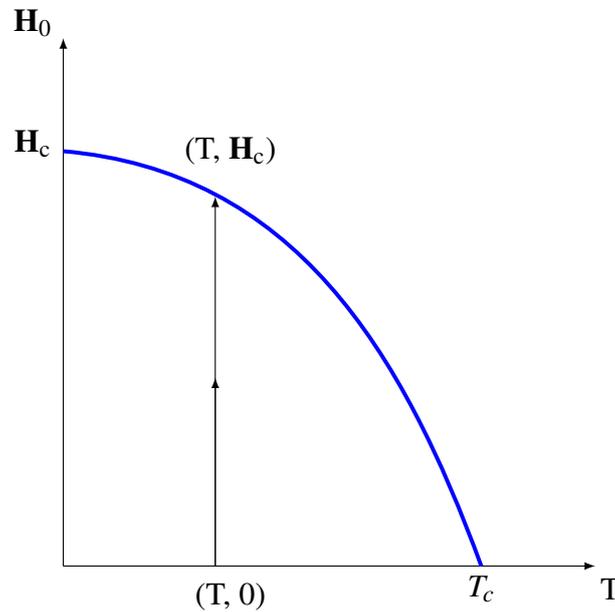


Figura 2.4 Diagrama de fase de um supercondutor. Observe que ao longo da linha vertical $dT = 0$. Na presença de campo magnético aplicado \mathbf{H}_0 a transição de fase ocorre em uma temperatura $T < T_c$.

Das equações (2.9) e (2.10) importantes resultados físicos são derivados. Experimentalmente sabe-se que à medida que a temperatura aumenta, \mathbf{H}_c tem a forma de uma curva mo-

notonicamente decrescente, isto é, para todo o intervalo de temperatura de 0 a T_c , temos $\partial \mathbf{H}_c / \partial T < 0$, logo, $S_s < S_n$. A partir destas equações também podemos deduzir que o calor latente na transição entre os estados normal e supercondutor desaparece em $T = 0$ e em $T = T_c$. Em $T = T_c$, a entropia na transição é contínua, diferentemente do calor específico ($c = T \partial S / \partial T$) que está relacionado a segunda derivada da energia livre de Gibbs, logo a transição será de segunda ordem na temperatura crítica [40]. Porém na presença de campo, a transição ocorre a uma temperatura menor que a crítica, como ilustrado na Figura 2.4. Nesse caso, a transição é de primeira ordem já que a descontinuidade acontece na entropia.

2.3 Teoria de London

A primeira teoria fenomenológica para a supercondutividade foi desenvolvida pelos irmãos Fritz e Heinz London em 1935 [31]. Esta teoria fornece uma descrição das propriedades eletrodinâmicas observadas em materiais supercondutores, e complementa as equações de Maxwell com duas equações adicionais, que refletem as duas propriedades características do estado supercondutor: a condutividade perfeita e o efeito Meissner.

Para descrever a eletrodinâmica em uma temperatura finita, $T < T_c$, eles se fundamentaram no modelo de dois fluidos. De acordo com esse modelo, a densidade total de portadores de carga (elétrons livres) é considerada como a superposição da contribuição dos elétrons supercondutores, n_s , e dos elétrons normais, n_n , ou seja, $n = n_s + n_n$. A densidade de elétrons supercondutores, n_s , decresce com o aumento da temperatura e torna-se nula na temperatura crítica $n_s(T_c) = 0$, mas quando a temperatura decresce esse número aumenta, tornando-se máximo no zero absoluto, onde, $n_s(0) = n$.

Um elétron é acelerado quando um campo elétrico \mathbf{E} é aplicado, então a segunda lei de Newton pode ser escrita como,

$$m^* \frac{d\mathbf{v}_s}{dt} = e^* \mathbf{E}, \quad (2.11)$$

onde m^* , \mathbf{v}_s , e^* são a massa, a velocidade e a carga dos elétrons supercondutores, respectivamente. Sabemos da teoria BCS que m^* e e^* são respectivamente a massa e a carga do par de Cooper, de forma que, $m^* = 2m$ e $e^* = 2e$ onde m e e são a massa e a carga do elétron.

A densidade de corrente supercondutora é dada por

$$\mathbf{J}_s = n_s e^* \mathbf{v}_s. \quad (2.12)$$

Combinando as equações (2.11) e (2.12), conduz a

$$\frac{d}{dt} \mathbf{J}_s = \frac{n_s (e^*)^2}{m^*} \mathbf{E}, \quad (2.13)$$

primeira Equação de London que descreve a condutividade perfeita. De acordo com (2.13) qualquer campo elétrico é capaz de acelerar os elétrons supercondutores.

Aplicando o rotacional em ambos os lados da equação (2.13),

$$\frac{d}{dt} (\nabla \times \mathbf{J}_s) = \frac{n_s (e^*)^2}{m^*} (\nabla \times \mathbf{E}), \quad (2.14)$$

e usando a lei de Faraday,

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad (2.15)$$

obtemos

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\nabla \times \mathbf{J}_s + \frac{n_s (e^*)^2}{m^* c} \mathbf{H} \right] = 0. \quad (2.16)$$

Esta equação pode ser satisfeita para qualquer valor de \mathbf{J}_s e \mathbf{H} constantes no tempo. Mas, para garantir a expulsão do campo magnético é necessário que

$$\nabla \times \mathbf{J}_s = -\frac{n_s (e^*)^2}{m^* c} \mathbf{H}. \quad (2.17)$$

Esta é a segunda equação de London que descreve a propriedade de um supercondutor

expulsar o campo magnético de seu interior.

