



UFRPE

Universidade Federal Rural de Pernambuco
Centro de Ensino de Graduação em Exatas e da Natureza
Departamento de Física

Pós-graduação em Física Aplicada

**Efeitos da Não-comutatividade do
Espaço-tempo sobre as Propriedades
Termodinâmicas da Corda Negra**

João Chakrian Raphael Viana Duarte

Dissertação de Mestrado

Recife

22 de fevereiro de 2021

Universidade Federal Rural de Pernambuco
Centro de Ensino de Graduação em Exatas e da Natureza
Departamento de Física

João Chakrian Raphael Viana Duarte

**Efeitos da Não-comutatividade do Espaço-tempo sobre as
Propriedades Termodinâmicas da Corda Negra**

*Trabalho apresentado ao Programa de Pós-graduação em
Física Aplicada do Departamento de Física da Universi-
dade Federal Rural de Pernambuco como requisito parcial
para obtenção do grau de Mestre em Física.*

Orientador: *Prof. Dr. Antônio de Pádua Santos*

Recife
22 de fevereiro de 2021

À minha família e meus amigos.

Agradecimentos

Agradeço imensamente à minha família, em especial à minha mãe, pelo apoio e incentivo na busca por desenvolver esse trabalho. Sem a ajuda dos meus familiares, não teria alcançado um degrau tão importante na minha vida acadêmica. Muita paciência e esforço foram despendidos e espero ter feito toda esta dedicação valer a pena.

Agradeço à minha futura esposa por todo o apoio e todo o amor que me manteve no caminho certo e me trouxe muita paz durante todo este período importante da vida, sem seu carinho e companheirismo não poderia ter sempre conseguido dar o meu melhor.

Agradeço aos meus amigos por todos os momentos felizes ou infelizes vividos na universidade ou fora dela. Todas as discussões sobre ciência ou sobre a vida foram muito importantes para que eu pudesse desenvolver maturidade para ir em busca dos meus objetivos, agradeço muito.

Agradeço muito à paciência, dedicação e interesse do meu orientador que sempre esteve por perto para apoiar, oferecer ajuda e incentivar a continuar com o trabalho duro. Com a orientação realizada com esforço e muita vontade, fornecendo motivação extra, pude sempre pensar em quanto trabalho deveria ser feito e não que havia trabalho a se fazer.

*O aspecto mais triste da vida neste momento preciso é que a ciência reúne
conhecimento mais rapidamente do que a sociedade reúne sabedoria*

—ISAAC ASIMOV

Resumo

Buracos negros são tema de muitos trabalhos até hoje não somente pelo fato de que tais objetos tenham propriedades físicas interessantes, mas também porque eles parecem ser a ferramenta apropriada para estudar gravidade em escala quântica após a proposta da radiação emitida por buracos negros. Muito esforço foi feito com a intenção de entender melhor os aspectos do espaço-tempo em escala quântica e a abordagem a qual inclui a não-comutatividade se releva promissora. O trabalho aqui desenvolvido retrata as propriedades termodinâmicas de buracos negros cilíndricos (cordas negras) no espaço-tempo não-comutativo. O objetivo é fornecer entendimento sobre a termodinâmica de tais objetos considerando-se a influência dos efeitos não-comutativos uma vez que a escala na qual tais efeitos tornam-se mais pronunciados é a escala de espaço-tempo a qual é importante para a compreensão da relação entre Mecânica Quântica e Relatividade Geral.

Palavras-chave: Cordas negras, espaço-tempo não-comutativo, geometria não-comutativa, radiação Hawking, termodinâmica.

Abstract

Black holes are a subject of many works till the present day not only because they have interesting physics properties, but also because they seem to be the appropriate tool for studying gravity in quantum scale after the proposal of black hole radiation. A lot of effort was made with the intend of better understanding the aspects of spacetime in quantum scale and the approach which includes the noncommutativity reveals to be a promising one. In this work, we study the thermodynamical properties of cylindrical black holes (black strings) in noncommutative spacetime. Our aim is to provide understanding about the thermodynamics of these objects by considering the influence due noncommutativity since that scale of spacetime, in which the noncommutativity effects become more pronounced, is important for the comprehension of the relation between Quantum Mechanics and General Relativity.

Keywords: Black strings, noncommutative spacetime, noncommutative geometry, Hawking radiation, thermodynamics.

Sumário

1	Introdução	1
2	Tópicos em Relatividade Geral e Teoria Quântica de Campos	3
2.1	Tópicos em Relatividade Geral	3
2.1.1	Equações de campo	3
2.1.2	Uma revisão do buraco negro de Schwarzschild	7
2.1.3	Termodinâmica de buracos negros	8
2.2	Tópicos em Teoria Quântica de Campos	10
2.2.1	Radiação Hawking como tunelamento	10
2.2.2	Efeito back reaction	18
3	Não-comutatividade do Espaço-tempo	20
3.1	Aspectos fundamentais	20
3.2	A matéria no espaço-tempo não-comutativo	22
3.3	Teoria quântica de campos em espaço-tempo não-comutativo	24
4	Cordas Negras	30
4.1	Espaço-tempo não-comutativo da corda negra	30
4.1.1	A solução de corda negra	30
4.1.2	Grandezas termodinâmicas	33
4.2	Termodinâmica da corda negra na presença de back reaction	46
4.2.1	Preliminares: a relação $T_H = \frac{\mathcal{K}}{2\pi}$	46
4.2.2	Back reaction no espaço-tempo comutativo	54
4.2.3	Back reaction no espaço-tempo não-comutativo	59
5	Corda negra em equilíbrio térmico com um reservatório	73
5.1	Espaço vazio como reservatório térmico	73
5.2	Radiação cósmica de fundo como reservatório térmico	75
5.3	Radiação cósmica de fundo em evolução como reservatório térmico	78
5.4	Análise dos resultados	81
5.4.1	Corda negra e espaço vazio	81
5.4.2	Corda negra e radiação cósmica de fundo	83
5.4.3	Corda negra e evolução da radiação cósmica de fundo	84
6	Conclusões e Perspectivas	88

A	Função gama incompleta inferior	91
A.1	Definição	91
A.2	Algumas propriedades	91
B	Desenvolvimento matemático da entropia na presença de back reaction	94
B.1	Entropia no espaço-tempo comutativo	94
B.2	Entropia no espaço-tempo não-comutativo	97

Lista de Figuras

2.1	Ilustração do mecanismo que rege a radiação Hawking. Fonte: imagem retirada da referência [1].	10
2.2	Contorno de integração utilizado no plano complexo no cálculo do fator de emissão de partículas. Fonte: elaborado pelo autor.	15
4.1	Representação da densidade de massa da corda negra no espaço-tempo não-comutativo. Este gráfico foi elaborado pelo autor.	33
4.2	Curvas de temperatura Hawking para casos comutativo e não-comutativo. Fonte: elaborado pelo autor.	35
4.3	Curvas de capacidade calorífica para casos comutativo e não-comutativo. Fonte: elaborado pelo autor.	38
4.4	Energia interna para casos comutativo e não-comutativo. Fonte: elaborado pelo autor.	42
4.5	Energia livre para casos comutativo e não-comutativo. Fonte: elaborado pelo autor.	45
4.6	Comportamento da temperatura considerando-se efeitos de back reaction para vários valores do parâmetro $\alpha\sqrt{\theta}$. Temos $\sigma = 10^{-3}$	62
4.7	Capacidade calorífica nos espaços-tempos comutativo e não-comutativo na presença de back reaction. Fonte: elaborado pelo autor.	64
4.8	Capacidade calorífica nos espaços-tempos comutativo e não-comutativo na presença de back reaction. Fonte: elaborado pelo autor.	65
4.9	Energia livre nos espaços-tempos comutativo e não-comutativo na presença de back reaction considerando $\alpha\sqrt{\theta} = 0,5$. Fonte: elaborado pelo autor.	71
4.10	Energia livre nos espaços-tempos comutativo e não-comutativo na presença de back reaction considerando $\alpha\sqrt{\theta} = 1$. Fonte: elaborado pelo autor.	72
4.11	Energia livre nos espaços-tempos comutativo e não-comutativo na presença de back reaction considerando $\alpha\sqrt{\theta} = 1,5$. Fonte: elaborado pelo autor.	72
5.1	Evolução temporal da massa com o espaço vazio como reservatório térmico.	82
5.2	Gráfico do campo de inclinação para a evolução temporal da massa da corda negra imersa no espaço vazio	83
5.3	Plotagem scope para a evolução temporal da corda negra sob radiação cósmica de fundo.	84
5.4	Evolução temporal da massa da corda negra na era de predominância da radiação.	85
5.5	Evolução temporal da massa da corda negra na era de predominância da matéria.	86

5.6	Evolução temporal da massa da corda negra na era de predominância da energia escura.	87
-----	--	----

CAPÍTULO 1

Introdução

Um leitor vive mil vidas antes de morrer, um homem que nunca lê vive apenas uma

—GEORGE R. R. MARTIN (As Crônicas de Gelo e Fogo)

O universo se mostrou, em diversas oportunidades, um lugar fascinante que desperta a curiosidade da humanidade. Com o avanço da ciência e tecnologia, a capacidade de entender e realizar previsões sobre a fenomenologia da natureza tem aumentado consideravelmente. As recentes descobertas acerca de buracos negros, como por exemplo a detecção de ondas gravitacionais [2], a imagem do buraco negro na galáxia M87 [3] e buraco negro supermassivo no centro da via láctea [4], têm entusiasmado a comunidade científica e público em geral, uma vez que tais estudos exploram a capacidade de compreender a natureza e ressaltam a importância de tal compreensão. Dentre alguns estudos podemos destacar, como os mais inspiradores para o estudo desenvolvido nesta dissertação, o trabalho de Hawking [5] que prevê a emissão de radiação por buracos negros, ou seja, que é possível atribuir uma temperatura termodinâmica a um buraco negro; o trabalho de Bañados, Teitelboim e Zanelli [6] que fornece uma solução do tipo buraco negro em $(2 + 1)$ dimensões; o estudo de Bardeen e Carter [7] o qual disserta sobre as quatro leis mecânicas de buracos negros; o grande esforço de Nicolini [8] com o estudo de buracos negros num espaço-tempo não-comutativo e Lemos com [9, 10] e [11] que trazem à tona soluções do tipo *corda negra* (buracos negros cilíndricos) e apresenta a maneira de partir de uma solução BTZ e obter a solução quadridimensional de corda negra, respectivamente.

O tema abordado neste documento revela sua importância pois o problema de estudar efeitos gravitacionais em curta escala sob a ótica da Relatividade Geral é importante para a física contemporânea uma vez que tal descrição proporcionaria uma melhor compreensão da natureza. O estudo de geometria não-comutativa e do espaço-tempo não-comutativo apresenta-se como alternativa para atacar tal problema. A presente dissertação visa à capacidade de realizar uma descrição e aprofundamento destes temas com a finalidade de contribuir para esta área mais fundamental da física teórica. Sendo assim, como buscamos atingir um alto grau de legibilidade para o nosso trabalho destacamos os resultados já conhecidos bem como os resultados inéditos de forma que esta dissertação representa não somente um trabalho fim, mas também um trabalho meio para estudos futuros que poderiam ser realizados com o auxílio do esforço aqui apresentado.

Esta dissertação está organizada em quatro capítulos que discorrem sobre a pesquisa desenvolvida além de um capítulo contendo as conclusões e perspectivas de acordo com o que expomos e o presente capítulo dedicado à introdução. Os capítulos que discorrem sobre o

trabalho realizado estão organizados da seguinte forma: o capítulo 2 revisa alguns conceitos necessários sobre Relatividade Geral e Teoria Quântica de Campos de forma que seja estabelecido o alicerce conceitual necessário para uma boa leitura dos demais capítulos. Em tal capítulo apresentamos, a caráter de referência posterior, as equações da Teoria da Relatividade Geral e a primeira solução de buraco negro, que é a solução esférica de Schwarzschild. Também discutimos a radiação Hawking e o efeito back reaction. Sequencialmente, o capítulo 3 apresenta a não-comutatividade e revela a sua importância ao longo do trabalho com uma razoável revisão bibliográfica do tema e destaques para o uso no presente trabalho. O capítulo 4 posterior aborda o principal tema da dissertação que é o estudo de cordas negras e os efeitos de não-comutatividade sobre tais objetos. Neste capítulo encontram-se não somente comentários sobre o que pode-se encontrar na literatura sobre cordas negras, como também novos desfechos sobre o tema expressos por meio de nossos resultados inéditos a partir da seção 4.1.2. Por conseguinte, dedicamos o capítulo 5 ao desenvolvimento, também inédito, da previsão do comportamento da corda negra no universo considerando a evolução temporal do mesmo. Para realizar tal ambição, propomos uma análise baseada em equilíbrio térmico.

Como consequência da presente dissertação, o manuscrito intitulado *Black String Thermodynamics in Noncommutative Spacetime: Anomaly and Phase Transition* foi submetido à publicação na revista Physical Review D. Este trabalho submetido aborda a investigação da influência de efeitos da não-comutatividade do espaço-tempo sobre a termodinâmica da corda negra e desenvolve um estudo sobre a influência de efeitos perturbativos sobre tal sistema. O manuscrito encontra-se no arquivo de livre acesso online arXiv e pode ser acessado por meio do link <<https://arxiv.org/pdf/2012.04614.pdf>>.

Tópicos em Relatividade Geral e Teoria Quântica de Campos

Se enxerguei mais longe, foi porque me apoiei em ombros de gigantes
—ISAAC NEWTON

Neste capítulo, pretendemos apresentar uma breve discussão acerca das equações de Einstein e sua solução do tipo buraco negro esférico (Schwarzschild) a fim de introduzir ao leitor o tema geral deste trabalho e despertar o interesse na discussão sobre a termodinâmica de tais objetos. Em seguida, discutiremos brevemente sobre Teoria Quântica de Campos a fim de tratar de um dos resultados mais interessantes a cerca da consideração de Teoria Quântica de Campos em Espaços Curvos: a radiação Hawking. Neste procedimento vamos entender como tal fenômeno pode ser interpretado como um processo de tunelamento. Por fim, vamos abordar o efeito back reaction e explicitar como tal efeito será considerado ao longo deste trabalho.