Podemos usar a lei de Ampère,

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_s, \quad (2.18)$$

para escrever a equação (2.17) da seguinte forma:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} + \frac{4\pi n_s (e^*)^2}{m^* c^2} \mathbf{H} = 0. \quad (2.19)$$

Usando a seguinte identidade vetorial $\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} = -\nabla^2 \mathbf{H} + \nabla \cdot (\nabla \cdot \mathbf{H})$ na equação (2.19),

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \nabla \cdot (\nabla \cdot \mathbf{H}) - \frac{4\pi n_s (e^*)^2}{m^* c^2} \mathbf{H} = 0, \quad (2.20)$$

pela lei de Gaus, $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$, ficamos com

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \frac{1}{\lambda^2} \mathbf{H}, \quad (2.21)$$

onde

$$\lambda^2 = \frac{m^* c^2}{4\pi n_s (e^*)^2}. \quad (2.22)$$

Este é o comprimento de penetração de London, um importante parâmetro característico da teoria supercondutora, que mede o quanto o campo penetrou na amostra.

O comprimento de penetração de London pode ser escrito sem fazer referência aos pares de Cooper,

$$\lambda^2 = \frac{m^* c^2}{4\pi n_s (e^*)^2} = \frac{m c^2}{4\pi n_s e^2}. \quad (2.23)$$

A solução da equação (2.21) depende da geometria do material investigado. Supondo, por exemplo, uma amostra supercondutora semi-infinita, que se estende de $x = 0$ até o infinito, onde a região $x < 0$ é preenchida pelo vácuo e a região $x > 0$ é preenchida por material supercondutor.

Aplicamos um campo magnético nesta amostra, paralelo à sua superfície (direção z), em que a penetração deste campo ocorre na direção do eixo x , assim o problema é simplificado para a forma unidimensional,

$$\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial x^2} = \frac{1}{\lambda^2} \mathbf{H}. \quad (2.24)$$

Empregando as condições de contornos adequadas, as soluções fisicamente aceitáveis são dadas por:

$$\mathbf{H}(x) = \begin{cases} \mathbf{H}_0 & \text{se } x < 0 \\ \mathbf{H}_0 e^{-x/\lambda} & \text{se } x > 0. \end{cases} \quad (2.25)$$

O campo magnético no supercondutor, embora nulo no seu interior, existe numa fina película de espessura λ junto a superfície, Figura 2.5. De acordo com esta solução, verificamos que o campo decai exponencialmente a medida que penetra no interior do material, isto é uma decorrência direta do efeito Meissner.

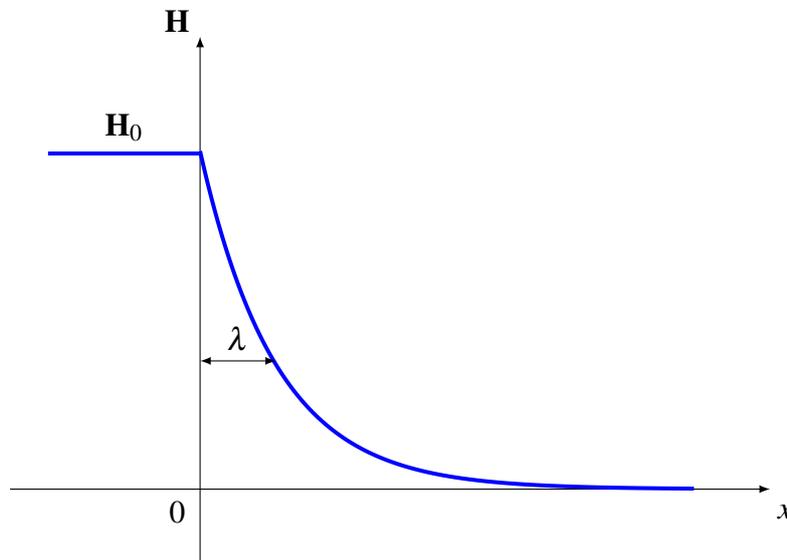


Figura 2.5 Penetração de um campo magnético aplicado em um supercondutor semi-infinito. O comprimento de penetração λ é definido como a distância em que o campo descece.

Uma equação idêntica a (2.24) pode ser obtida para a densidade de corrente. Para isso,

tomaremos o rotacional da equação (2.17) e utilizando a lei de Ampère (2.18)

$$\nabla^2 \mathbf{J}_s = \frac{1}{\lambda^2} \mathbf{J}_s. \quad (2.26)$$

Da equação (2.26) concluímos que a densidade de corrente supercondutora também está restrita a uma fina camada do supercondutor. Estas correntes são responsáveis por impedir a penetração de campos magnéticos dentro do material supercondutor.