2.1 Tópicos em Relatividade Geral

2.1.1 Equações de campo

Considerando-se a importância e a necessidade das equações da Relatividade Geral, é imprescindível que façamos uma breve revisão de tópicos nesta área. Começamos destacando que, seguindo a maior parte da literatura especializada, vamos considerar a velocidade da luz $c = 1$ salvo quando dito diferente. Deixemos claro também que a assinatura da métrica utilizada em nosso trabalho segue a forma $(-, +, +, +)$, ou seja, a coordenada temporal sinaliza $(-)$ e as demais coordenadas espaciais sinalizam $(+)$ e escrevemos o elemento de linha como

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (2.1)$$

com os índices gregos acima representando as coordenadas espaço-temporais ($\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$) e dx^μ representando um deslocamento infinitesimal na coordenada x^μ . A quantidade $g_{\mu\nu}$ é um tensor chamado de métrica do referido espaço-tempo e funciona como uma “impressão digital” do mesmo visto que reserva as informações geométricas do espaço-tempo e possibilita o cálculo do elemento de linha acima, o qual é uma grandeza invariante. A importância de $g_{\mu\nu}$ se torna ainda mais evidente quando entendemos que ele é o campo que descreve a gravidade e é o que buscamos quando tentamos resolver as equações de campo de Einstein. Tais equações

podem ser obtidas a partir da formulação lagrangiana da Relatividade Geral, baseando-se no princípio de Hamilton que minimiza a ação, partindo de uma ação da seguinte forma

$$S = \int \mathcal{L}(\Phi^j, \nabla_\mu \Phi^j) d^n x, \quad (2.2)$$

com ∇_μ representando a derivada covariante que atua no conjunto de campos escalares Φ^j e \mathcal{L} representando a densidade lagrangiana que geralmente é escrita em termos do determinante da métrica como $\mathcal{L} = \sqrt{-g} \hat{\mathcal{L}}$ onde $\hat{\mathcal{L}}$ é um escalar, de fato. É importante reparar que usamos a notação $d^n x$ para indicar que estas relações não dependem de dimensionalidade. Para a construção de uma ação apropriada, toma-se $g_{\mu\nu}$ como o grau de liberdade (variável dinâmica) e usa-se o único escalar independente construído a partir da métrica, o escalar de Ricci $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ com $R_{\mu\nu}$ o tensor de Ricci [12] de forma que obtém-se

$$S_{EH} = \int \sqrt{-g} R d^n x, \quad (2.3)$$

que é conhecida como ação de Einstein-Hilbert. Variando tal ação com respeito à variável dinâmica, a métrica, somos levados às equações de movimento apropriadas que são as equações de Einstein no vácuo

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 0, \quad (2.4)$$

onde lembramos que o tensor $R_{\mu\nu}$ é o tensor de Ricci. A obtenção da equação (2.4) a partir da relação (2.3) pode ser entendida seguindo-se o procedimento padrão que pode ser encontrado na referência [13]: desenvolve-se a variação na ação de Einstein-Hilbert e utiliza-se o princípio de Hamilton $\delta S_{EH} = 0$, com δ representando variação na função S_{EH} . Partindo do princípio de Hamilton, escrevemos

$$\delta \int \sqrt{-g} R d^n x = 0. \quad (2.5)$$

Lembrando o fato de o escalar de Ricci representar a contração do tensor de Ricci $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$, temos

$$\delta \int \sqrt{-g} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} d^n x = 0 \quad (2.6)$$

ou seja,

$$\int \delta (\sqrt{-g} g^{\mu\nu}) R_{\mu\nu} d^n x + \int \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta (R_{\mu\nu}) d^n x = 0. \quad (2.7)$$

Lidando com a segunda integral referente ao campo gravitacional, utilizamos a seguinte definição do tensor de Ricci [13]

$$R_{\mu\nu} = \partial_\rho \Gamma_{\mu\nu}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\mu\rho}^\rho + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \Gamma_{\sigma\rho}^\rho - \Gamma_{\mu\rho}^\sigma \Gamma_{\nu\sigma}^\rho, \quad (2.8)$$

onde os símbolos de Christoffel de segunda espécie são definidos por [12]

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\kappa} = \frac{1}{2}g^{\kappa\lambda} (\partial_{\alpha}g_{\beta\lambda} + \partial_{\beta}g_{\lambda\alpha} - \partial_{\lambda}g_{\alpha\beta}). \quad (2.9)$$

Adotando um sistema de coordenadas geodésicas, os símbolos de Christoffell são nulos e assim as derivadas covariantes coincidem com as derivadas parciais de forma que a expressão (2.8) pode ser simplificada na equação tensorial

$$R_{\mu\nu} = \nabla_{\rho}\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} - \nabla_{\nu}\Gamma_{\mu\rho}^{\rho}. \quad (2.10)$$

Dessa forma, utilizando ainda o fato de as derivadas covariantes do tensor métrico serem nulas, a segunda integral da equação (2.7) se torna

$$\int \sqrt{-g}g^{\mu\nu} \delta (R_{\mu\nu}) d^n x = \int \sqrt{-g} [\nabla_{\rho} (g^{\mu\nu} \delta\Gamma_{\mu\nu}^{\rho}) - \nabla_{\nu} (g^{\mu\nu} \delta\Gamma_{\mu\rho}^{\rho})] \quad (2.11)$$

e fazendo uma troca de índices obtemos a seguinte relação conveniente

$$\int \sqrt{-g}g^{\mu\nu} \delta (R_{\mu\nu}) d^n x = \int \sqrt{-g}\nabla_{\beta} [g^{\mu\nu} \delta\Gamma_{\mu\nu}^{\beta} - g^{\mu\beta} \delta\Gamma_{\mu\rho}^{\rho}] d^n x \quad (2.12)$$

que evidencia o fato de que a diferenciação é realizada sobre um tensor contravariante. Da definição de divergência sobre um vetor contravariante V^{η} [12],

$$\nabla_{\eta}V^{\eta} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_{\eta}(\sqrt{-g}V^{\eta}) \quad (2.13)$$

a integral supracitada toma a forma

$$\int \sqrt{-g}g^{\mu\nu} \delta (R_{\mu\nu}) d^n x = \int \partial_{\beta} \left\{ \sqrt{-g}g^{\mu\nu} \delta\Gamma_{\mu\nu}^{\beta} - g^{\mu\beta} \delta\Gamma_{\mu\rho}^{\rho} \right\} d^n x = 0, \quad (2.14)$$

onde a última igualdade é verificada pela aplicação do Teorema da Divergência. Analisando agora a primeira integral da expressão (2.7), temos

$$\int \delta (\sqrt{-g}g^{\mu\nu}) R_{\mu\nu} d^n x = \int R_{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} d^n x + \int R_{\mu\nu} g^{\mu\nu} \delta \sqrt{-g} d^n x, \quad (2.15)$$

onde é possível que termo $\delta \sqrt{-g}$ seja reescrito utilizando-se o resultado [12]

$$\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2\sqrt{-g}} \delta g = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \quad (2.16)$$

Desta forma, a equação (2.6) se torna

$$\int \sqrt{-g} \left\{ R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right\} \delta g^{\mu\nu} d^n x = 0 \quad (2.17)$$

e como $\sqrt{-g} \neq 0$, $\delta g^{\mu\nu}$ varia livremente, o termo entre chaves deve ser nulo, o que recupera a relação (2.4). Normalizando a ação (2.3) e adicionando a ação para campos de matéria S_M , consideramos uma ação na forma

$$S = \frac{1}{16\pi G} S_{EH} + S_M \quad (2.18)$$

que, ao utilizar-se um procedimento semelhante ao desenvolvido, leva às equações

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu} \quad (2.19)$$

onde o tensor $T_{\mu\nu}$ é o tensor de momento-energia e G representa a constante gravitacional de Newton.

As equações anteriores sofrem modificações sutis, mas importantes, ao incluirmos um termo de *constante cosmológica* Λ . Inicialmente, a constante cosmológica foi introduzida pelo próprio Einstein na esperança de que seus resultados descrevessem um universo estático uniformemente preenchido com matéria, no qual acreditava. Entretanto, com a observação de Hubble [14] da expansão do universo, a ideia de uma constante cosmológica que traduza um universo estático tornou-se obsoleta. Ainda, as observações de desvio para o vermelho de objetos celestiais apontam para uma expansão acelerada do universo de forma que a constante cosmológica não pode significar que o universo é uma entidade estática. De fato, alguns modelos cosmológicos associam a expansão acelerada do universo à constante cosmológica, como o modelo de de Sitter. Recentemente [15, 16], tentativas de resolução do problema da falta de energia do universo, problema que está intimamente relacionado à matéria escura (modelo cosmológico Λ CDM), têm impulsionado o estudo do universo considerando-se a constante Λ , uma vez que pesquisas apontam que uma densidade de energia escura que resolveria o problema é muito perto do valor da constante cosmológica [16]. Aliando isso ao fato de que tratando-se de gravitação não apenas variações de energia, como também efeitos percebidos em larga escala cosmológica relacionados à expansão acelerada do universo mostraram-se muito importantes, passou-se a considerar a possibilidade de associar uma energia ao “espaço vazio” que seja da ordem da constante cosmológica. Seguindo este raciocínio, a modificação da relação (2.19) para incluir tal densidade de energia intrínseca do vácuo é realizada decompondo o tensor momento-energia em uma parte de matéria $T_{\mu\nu}^{(M)}$ e outra parte que diz respeito ao vácuo $T_{\mu\nu}^{(vac)}$ que devido à invariância de Lorentz, deve ser um tensor proporcional à métrica $T_{\mu\nu}^{(vac)} = -\rho_{vac}g_{\mu\nu}$ que nos leva a escrever

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi G(T_{\mu\nu}^{(M)} - \rho_{vac}g_{\mu\nu}), \quad (2.20)$$

que pode ser reescrito como

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu} \quad (2.21)$$

que ao comparar com a relação anterior nos diz ser equivalente a introduzir uma densidade de energia de vácuo

$$\rho_{vac} = \frac{\Lambda}{8\pi G}. \quad (2.22)$$

Esta discussão torna-se importante para nosso trabalho devido ao fato de buracos negros cilíndricos (cordas negras) serem previstos ao assumir-se uma constante cosmológica de valor finito não nulo.

2.1.2 Uma revisão do buraco negro de Schwarzschild

No século XVIII o reverendo, astrônomo e filósofo natural inglês John Michell (1724-1793) já alertara para as “estrelas negras” quando levantava a hipótese de que se um objeto de mesma densidade do sol, mas com um raio quinhentas vezes maior, existisse, sua atração gravitacional seria tão intensa que uma partícula de luz não seria capaz de escapar da estrela [17, 18]. Treze anos mais tarde, o célebre físico e matemático francês Pierre-Simon, Marquês de Laplace (1749-1827) deu vida a sua versão de uma estrela negra chamando a atenção, semelhante ao que fizera Michell, para a possibilidade de a atração gravitacional de uma estrela ser tão intensa que nem mesmo a luz poderia escapar. Apesar de as duas visões destacadas serem partidárias da teoria newtoniana, esta não prevê a existência de buracos negros como são entendidos hoje, a teoria de gravitação que prevê corretamente a existência de buracos negros é a Teoria da Relatividade Geral de Einstein. Aqui, quando dizemos prever a existência de buracos negros queremos dizer que dadas as equações de campo que descrevem o espaço-tempo, entre suas soluções estão aquelas que são interpretadas como buracos negros.

A primeira solução das equações de campo de Einstein no vácuo do tipo buraco negro foi obtida por Karl Schwarzschild em 1916 [19] e ela descreve o comportamento do campo gravitacional em torno de um objeto esfericamente simétrico, massivo, estático, sem carga elétrica e sem rotação. Com base no teorema de Birkhoff [12], esta solução é a solução mais geral para a simetria esférica no vácuo. A partir deste resultado, muitos outros estudos para diferentes características e tipos de buracos negros, não somente com simetria esférica, foram realizados considerando também rotação (buraco negro de Kerr), carga elétrica (buraco negro de Reissner-Nordström) e rotação e carga elétrica (buraco negro de Kerr-Newman). O interesse em buracos negros com características topológicas diferentes se justifica pela maneira com a qual são formados. Acredita-se que existam duas origens para buracos negros: uma delas remonta aos estágios iniciais do Universo pois os *buracos negros primordiais* seriam o resultado das inhomogeneidades iniciais do Universo que poderiam gerar algumas regiões cuja atração gravitacional fosse mais intensa que a expansão do Universo o que causaria o colapso gravitacional, não necessariamente esférico. A outra origem, mais conhecida e disseminada, é a de que um buraco negro é o resultado do colapso gravitacional de estrelas muito massivas: uma estrela pode ser entendida como um objeto cuja estrutura é sustentada devido ao equilíbrio entre a atração gravitacional e a pressão devido a fusão nuclear. Nesse sentido, a estrela vive consumindo a si mesma e quando seu combustível começa a se esvaír, ela entra em colapso: a fusão nuclear não é mais suficiente para equilibrar a atração gravitacional e a densidade da estrela começa a aumentar consideravelmente de forma que a distorção do espaço-tempo é tão intensa que, a partir de determinado ponto, nada pode escapar, nem mesmo a luz. Os estágios logo após o processo que leva a formação da singularidade, anteriores ao estágio de buraco negro estabilizado, como descrito pela solução de Schwarzschild, não são, necessariamente, esféricos.

Schwarzschild apresentou seu trabalho em 1916 com a agora famosa solução no vácuo, já em coordenadas esféricas, seguindo a estrutura

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (2.23)$$

onde $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$ representa o elemento de ângulo sólido e $r_S = 2GM/c^2$ é o termo que conhecemos como o *raio de Schwarzschild*. Repare que se $r = 0$, o primeiro termo acima não tem existência matemática e se $r = r_S$, o denominador do segundo termo acima se iguala a zero e a métrica se torna novamente singular. As singularidades que aparecem na solução (2.23) são motivo para interesse na época e são o início do estudo de buracos negros como entendemos hoje. A singularidade em r_S é de especial interesse pois ela foi identificada como uma singularidade de coordenada pelo próprio Schwarzschild, ou seja, ao se realizar uma transformação de coordenadas apropriada, esta singularidade deixa de existir e a única singularidade física é $r = 0$. O tratamento deste assunto com o objetivo de remover as singularidades de coordenadas dá origem às conhecidas coordenadas de Kruskal-Szekeres apresentadas em 1960 por Martin Kruskal e György Szekeres [20, 21]. Esta singularidade de coordenada se torna ainda mais interessante quando a relacionamos [18] com a hipótese de Michell apresentada no começo da discussão: se escrevermos r_S em termos de comparação de massas como

$$r_S = \frac{2GM}{c^2} \approx 3 \left(\frac{M}{M_\odot} \right) \text{ km}$$

com $M_\odot \approx 2 \times 10^{30} \text{ kg}$ sendo a massa do Sol, e se partirmos da premissa de Michell, no intuito de verificar que esta estrela negra tem 500 vezes o raio do Sol e que podemos calcular o volume do Sol como calculamos o volume de uma esfera, podemos calcular a massa desta tal estrela negra usando $M = \rho V$, onde ρ representa densidade e V volume, e obter $M \approx 1,25 \times 10^8 M_\odot$. Se substituirmos este valor na expressão acima para calcular o raio, obtemos $3,75 \times 10^8 \text{ km}$ que é aproximadamente 500 vezes o raio do Sol $6,96 \times 10^5 \text{ km}$. Ou seja, o raio de Schwarzschild está realmente relacionado à fronteira de não-retorno do buraco negro como já concebia Michell e é o que conhecemos hoje como *horizonte de eventos* do buraco negro.