A teoria fenomenológica de London apresenta algumas limitações, pois trata a densidade de elétrons supercondutores como uniforme no supercondutor, não prevê o desaparecimento da supercondutividade por um campo e densidade de corrente supercondutora críticos. Assim como também não explica porque a supercondutividade existe, mas sim como funciona (condutividade perfeita, correntes persistentes e o efeito Meissner). Ainda assim, esta teoria se mostra bem sucedida na descrição do comportamento de supercondutores fortemente tipo *II*, onde os vórtices podem ser considerados partículas pontuais, pois, não se leva em conta o tamanho físico do núcleo do vórtice e nem a sua estrutura. Tal descrição é feita introduzindo um termo não homogêneo que representa a carga topológica do vórtice na equação (2.21).

2.4 Teoria de Ginzburg-Landau

Muito antes do desenvolvimento da teoria microscópica, também conhecida como teoria Bardeen-Cooper-Schrieffer (teoria BCS), em 1950 Vitaly L. Ginzburg e Lev Landau propuseram uma abordagem fenomenológica da supercondutividade, denominada teoria de Ginzburg-Landau (teoria GL) [32]. A teoria GL é uma das ferramentas teóricas mais elegantes e que é amplamente utilizada na Física atual. Constituinto uma base sólida para o estudo em campos que vão desde a matéria condensada, como supercondutividade e superfluidez, à Física de partículas e cosmologia [42].

Esta teoria é uma adaptação da teoria geral de transições de fase de segunda ordem desenvolvida por Landau, que descreve corretamente a transição de fase supercondutora do ponto

de vista da termodinâmica. Landau, em 1937, percebeu que todas as transições de fase de segunda ordem quebram a simetria do sistema espontaneamente, onde a simetria do estado ordenado, abaixo do ponto crítico, é menor que a do estado desordenado. Para descrever este fenômeno, Landau introduziu o conceito de parâmetro de ordem o qual corresponde a variável termodinâmica que caracteriza o estado ordenado a baixas temperaturas [43].

Seguindo este caminho, Ginzburg e Landau propuseram um parâmetro de ordem complexo para o estado supercondutor. Eles assumiram que a função de onda dos elétrons supercondutores tem a seguinte forma:

$$\psi(\mathbf{r}) = |\psi(\mathbf{r})| e^{i\theta(\mathbf{r})}. \quad (2.27)$$

Em que, a amplitude $|\psi(\mathbf{r})|$ é nula no estado normal (fase desordenada), acima da temperatura crítica, T_c , e tem um valor finito na fase supercondutora (fase ordenada), abaixo desta temperatura, ou seja:

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{r}) &= 0 \text{ se } T > T_c \\ \psi(\mathbf{r}) &\neq 0 \text{ se } T < T_c. \end{aligned} \quad (2.28)$$

A escolha da normalização desta função de onda é feita de modo que

$$|\psi(\mathbf{r})|^2 = n_s, \quad (2.29)$$

onde n_s é a densidade local de elétrons supercondutores. Na teoria GL, diferentemente da teoria de London, n_s não é necessariamente homogêneo no espaço. O parâmetro de ordem tem dependência com a posição e temperatura e também sofre variações com campo magnético e corrente aplicados.

A abordagem matemática da teoria de Ginzburg-Landau é relativamente simples, tem-se uma equação diferencial de segunda ordem com condição de contorno. Em princípio, as equações de GL permitem o cálculo do parâmetro de ordem complexo, e da densidade de corrente

supercondutora \mathbf{J}_s . O fato de atribuir o caráter de função de onda ao parâmetro de ordem possibilitou modelar a energia livre de um supercondutor de forma correta. Quando a variação espacial de $\psi(\mathbf{r})$ é levada em consideração, a energia livre do sistema pode ser expressa em termos do parâmetro de ordem e de sua derivada espacial. Em geral isso é válido nas vizinhanças do ponto crítico T_c , onde a amplitude é pequena e $\psi(\mathbf{r})$ tem variações suaves no espaço.

A teoria GL adquiriu um novo status em 1959, quando Gor'kov através de seus trabalhos conseguiu estabelecer uma conexão entre as teorias GL e BCS. Ele mostrou que, em alguns casos limites da teoria BCS é possível se obter a teoria GL [44]. Com a teoria GL, o comportamento macroscópico da supercondutividade pode ser bem explicado, assim como o comportamento da densidade de corrente supercondutora como consequência de propriedades quânticas em escala macroscópica.

Em 1966, Schmid [11] propôs uma abordagem dependente do tempo para as equações GL. Esta formulação fornece uma evolução temporal para o parâmetro de ordem ψ e o potencial vetor \mathbf{A} . Desta forma, é possível estudar a dinâmica de sistemas supercondutores no estado de não equilíbrio.

2.4.1 Energia livre de GL do estado supercondutor

De acordo com a teoria GL, a energia livre do sistema é expandida em potências pares de $\psi(\mathbf{r})$ e de $\nabla\psi$ para garantir simetria nas proximidades do ponto crítico, onde o parâmetro de ordem é pequeno. Desta forma, a teoria GL é, em princípio, válida, apenas perto de T_c . Assim, podemos expressar a energia livre de Gibbs de um supercondutor não homogêneo e na presença de campo magnético [45]:

$$G_{s\mathbf{H}_0} = G_n + \alpha |\psi|^2 + \frac{\beta}{2} |\psi|^4 + \frac{1}{2m^*} \left| \left(-i\hbar\nabla - \frac{2e}{c}\mathbf{A} \right) \psi \right|^2 + \frac{(\mathbf{H} - \mathbf{H}_0)^2}{8\pi}, \quad (2.30)$$

onde \mathbf{H} denota o valor do campo magnético local, relacionado ao potencial vetor por $\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}$, \mathbf{H}_0 é o campo externo aplicado e G_n é o termo correspondente a energia livre de um supercondutor no estado normal [45].