Uma observação um pouco mais detalhada da solução (2.23), nos diz que a massa M funciona como um parâmetro que é interpretada como a massa convencional newtoniana e se $M \rightarrow 0$, o espaço-tempo de Minkowski é recuperado o que também pode ser verificado fazendo-se $r \rightarrow \infty$, ou seja, o espaço-tempo de Schwarzschild é assintoticamente plano.

2.1.3 Termodinâmica de buracos negros

O desenvolvimento teórico sobre a termodinâmica de buracos negros remonta à década de 1970 com o estudo da radiação Hawking (seção 2.2.1) que elucida a visão de buracos negros como um sistema termodinâmico. Nestes termos, é possível propor a forma das leis da termodinâmica para tais sistemas. Partindo do interesse em verificar tais leis, Bekenstein [22] postula que a entropia de um buraco negro é proporcional a sua área e tem informações sobre o seu interior. Ele propôs a segunda lei da termodinâmica generalizada, a qual explica que a soma entre a entropia do buraco negro e a entropia do exterior nunca diminuem. Posteriormente, com o desenvolvimento formal da teoria, como a demonstração do teorema da área e teoremas acerca da gravidade superficial, a analogia entre a termodinâmica clássica e a mecânica de buracos negros é consolidada de forma que apresentamos [23]

- **Lei zero:** assim como na termodinâmica clássica, a lei zero associada à mecânica de buracos negros trata de equilíbrio. Sabemos que se dois sistemas estão, cada um, em equilíbrio térmico com um terceiro, então estes estão em equilíbrio térmico entre si. Se temos um único sistema, então a temperatura deve ser uniforme no mesmo. Para buracos negros temos que

A gravidade superficial de um buraco negro estacionário é constante sobre o seu horizonte de eventos.

- **Primeira lei:** a primeira lei pode ser escrita em termos da área do horizonte de eventos A , momento angular L e carga Q em paralelo à forma como é escrita a primeira lei da termodinâmica clássica.

$$dM = \frac{\mathcal{K}}{8\pi} dA + \Omega dL + \Phi dQ \quad (2.24)$$

onde \mathcal{K} representa a gravidade superficial, Ω a velocidade angular e Φ o potencial elétrico na superfície do buraco negro. É possível identificar as correspondências

$$M \leftrightarrow U$$

$$\mathcal{K} \leftrightarrow T$$

$$A \leftrightarrow S$$

e os demais parâmetros representam o trabalho W associado ao sistema.

- **Segunda lei:** de acordo com a proposta de entropia generalizada de Bekenstein é possível enunciar a segunda lei como

A soma das mudanças de entropia do buraco negro e do exterior nunca decrescem.

$$dS + dS_{ext} \geq 0 \quad (2.25)$$

- **Terceira lei:** com base na terceira lei da termodinâmica, que para nossos propósitos pode ser entendida como a inacessibilidade do zero absoluto em um número finito de processos termodinâmicos, podemos escrever

É impossível reduzir a gravidade superficial de um buraco negro a zero em um número finito de operações.

Na próxima seção, daremos luz ao desenvolvimento da temperatura de um buraco negro que foi discutida há pouco. Seguiremos o procedimento baseado na interpretação de tunelamento no horizonte de eventos, visto que tal método, pode ser utilizado em qualquer sistema de coordenadas e aplicado a qualquer métrica que representa solução de buraco negro.

2.2 Tópicos em Teoria Quântica de Campos

2.2.1 Radiação Hawking como tunelamento

Entre os resultados de sua robusta pesquisa acerca de buracos negros, o físico inglês Stephen Hawking (1942-2018) publicou o trabalho *Particle creation by black holes* no qual estudou a quantização do campo escalar não massivo em meio ao colapso estelar esfericamente simétrico que dá origem a um buraco negro de Schwarzschild. Neste trabalho, Hawking investiga como o buraco negro, estabilizado, leva a criação de partículas bem como seu espectro de radiação (radiação Hawking) [5, 23]. Esta propriedade pode ser entendida como sendo proveniente das flutuações do vácuo¹ na vizinhança do horizonte de eventos de um buraco negro: suponha que uma par de partículas virtuais é criado na vizinhança do horizonte de eventos como está ilustrado na figura 2.1 [1], se antes da aniquilação um componente do par de partículas adentra o horizonte de eventos mas o outra não o faz, e conseqüentemente escapa para o infinito, esta partícula pode ser interpretada como radiação emitida pelo horizonte de eventos do buraco negro e detectada por um observador distante. Essa radiação caracteriza, então, o buraco negro como um sistema termodinâmico cuja temperatura é denominada temperatura Hawking.

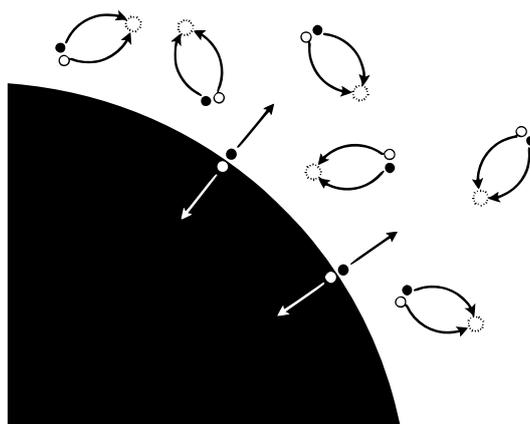


Figura 2.1: Ilustração do mecanismo que rege a radiação Hawking.

Podemos pontuar duas principais propostas de radiação Hawking como tunelamento: a interpretação da radiação Hawking como um processo de tunelamento proposta no ano de 2000 [24] utiliza a transformação de coordenadas de Painlevé (apresentada na seção 4.2.1) para que a singularidade de coordenada, no horizonte de eventos, desapareça e seja possível a análise de tunelamento através do horizonte com a interpretação da produção de pares acerca do mesmo; e a proposta realizada em 1999 [25], trata o processo de tunelamento com uma visão semiclássica baseada no método de análise complexa de integrais de caminho. A grande vantagem nas duas (equivalentes) abordagens é a possibilidade de calcular o espectro de emissão e temperatura de buracos negros de forma simples, sem a necessidade do uso dos coeficientes de Bogoliubov e

¹Este é o termo usado para designar as partículas criadas e aniquiladas a todo momento de forma tão rápida que não é possível detectá-las.

a análise de geodésicas nulas nos assintóticos de futuro e passado em diagramas de Penrose. A abordagem que será seguida aqui é conhecida na literatura como *Método de Hamilton-Jacobi* [26, 27, 28] que é consequência dos trabalhos de Srinivasan [25, 29] que abordam o método de integrais de caminho e pode ser estabelecida, de maneira genérica, nos seguintes passos:

1. Escrevemos a equação de Klein-Gordon para estudar a interação do campo escalar no espaço-tempo curvo resultante da singularidade (buraco negro);
2. Apresentamos uma solução para a equação obtida em termos da ação de trajetória, de forma que a nova equação obtida é uma equação de Hamilton-Jacobi;
3. Propõe-se uma separação de variáveis apropriada o que reduz o problema à quadratura. Usa-se, então, a teoria de resíduos e polos para solucionar a integral analiticamente;
4. O fator de emissão que é obtido como consequência dos passos anteriores é comparado ao fator de Boltzmann da distribuição térmica de partículas e, portanto, obtém-se a temperatura Hawking.

Vamos agora desenvolver o método de forma detalhada. Começamos escrevendo a equação de Klein-Gordon em espaços curvos² como

$$\begin{aligned} \square\Phi - \frac{m^2}{\hbar^2}\Phi &= 0 \\ \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\nu(\sqrt{-g}g^{\nu\lambda}\partial_\lambda)\Phi - \frac{m^2}{\hbar^2}\Phi &= 0, \end{aligned} \quad (2.26)$$

esta relação pode ser desenvolvida usando o fato de que [12]

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\beta\sqrt{-g} = \Gamma_{\kappa\beta}^\kappa, \quad (2.27)$$

onde lembramos que $\Gamma_{\alpha\beta}^\delta$ representa o símbolo de Christoffel de segunda espécie definido por

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\delta = \frac{1}{2}g^{\delta\lambda}(\partial_\alpha g_{\beta\lambda} + \partial_\beta g_{\lambda\alpha} - \partial_\lambda g_{\alpha\beta}).$$

Substituindo a relação (2.27) em (2.26), obtemos

²No contexto de teoria de campos, a equação de Klein-Gordon inicialmente proposta em espaço plano (espaço-tempo de Minkowski) por Oskar Klein e Walter Gordon representa a equação para um campo escalar massivo. Aqui utilizamos tal equação modificada para estudar o comportamento do campo escalar em espaço curvo. Para maiores detalhes, recomendamos a referência [30] para uma revisão didática no espaço plano e [31] para o estudo em espaços curvos.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\nu(\sqrt{-g}g^{\nu\lambda}\partial_\lambda)\Phi - \frac{m^2}{\hbar^2}\Phi &= 0 \\
\partial_\nu\left(g^{\lambda\nu}\frac{\partial\Phi}{\partial x^\lambda}\right) + \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\eta\sqrt{-g}\left(g^{\lambda\eta}\frac{\partial\Phi}{\partial x^\lambda}\right) - \frac{m^2}{\hbar^2}\Phi &= 0 \\
\partial_\nu\left(g^{\lambda\nu}\frac{\partial\Phi}{\partial x^\lambda}\right) + \Gamma_{\nu\eta}^\nu\left(g^{\lambda\eta}\frac{\partial\Phi}{\partial x^\lambda}\right) - \frac{m^2}{\hbar^2}\Phi &= 0
\end{aligned} \tag{2.28}$$

com a representação do conjunto de coordenadas dada por x^λ . Com efeito, reconhecemos os termos entre parênteses como componentes do gradiente do campo escalar, $\vec{\nabla}\Phi$, e podemos escrever

$$\partial_\nu(\nabla\Phi)^\nu + \Gamma_{\nu\eta}^\nu(\nabla\Phi)^\eta - \frac{m^2}{\hbar^2}\Phi = 0. \tag{2.29}$$

A equação (2.29), à parte o termo negativo contendo a massa do campo, pode ser vista como a aplicação da divergência sobre o gradiente do campo escalar. Então, de (2.27) segue que

$$g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\Phi - \frac{m^2}{\hbar^2}\Phi = 0 \tag{2.30}$$

Usando o fato de que para o campo escalar a derivada covariante se reduz a derivada parcial, $\nabla_\alpha\Phi \equiv \partial_\alpha\Phi$ [32], podemos escrever ainda

$$g^{\mu\nu}\nabla_\mu(\partial_\nu\Phi) - \frac{m^2}{\hbar^2}\Phi = 0, \tag{2.31}$$

utilizando o fato [12]

$$\nabla_\alpha(\nabla\Phi)_\delta = \partial_\alpha(\nabla\Phi)_\delta - \Gamma_{\alpha\delta}^\sigma(\nabla\Phi)_\sigma, \tag{2.32}$$

podemos escrever este resultado de forma mais explícita como

$$\begin{aligned}
g^{\mu\nu}\left[\partial_\mu(\partial\Phi)_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda(\partial\Phi)_\lambda\right] - \frac{m^2}{\hbar^2}\Phi &= 0 \\
g^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\Phi - g^{\mu\nu}\Gamma_{\mu\nu}^\lambda\partial_\lambda\Phi - \frac{m^2}{\hbar^2}\Phi &= 0.
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Em 1992, Bañados, Teitelboim e Zanelli propuseram um modelo de buraco negro em (2+1) dimensões, duas espaciais e a dimensão temporal (como um disco) [6]. Em nosso problema, vamos investigar o caso de um buraco negro BTZ projetado ao longo do eixo z configurando algo como um “buraco negro cilíndrico” ou uma “corda negra”. Este objeto possui uma simetria cilíndrica que corresponde ao elemento de linha dado por:

$$ds^2 = -g_{tt}(r)dt^2 + g_{rr}(r)dr^2 + g_{\phi\phi}(r)d\phi^2 + g_{zz}(r)dz^2 \tag{2.34}$$

em que $g_{tt} = -[g_{rr}]^{-1}$ [6] e r representa a coordenada polar das coordenadas cilíndricas. Para solucionar a equação (2.33) tentamos uma solução na forma da aproximação WKB. Essa proposta se justifica porque no horizonte de eventos o número de onda radial tende ao infinito, o que significa um grande desvio para o azul (blueshift) [24]. Por isso é apropriada uma solução a qual representa baixo comprimento de onda, que pode ser escrita na forma:

$$\Phi(t, r, \phi, z) = \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S(t, r, \phi, z) \right\}. \quad (2.35)$$

onde S representa a ação de trajetória associada ao tunelamento de uma partícula. Considere que, para nossos propósitos, vamos utilizar coordenadas cilíndricas em nossa análise uma vez que pretendemos estudar o buraco negro cilíndrico (corda negra) e este é o motivo pelo qual propomos uma solução neste sistema de coordenadas. Convém destacar que o uso de um elemento de linha em coordenadas cilíndricas não causa nenhuma perda de generalidade ao método, uma vez que este é aplicável em qualquer sistema de coordenadas utilizado. Usando (2.34) e (2.35) em (2.33), obtemos

$$\begin{aligned} & g^{tt} \partial_t (\partial_t \Phi) + g^{rr} \partial_r (\partial_r \Phi) + g^{\phi\phi} \partial_\phi (\partial_\phi \Phi) + g^{zz} \partial_z (\partial_z \Phi) - g^{tt} \Gamma_{tt}^t \partial_t \Phi \\ & - g^{rr} \Gamma_{rr}^r \partial_r \Phi - g^{\phi\phi} \Gamma_{\phi\phi}^\phi \partial_\phi \Phi - g^{zz} \Gamma_{zz}^z \partial_z \Phi - \frac{m^2}{\hbar^2} \Phi = 0 \end{aligned} \quad (2.36)$$

desenvolvendo

$$\begin{aligned} & g^{tt} \partial_t \left(\frac{i}{\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} S} \partial_t S \right) + g^{rr} \partial_r \left(\frac{i}{\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} S} \partial_r S \right) + g^{\phi\phi} \partial_\phi \left(\frac{i}{\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} S} \partial_\phi S \right) \\ & + g^{zz} \partial_z \left(\frac{i}{\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} S} \partial_z S \right) - g^{tt} \Gamma_{tt}^t \left(\frac{i}{\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} S} \partial_t S \right) - g^{rr} \Gamma_{rr}^r \left(\frac{i}{\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} S} \partial_r S \right) \\ & - g^{\phi\phi} \Gamma_{\phi\phi}^\phi \left(\frac{i}{\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} S} \partial_\phi S \right) - g^{zz} \Gamma_{zz}^z \left(\frac{i}{\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} S} \partial_z S \right) - \frac{m^2}{\hbar^2} e^{\frac{i}{\hbar} S} = 0, \end{aligned} \quad (2.37)$$