A primeira parte da equação (2.30) é a expansão da energia livre para um supercondutor homogêneo na ausência de um campo magnético externo:

$$G_n + \alpha |\psi|^2 + \frac{\beta}{2} |\psi|^4, \quad (2.31)$$

em que α e β são parâmetros fenomenológicos específicos do material. Os parâmetros fenomenológicos α e β podem ser reescritos de forma que suas dependências explícitas com a temperatura são, $\alpha(T) = \alpha_0(T - T_c)$ e $\beta(T) = \beta$ [45].

O próximo termo da equação (2.30) representa a energia cinética dos pares de Cooper, devido ao fato do parâmetro de ordem ter dependência espacial:

$$\frac{1}{2m^*} \left| \left(-i\hbar\nabla - \frac{2e}{c}\mathbf{A} \right) \psi \right|^2, \quad (2.32)$$

onde m^* é a massa do par de Cooper que é duas vezes a massa de um elétron m , e a carga do par de Cooper é duas vezes a carga do elétron e . Na mecânica quântica, a densidade de energia cinética de uma partícula de massa m^* é

$$\frac{1}{2m^*} |-i\hbar\nabla\psi|^2. \quad (2.33)$$

Considerando o caso de uma partícula de carga $2e$, na presença de um campo com potencial vetor \mathbf{A} , o operado na expressão acima deve ser

$$-i\hbar\nabla - \frac{2e}{c}\mathbf{A}. \quad (2.34)$$

Isto garante a invariância de gauge na expansão.

Finalmente, o último termo da equação (2.30) descreve a diferença entre o campo magnético local e o aplicado, ou seja, mede a resposta de um supercondutor a um campo externo:

$$\frac{(\mathbf{H} - \mathbf{H}_0)^2}{8\pi}. \quad (2.35)$$

2.4.2 Energia livre de um supercondutor homogêneo na ausência de campo magnético

Para simplificar, consideraremos apenas o caso na ausência de campos e de variações espaciais de ψ , como em (2.31). Usaremos a teoria GL para discutir o significado físico dos parâmetros α e β , ou seja, prever como a densidade de elétrons do estado supercondutor, n_s , se relaciona com os parâmetros α e β .

A determinação do parâmetro de ordem deve ser feita de forma que a energia livre da equação (2.31) seja minimizada ²,

$$\frac{\partial G_{s\mathbf{H}_0}}{\partial \bar{\psi}} = 2\alpha\psi + 2\beta\psi|\psi|^2 = 0. \quad (2.36)$$

Resultando nas soluções que descrevem o estado de equilíbrio para esse sistema:

$$\begin{aligned} \psi &= 0 \\ |\psi|^2 &= |\psi_\infty|^2 = -\frac{\alpha}{\beta}, \end{aligned} \quad (2.37)$$

o índice ∞ indica que este é o valor que $|\psi|^2$ assume no interior de um supercondutor macroscópico.

As soluções encontradas devem satisfazer as equações (2.28). Para isso, é necessário que o parâmetro β assuma apenas valores positivos, de outra forma a energia livre não teria um mínimo global, salvo valores infinitos de ψ , onde a expansão não seria válida. Com $\beta > 0$ temos duas situações: $\alpha > 0$ com mínimo em $\psi = 0$ e $\alpha < 0$ com mínimo em $|\psi|^2 = -\alpha/\beta$, como ilustrado na Figura (2.6).

Podemos escrever a diferença da energia do estado supercondutor e normal da seguinte forma:

²Nesta dissertação a barra denota o complexo conjugado.