que leva a

$$\begin{aligned} & g^{tt} \left(-\frac{1}{\hbar^2} e^{\frac{i}{\hbar} S} \partial_t S \partial_t S + \frac{i}{\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} S} \partial_t^2 S \right) + g^{rr} \left(-\frac{1}{\hbar^2} e^{\frac{i}{\hbar} S} \partial_r S \partial_r S + \frac{i}{\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} S} \partial_r^2 S \right) \\ & + g^{\phi\phi} \left(-\frac{1}{\hbar^2} e^{\frac{i}{\hbar} S} \partial_\phi S \partial_\phi S + \frac{i}{\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} S} \partial_\phi^2 S \right) + g^{zz} \left(-\frac{1}{\hbar^2} e^{\frac{i}{\hbar} S} \partial_z S \partial_z S + \frac{i}{\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} S} \partial_z^2 S \right) \\ & - g^{tt} \Gamma_{tt}^t \left(\frac{i}{\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} S} \partial_t S \right) - g^{rr} \Gamma_{rr}^r \left(\frac{i}{\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} S} \partial_r S \right) - g^{\phi\phi} \Gamma_{\phi\phi}^\phi \left(\frac{i}{\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} S} \partial_\phi S \right) \\ & - g^{zz} \Gamma_{zz}^z \left(\frac{i}{\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} S} \partial_z S \right) - \frac{m^2}{\hbar^2} e^{\frac{i}{\hbar} S} = 0. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Agora multiplicamos a equação acima por $-\frac{\hbar^2}{e^{\frac{i}{\hbar} S}}$ para obter

$$\begin{aligned}
& g^{tt}(\partial_t S)^2 + g^{rr}(\partial_r S)^2 + g^{\phi\phi}(\partial_\phi S)^2 + g^{zz}(\partial_z S)^2 + m^2 \\
& - \left(\frac{\hbar}{i}\right) \left[\partial_t^2 S + \partial_r^2 S + \partial_\phi^2 S + \partial_z^2 S + g^{tt}\Gamma_{tt}^t \partial_t S + g^{rr}\Gamma_{rr}^r \partial_r S \right. \\
& \left. + g^{\phi\phi}\Gamma_{\phi\phi}^\phi \partial_\phi S + g^{zz}\Gamma_{zz}^z \partial_z S \right] = 0.
\end{aligned} \tag{2.39}$$

Dada a relação entre a ação de trajetória e a constante de Planck em (2.35), podemos fazer uma expansão da ação de trajetória em potências de \hbar como abaixo

$$S(t, r, \phi, z) = S_0(t, r, \phi, z) + \hbar S_1(t, r, \phi, z) + \hbar^2 S_2(t, r, \phi, z) + \dots \tag{2.40}$$

a substituição desta expansão na equação diferencial anterior, desprezando os termos da ordem de \hbar e superior³, nos leva a encontrar a seguinte equação relativística de Hamilton-Jacobi

$$g^{tt}(\partial_t S_0)^2 + g^{rr}(\partial_r S_0)^2 + g^{\phi\phi}(\partial_\phi S_0)^2 + g^{zz}(\partial_z S_0)^2 + m^2 = 0, \tag{2.41}$$

que será resolvida a partir da seguinte proposta de separação de variáveis

$$S_0(t, r, \phi, z) = -Et + W(r) + J_\phi \phi + J_z z + C \tag{2.42}$$

na qual E é uma constante associada à energia, J_ϕ e J_z são constantes associadas às componentes de momento angular nas direções ϕ e z respectivamente, C é uma constante que pode ser complexa e, $W(r)$ é uma função da coordenada radial r a ser determinada. A equação diferencial anterior assume, então, a forma

$$\partial_r W(r) = \pm \frac{1}{\sqrt{g^{rr}}} \sqrt{-E^2 g^{tt} - J_\phi^2 g^{\phi\phi} - J_z^2 g^{zz} - m^2} \tag{2.43}$$

da qual podemos determinar

$$W_\pm(r) = \pm \int dr \left\{ \frac{1}{\sqrt{g^{rr}}} \sqrt{-E^2 g^{tt} - J_\phi^2 g^{\phi\phi} - J_z^2 g^{zz} - m^2} \right\}. \tag{2.44}$$

Pretendemos agora usar o fato de que os elementos de linha de soluções do tipo buraco negro obedecem a configuração $g_{tt} = -g_{rr}^{-1}$ e reescrever esta integral da seguinte forma

$$W_\pm(r) = \pm \int dr \left\{ \frac{1}{g^{rr}} \sqrt{E^2 - g^{rr} \left[J_\phi^2 g^{\phi\phi} + J_z^2 g^{zz} + m^2 \right]} \right\} \tag{2.45}$$

A partir deste ponto, precisamos discutir o problema sob a ótica da teoria de resíduos e polos. Consideramos que a integral (2.45) pode ser calculada no plano complexo da seguinte forma: definimos a função $f(x)$ que se identifica com o integrando em (2.45) por continuação analítica

³O *ansatz* (2.35) leva em consideração a aproximação para baixos comprimentos de onda. Esta aproximação está relacionada à interpretação semiclássica de que S é a função principal de Hamilton desde que \hbar possa ser considerado como uma quantidade pequena possibilitando assim utilizar os termos de ordem zero da expansão [25].

e tem um polo simples localizado em $x = x_0$ o qual identifica-se com a localização do horizonte de eventos r_+ . Se esta função pode ser escrita na forma $f(x) = \frac{\chi(x)}{\psi(x)}$ é válido escrever que a soma dos resíduos de tal função é dado por [33]

$$\sum \text{res} \{f(x_0)\} = \frac{1}{2\pi i} \oint f(x) dx = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\chi(x)}{\psi(x)} dr = \frac{\chi(x_0)}{\psi'(x_0)} \quad (2.46)$$

onde $\chi(x_0) \neq 0$ e $\psi(x_0) = 0$ e o símbolo $[']$ representa diferenciação com respeito a x . Para este caso, podemos identificar as funções destacadas como

$$\begin{aligned} \psi(x) &= g^{rr}(x) \\ \chi(x) &= \sqrt{E^2 - g^{rr}(x) \left[J_\phi^2 g^{\phi\phi}(x) + J_z^2 g^{zz}(x) + m^2 \right]} \end{aligned}$$

de forma que

$$\sum \text{res} \{f(x_0)\} = \frac{1}{\left(\frac{d}{dr} g^{rr} \right) \Big|_{x=x_0}} \sqrt{E^2 - g^{rr}(x_0) \left[J_\phi^2 g^{\phi\phi}(x_0) + J_z^2 g^{zz}(x_0) + m^2 \right]}. \quad (2.47)$$

Iniciamos agora o processo de integração no plano complexo. Uma vez conhecido o valor do somatório dos resíduos da função $f(x)$, resta calcular a integral por um contorno de integração que desvie do polo x_0 e avaliar como o desvio do polo afeta o valor final da integral. Escolhemos um contorno de integração fechado por um semicírculo infinito no semiplano superior com um desvio semicircular de raio infinitesimal δ em torno de x_0 , como ilustrado na figura 2.2. Ou seja, dado o caminho de integração que passa exatamente por x_0 , desviamos da singularidade por meio de um semicírculo infinitesimal. Faz-se importante comentar que a variável polar satisfaz $r \geq 0$ e que a continuação analítica na variável complexa x é considerada como um artifício matemático para calcular a integral.