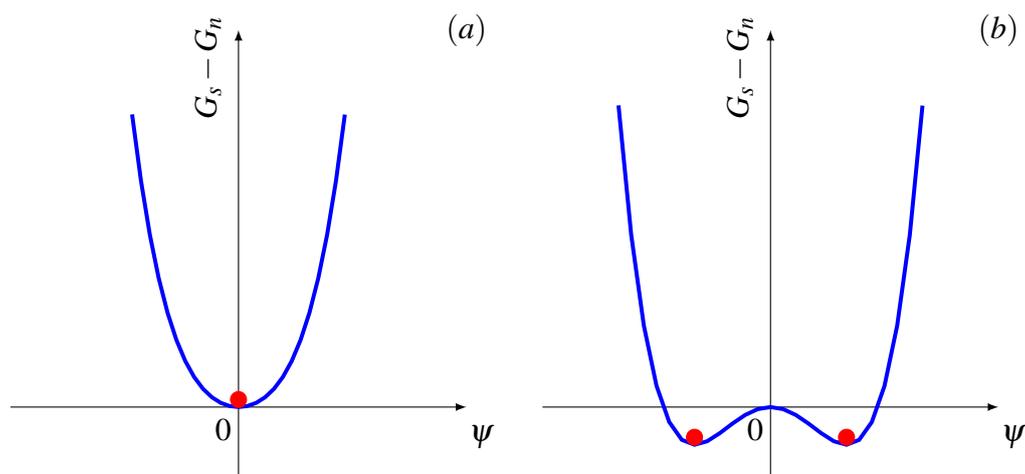


Figura 2.6 Diferença da energia livre GL para o (a) estado normal $\alpha > 0$, ou seja $T > T_c$, com o mínimo de energia localizado em $\psi = 0$ e (b) supercondutor $\alpha < 0$, ou seja $T < T_c$, a energia possui dois mínimos $\psi = \pm \sqrt{-\alpha/\beta}$. Os pontos vermelhos mostram a posição dos mínimos do funcional.

$$G_s - G_n = \alpha_0(T - T_c)|\psi|^2 + \frac{\beta}{2}|\psi|^4, \quad (2.38)$$

No equilíbrio, é fácil ver que as energias livres são dadas por:

$$\begin{aligned} G_s &= G_n, & T > T_c \\ G_s &= G_n - \frac{\alpha_0^2}{2\beta}(T - T_c)^2, & T < T_c. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Através de (2.8) e (2.39) vemos que α e β estão relacionados ao campo crítico.

$$G_s = G_n - \frac{\alpha_0^2}{2\beta}(T - T_c)^2 = -\frac{1}{8\pi}H_c^2. \quad (2.40)$$

2.4.3 As equações de GL

Nesta seção iremos obter as duas equações de GL mais condição de contorno a partir da equação (2.30) utilizando o princípio variacional. Integrando (2.30) no volume da amostra e

minimizando com respeito a $\bar{\psi}$ e \mathbf{A} . Para obter o mínimo da energia livre de Gibbs vamos primeiro fazer a variação com respeito a $\bar{\psi}$ [45]

$$\int \left\{ \alpha \psi \delta \bar{\psi} + \beta \psi |\psi|^2 \delta \bar{\psi} + \frac{1}{2m^*} \mathbf{D} \cdot \left(i\hbar \nabla - \frac{2e}{c} \mathbf{A} \right) \delta \bar{\psi} \right\} dV = 0, \quad (2.41)$$

onde

$$\mathbf{D} = \left(-i\hbar \nabla - \frac{2e}{c} \mathbf{A} \right) \psi \quad (2.42)$$

e V é o volume da amostra. Fora desta região ψ é nulo. O último termo da equação (2.41) pode ser reescrito como

$$\frac{i\hbar}{2m^*} \int \mathbf{D} \cdot \nabla \delta \bar{\psi} dV - \frac{2e}{2m^*c} \int \mathbf{D} \cdot \mathbf{A} \delta \bar{\psi} dV. \quad (2.43)$$

Fazendo o uso de $\nabla \cdot (\delta \bar{\psi} \mathbf{D}) = \mathbf{D} \cdot \nabla \delta \bar{\psi} + \delta \bar{\psi} \nabla \cdot \mathbf{D}$ na equação (2.43)

$$\frac{i\hbar}{2m^*} \left[- \int \delta \bar{\psi} \nabla \cdot \mathbf{D} dV + \int \nabla \cdot (\delta \bar{\psi} \mathbf{D}) dV \right] - \frac{2e}{2m^*c} \int \mathbf{D} \cdot \mathbf{A} \delta \bar{\psi} dV. \quad (2.44)$$

Substituindo (2.44) em (2.41) resulta

$$\int \left\{ \alpha \psi \delta \bar{\psi} + \beta \psi |\psi|^2 \delta \bar{\psi} - \frac{i\hbar}{2m^*} \delta \bar{\psi} \nabla \cdot \mathbf{D} + \frac{i\hbar}{2m^*} \nabla \cdot (\delta \bar{\psi} \mathbf{D}) - \frac{2e}{2m^*c} \mathbf{D} \cdot \mathbf{A} \delta \bar{\psi} \right\} dV = 0. \quad (2.45)$$

Usando o teorema de Gauss $\int \nabla \cdot \mathbf{A} dV = \oint \mathbf{n} \cdot \mathbf{A} dS$, na equação acima,

$$\begin{aligned} & \int \left\{ \alpha \psi \delta \bar{\psi} + \beta \psi |\psi|^2 \delta \bar{\psi} - \frac{i\hbar}{2m^*} \delta \bar{\psi} \nabla \cdot \mathbf{D} - \frac{2e}{2m^*c} \mathbf{D} \cdot \mathbf{A} \delta \bar{\psi} \right\} dV \\ & + \frac{i\hbar}{2m^*} \oint \mathbf{n} \cdot \delta \bar{\psi} \mathbf{D} dS = 0 \end{aligned} \quad (2.46)$$

em que S é a superfície da amostra.

Substituindo \mathbf{D} em (2.46) e fazendo algumas manipulações,

$$\int \left\{ \alpha \psi \delta \bar{\psi} + \beta \psi |\psi|^2 \delta \bar{\psi} + \frac{1}{2m^*} \left(-i\hbar \nabla - \frac{2e}{c} \mathbf{A} \right)^2 \psi \delta \bar{\psi} \right\} dV + \frac{i\hbar}{2m^*} \oint \mathbf{n} \cdot \delta \bar{\psi} \left(-i\hbar - \frac{2e}{c} \mathbf{A} \right) \psi dS = 0. \quad (2.47)$$

Para um $\delta \bar{\psi}$ arbitrário, a expressão acima só pode ser zero, se ambos os termos separadamente forem zero. Dessa forma, obtemos a primeira equação de GL e sua condição de contorno:

$$\alpha \psi + \beta \psi |\psi|^2 + \frac{1}{2m^*} \left(-i\hbar \nabla - \frac{2e}{c} \mathbf{A} \right)^2 \psi = 0 \quad (2.48)$$

e

$$\mathbf{n} \cdot \left(-i\hbar - \frac{2e}{c} \mathbf{A} \right) \psi \Big|_S = 0, \quad (2.49)$$

onde \mathbf{n} é um vetor normal à superfície S .

Estas são as equações para o parâmetro de ordem ψ . A expressão (2.49) é uma generalização da condição $\mathbf{A} \cdot \mathbf{n} = 0$ (condição de contorno de Neumann), consequência do calibre de London $\nabla \cdot \mathbf{A} = \mathbf{0}$ para que a densidade de corrente supercondutora seja conservada. Esta condição corresponde ao caso em que densidade de corrente supercondutora não pode fluir para fora do supercondutor. Podemos observar que a primeira equação (2.48), desconsiderando o termo não linear $\beta \psi |\psi|^2$, é análoga a equação de Schrodinger para uma partícula de massa m^* e carga e^* imersa em um campo magnético, em que $\psi(\mathbf{r})$ é sua função de onda e α o autovalor de energia [2, 45]. Procedendo de forma análoga vamos minimizar o funcional de energia livre com respeito ao potencial vetor,

$$\frac{1}{2m^*} \int \left[\left(-\frac{2e}{c} \delta \mathbf{A} \bar{\psi} \right) \cdot \left(-i\hbar \nabla \psi - \frac{2e}{c} \mathbf{A} \psi \right) + \left(i\hbar \nabla \bar{\psi} - \frac{2e}{c} \mathbf{A} \bar{\psi} \right) \cdot \left(-\frac{2e}{c} \delta \mathbf{A} \psi \right) \right] dV + \frac{1}{4\pi} \int (\nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{H}_0) \cdot (\nabla \times \delta \mathbf{A}) dV = 0 \quad (2.50)$$

onde $\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}$. A variação $\delta(\mathbf{H})^2 = \delta(\nabla \times \mathbf{A})^2$ pode ser escrita como $2(\nabla \times \mathbf{A}) \cdot (\nabla \times \delta\mathbf{A})$. Usando a propriedade $\nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) - \mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{b})$ e chamando $\mathbf{a} = \delta\mathbf{A}$ e $\mathbf{b} = \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{H}_0$,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2m^*} \int \left[\left(-\frac{2e}{c} \delta\mathbf{A} \bar{\psi} \right) \cdot \left(-i\hbar \nabla \psi - \frac{2e}{c} \mathbf{A} \psi \right) + \left(i\hbar \nabla \bar{\psi} - \frac{2e}{c} \mathbf{A} \bar{\psi} \right) \cdot \left(-\frac{2e}{c} \delta\mathbf{A} \psi \right) \right] dV \\ & + \frac{1}{4\pi} \int [\delta\mathbf{A} \cdot \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \cdot (\delta\mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{H}_0))] dV = 0. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Usando o teorema de Gauss na última parte da equação acima teremos:

$$\int \nabla \cdot [\delta\mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{H}_0)] dV = \oint dS \cdot [\delta\mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{H}_0)]. \quad (2.52)$$

A integral de superfície é nula, pois o campo magnético na superfície do supercondutor é constante. Dessa forma, ficamos com

$$\int \left[\frac{i\hbar e}{m^* c} (\bar{\psi} \nabla \psi - \psi \nabla \bar{\psi}) + \frac{4e^2}{m^* c^2} |\psi|^2 \mathbf{A} + \frac{1}{4\pi} \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} \right] \cdot \delta\mathbf{A} dV = 0. \quad (2.53)$$

Para um $\delta\mathbf{A}$ arbitrário, a expressão é escrita como

$$\frac{i\hbar e}{m^* c} (\bar{\psi} \nabla \psi - \psi \nabla \bar{\psi}) + \frac{4e^2}{m^* c^2} |\psi|^2 \mathbf{A} + \frac{1}{4\pi} \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = 0. \quad (2.54)$$

A densidade de corrente supercondutora \mathbf{J}_s é dada pela equação de Maxwell

$$\mathbf{J}_s = \frac{c}{4\pi} \nabla \times \nabla \times \mathbf{A}, \quad (2.55)$$

e finalmente obtemos a segunda equação de GL:

$$\mathbf{J}_s = -\frac{i\hbar e}{m^*} (\bar{\psi} \nabla \psi - \psi \nabla \bar{\psi}) - \frac{4e^2}{m^* c} |\psi|^2 \mathbf{A}. \quad (2.56)$$

A segunda equação (2.56) fornece a resposta diamagnética do supercondutor a um campo aplicado. Como \mathbf{J}_s depende tanto do parâmetro de ordem como de suas variações, esta equação

expressa uma resposta eletrodinâmica de natureza local [45]. Se escrevemos o parâmetro de ordem como $\psi(\mathbf{r}) = |\psi(\mathbf{r})|e^{i\theta(\mathbf{r})}$ e fazendo:

$$\begin{aligned}\nabla\psi &= \nabla(|\psi|e^{i\theta}) \\ &= i|\psi|e^{i\theta}\nabla\theta + e^{i\theta}\nabla|\psi|,\end{aligned}\tag{2.57}$$

analogamente

$$\begin{aligned}\nabla\bar{\psi} &= \nabla(|\psi|e^{-i\theta}) \\ &= -i|\psi|e^{-i\theta}\nabla\theta + e^{-i\theta}\nabla|\psi|,\end{aligned}\tag{2.58}$$

assim

$$\begin{aligned}\bar{\psi}\nabla\psi &= (i|\psi|^2\nabla\theta + |\psi|\nabla|\psi|) \\ \psi\nabla\bar{\psi} &= (-i|\psi|^2\nabla\theta + |\psi|\nabla|\psi|).\end{aligned}\tag{2.59}$$

Substituindo (2.59) em (2.56):

$$\mathbf{J}_s = \frac{2e}{m^*}|\psi|^2\left(\hbar\nabla\theta - \frac{2e}{c}\mathbf{A}\right) \equiv 2e|\psi|^2\mathbf{v}_s,\tag{2.60}$$

onde \mathbf{v}_s é a velocidade do superfluido.

Embora a teoria GL tenha uma raiz fenomenológica, esta nos permite descrever importantes propriedades relacionadas aos supercondutores. Através desta teoria é possível obter os comprimentos característicos, ou seja, o comprimento de penetração de London λ , o comprimento de coerência ξ e a quantização do campo magnético.

2.4.4 Comprimentos característicos

A teoria GL introduz duas escalas de comprimentos característicos importantes que descrevem o comportamento do supercondutor, o comprimento de penetração e o comprimento de coerência, $\lambda(T)$ e $\xi(T)$ respectivamente. O primeiro está relacionado a penetração do campo magnético no interior do supercondutor e o segundo à variações do parâmetro de ordem. A razão λ/ξ é o parâmetro GL κ , através deste os supercondutores são classificados em tipo *I* e tipo *II*.

2.4.4.1 Comprimento de penetração

Se considerarmos baixas temperaturas e campos magnéticos fracos, tal que $|\psi|^2 = |\psi_\infty|^2 = -\alpha/\beta$, recuperamos a teoria de London, transformando a segunda equação GL (2.56) em

$$\mathbf{J}_s = -\frac{4e^2}{m^*c} |\psi|^2 \mathbf{A}. \quad (2.61)$$

Tomando o rotacional em ambos os lados da equação (2.61):

$$\nabla \times \mathbf{J}_s = -\frac{4e^2}{m^*c} |\psi|^2 \nabla \times \mathbf{A} \quad (2.62)$$

e usando a lei de Ampère, reescrevemos a equação (2.62) como

$$\mathbf{H} + \lambda^2 \nabla \times \nabla \times \mathbf{H} = 0 \quad (2.63)$$

em que o comprimento de penetração do campo magnético é definido como

$$\begin{aligned}
\lambda(T) &= \sqrt{\frac{m^*c^2}{16\pi e^2 |\psi|^2}} \\
&= \sqrt{\frac{m^*c^2 \beta}{16\pi e^2 |\alpha|}} \\
&= \lambda(0) \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^{-1/2},
\end{aligned} \tag{2.64}$$

onde $\lambda(0)$ é o comprimento de penetração à $T = 0$.

2.4.4.2 Comprimento de coerência

Consideremos um supercondutor semi-infinito, que preenche o espaço $x > 0$, para analisar o caso em que o parâmetro de ordem possui uma inhomogeneidade causada pela presença de uma interface, isto na ausência de campo magnético e corrente aplicados. A primeira equação GL na sua forma unidimensional, fica:

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{d^2\psi}{dx^2} + \alpha\psi + \beta\psi^3 = 0, \tag{2.65}$$

assumimos que ψ é real.

No estado supercondutor α é negativo, assim, $\alpha = -|\alpha|$,

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{d^2\psi}{dx^2} - |\alpha|\psi + \beta\psi^3 = 0. \tag{2.66}$$

Vamos utilizar a seguinte transformação $\psi^2 = |\alpha|/\beta f^2$, em que f é uma função normalizada, de forma que assume valor máximo igual a 1 no interior do supercondutor e mínimo 0, fora. Dessa forma, a equação (2.66) pode ser escrita

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*|\alpha|} \frac{d^2f}{dx^2} - f + f^3 = 0, \tag{2.67}$$

onde

$$\xi^2 = \frac{\hbar^2}{2m^*|\alpha|} \quad (2.68)$$

é definido como o comprimento de coerência e está relacionado a escala de variação espacial do parâmetro de ordem supercondutor.

Desenvolvendo a equação (2.67), iremos multiplica-la por f' , integrar seu resultado e em seguida, derivar em relação a x :

$$\frac{d}{dx} \left[-\xi^2 \frac{(f')^2}{2} - \frac{f^2}{2} + \frac{f^4}{4} \right] = 0. \quad (2.69)$$

Consequentemente, temos que:

$$-\xi^2 \frac{(f')^2}{2} - \frac{f^2}{2} + \frac{f^4}{4} = C, \quad (2.70)$$

utilizando a condição de contorno $x \rightarrow \infty$, temos que $f' = 0$ e $f^2 = 1$, encontramos $C = -1/4$.

Dessa forma,

$$\xi^2 (f')^2 = \frac{1}{2} (1 - f^2)^2, \quad (2.71)$$

resolvendo por integração, obtemos a solução:

$$f(x) = \tanh \left(\frac{x}{\sqrt{2}\xi} \right). \quad (2.72)$$

Tabela 2.1 Valores do comprimento de coerência intrínseco e do comprimento de penetração para alguns metais, no zero absoluto. Tabela retirada da referência [46].

Metal	ξ_0 em $10^{-6}cm$	λ em $10^{-6}cm$	λ/ξ_0
Sn	23	3.4	0.16
Al	160	1.6	0.010
Pb	8.3	3.7	0.45
Cd	76	11	0.14
Nb	3.8	3.9	1.02

Uma vez que $\alpha(T) = -\alpha_0 T_c [1 - (T/T_c)]$, encontramos

$$\begin{aligned}\xi &= \sqrt{\frac{\hbar^2}{2m^* \alpha_0 T_c}} \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^{-1/2} \\ &= \xi(0) \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^{-1/2}.\end{aligned}\tag{2.73}$$

Na interface do supercondutor a variação de n_s não pode ocorrer de forma abrupta, pois cresce de zero para um valor constante, portanto se altera numa escala de distância caracterizada por ξ . Para distâncias muito menores que o comprimento de coerência ξ , a densidade de elétrons torna-se constante na amostra. A medida que essa distância é da ordem de ξ , o parâmetro de ordem sofre uma mudança significativa, resultando em uma mudança de comportamento na interface dessa região.

Na Tabela 2.1, podemos observar alguns valores de λ e ξ_0 , onde ξ_0 é o comprimento de coerência intrínseco ou comprimento de coerência de Pippard [47], característico de um supercondutor puro. Em temperaturas próximas ao zero absoluto pode-se mostrar, com o auxílio da teoria BCS, que $\xi \approx \xi_0$ [2].

Podemos relacionar o comprimento de coerência ξ ao comprimento de coerência de Pippard ξ_0 , por meio da expressão para o limite limpo $l_{el} \gg \xi_0$ e para o limite sujo $l_{el} \leq \xi_0$, que são dados por [2]:

$$\begin{aligned}\xi(T) &= 0.74 \frac{\xi_0}{\sqrt{1-t}}, \quad \text{se } l_{el} \gg \xi_0 \\ \xi(T) &= 0.855 \sqrt{\frac{\xi_0 l_{el}}{1-t}} \quad \text{se } l_{el} \ll \xi_0.\end{aligned}\tag{2.74}$$

Onde l_{el} é o caminho livre médio elástico dos elétrons normais e $t = T/T_c$ é a temperatura reduzida. As relações (2.74) são válidas somente para temperaturas próximas a T_c .

2.5 Quantização do fluxo magnético

Nesta seção discutiremos a origem da quantização do fluxo magnético em um supercondutor tipo II. Para exemplificar, consideremos uma amostra supercondutora com um buraco em seu interior, ilustrada na Figura 2.7. Em $T > T_c$ a amostra está no estado normal, então aplica-se um campo magnético paralelo ao eixo da amostra (direção z). Baixando a temperatura para valores $T < T_c$, teremos o estado supercondutor no qual o campo é expulso da amostra, ficando limitado a região do buraco.

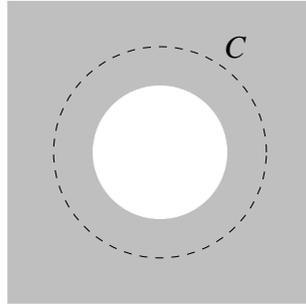


Figura 2.7 Amostra no estado supercondutor com buraco no interior, contornado por um caminho fechado C . O caminho fechado representado pela linha tracejada, está no interior da amostra afastado da superfície, de modo que a densidade de corrente seja nula nesta região.

A quantização do fluxo magnético que atravessa a amostra supercondutora pode ser demonstrada mediante o formalismo de GL inserindo o módulo e a fase do parâmetro de ordem, explicitamente na equação (2.56),

$$\mathbf{J}_s = \frac{2e}{m^*} |\psi|^2 \hbar \nabla \theta - \frac{4e^2}{m^* c} |\psi|^2 \mathbf{A}. \quad (2.75)$$

O segundo termo da equação (2.75) mostra que para uma fase supercondutora uniforme $\nabla \theta = 0$, recuperamos a equação de London. O primeiro termo mostra que, quando $\mathbf{A} = 0$, uma fase não uniforme dá origem a um fluxo de corrente no estado supercondutor.

Calculando a integral de caminho do potencial vetor numa trajetória fechada C :