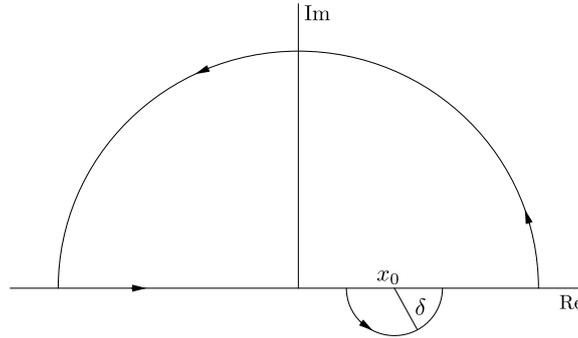


Figura 2.2: A figura representa o caminho de integração no plano complexo que está sobre o eixo real e é fechado por um semicírculo infinito. Ainda, é feito um desvio semicircular em torno do polo x_0 .

Por conseguinte, a integral sobre o caminho descrito pode ser expressa como

$$\begin{aligned} \oint f(x)dx &= \int_{-\infty}^{x_0-\delta} f(x)dx + \int_{\zeta} f(x)dx + \int_{x_0+\delta}^{\infty} f(x)dx + \int \text{semicírculo infinito} \\ &= 2\pi i \sum \text{res} \{f(x_0)\} \end{aligned} \quad (2.48)$$

onde ζ é o contorno sobre o polo x_0 . Aqui vemos que a integral sobre o semicírculo infinito é nula pelo Lema de Jordan [33]. Para calcular o valor da integral sobre ζ , notamos que pelo fato da função $f(x)$ ter um polo simples localizado em x_0 , a sua expansão de Laurent é dada por

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = \beta(x) + \frac{a_{-1}}{(x-x_0)} \quad (2.49)$$

onde a função $\beta(x)$ é analítica em torno de x_0 e representa a parte do somatório na qual $n \geq 0$ e o coeficiente a_{-1} é identificado como resíduo de $f(x)$. Assim, podemos escrever

$$\int_{\zeta} f(x)dx = \int_{\zeta} \beta(x)dx + \int_{\zeta} \frac{\sum \text{res} \{f(x_0)\}}{(x-x_0)} dx \quad (2.50)$$

O valor δ no plano complexo pode ser escrito como $\delta = |x-x_0|$ de tal sorte que $\pi \leq \arg(x-x_0) \leq 2\pi$ (vide figura 2.2). Se fazemos então a seguinte mudança de variáveis na segunda integral de (2.50):

$$\begin{cases} x-x_0 = \delta e^{i\varphi} \\ dx = i\delta e^{i\varphi} d\varphi \end{cases} \quad (2.51)$$

vamos obter

$$\int_{\zeta} f(x)dx = \int_{\zeta} \beta(x)dx + i \sum \text{res} \{f(x_0)\} \int_{\pi}^{2\pi} d\varphi = i\pi \sum \text{res} \{f(x_0)\} \quad (2.52)$$

Se substituirmos (2.52) em (2.48) vemos que o termo $2i\pi \sum \text{res} \{f(x_0)\}$ será subtraído pela quantidade $i\pi \sum \text{res} \{f(x_0)\}$. Finalmente, podemos escrever a integral de resídulos (2.45) que está associada à integral $W_{\pm}(r)$ como

$$\oint f(x)dx = i\pi \sum \text{res} \{f(x_0)\}, \quad (2.53)$$

e utilizando o resultado (2.47), encontramos

$$W_{\pm}(r) = \pm \frac{i\pi}{\left. \frac{d}{dr} g^{rr} \right|_{r=r_+}} \sqrt{E^2 - g^{rr}(r_+) \left[J_{\phi}^2 g^{\phi\phi}(r_+) + J_z^2 g^{zz}(r_+) + m^2 \right]}, \quad (2.54)$$

uma vez que o polo x_0 no plano complexo é a representação da localização do horizonte de eventos r_+ . Devido ao fato $g^{rr}(r_+) = 0$, a equação anterior torna-se

$$W_{\pm}(r) = \pm \frac{i\pi E}{\left. \frac{d}{dr} g^{rr} \right|_{r=r_+}}. \quad (2.55)$$

Uma vez determinada a função $W_{\pm}(r)$, podemos determinar as probabilidades de emissão e absorção pelo horizonte de eventos que são dadas por [25, 26, 27]

$$P_{\text{emissão}} \propto \exp \left\{ -\frac{2}{\hbar} \text{Im}(S) \right\} = \exp \left\{ -\frac{2}{\hbar} [\text{Im}(W_+) + \text{Im}(C)] \right\}, \quad (2.56)$$

$$P_{\text{absorção}} \propto \exp \left\{ -\frac{2}{\hbar} \text{Im}(S) \right\} = \exp \left\{ -\frac{2}{\hbar} [\text{Im}(W_-) + \text{Im}(C)] \right\}. \quad (2.57)$$

Como sabemos, uma vez que a partícula atravessa o horizonte de eventos, a probabilidade de adentrar na corda negra é de 100% [26]. Podemos usar este fato como uma condição de contorno para obter a constante C em (2.42) fazendo

$$\begin{aligned} 1 &= \exp \left\{ -\frac{2}{\hbar} [\text{Im}(W_-) + \text{Im}(C)] \right\} \\ \Rightarrow 0 &= \text{Im}(W_-) + \text{Im}(C) \\ \text{Im}(W_-) &= \text{Im}(C). \end{aligned} \quad (2.58)$$

De (2.55) vemos que

$$W_+ = -W_- \quad (2.59)$$

então usando a equação acima, (2.58) e (2.56) teremos [27, 26]

$$\Gamma_{\text{emissão}} = \exp \left\{ -\frac{4}{\hbar} \text{Im}(W_+) \right\}, \quad (2.60)$$

e utilizando (2.55) na equação acima, obtemos

$$\Gamma_{\text{emissão}} = \exp \left\{ -\frac{4\pi E}{\hbar \left. \frac{d}{dr} g^{rr} \right|_{r=x_0}} \right\}, \quad (2.61)$$

de forma que a temperatura Hawking é obtida ao comparar o fator de emissão obtido em (2.61) com o fator de Boltzmann da distribuição térmica $e^{-\frac{E}{k_B T}}$ como sendo, (fazendo $k_B = \hbar = 1$)

$$T_H = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{dg^{rr}}{dr} \right) \Big|_{r=r_+}. \quad (2.62)$$

A equação (2.62) representa a forma geral de calcular a temperatura Hawking dada a métrica da corda negra. Este resultado, proveniente da aplicação do método de Hamilton-Jacobi, é uma consequência direta dos trabalhos de cálculo por integrais de caminho e tunelamento no horizonte de eventos. É importante ressaltar que este método será utilizado ao longo de nosso trabalho com o objetivo de obter as propriedades termodinâmicas de buracos negros cilíndricos.

2.2.2 Efeito back reaction

Intuitivamente, o efeito back reaction pode ser compreendido como o fato de a gravidade poder agir sobre si mesma, ou mais especificamente, pelo fato do campo gravitacional influenciar a si mesmo o que torna as equações de Einstein não-lineares. Esta característica de não-linearidade das equações pode ser compreendida a partir de uma análise acerca dos diagramas de Feynmann para as interações gravitacionais, pois a partir dos diagramas entende-se que a interação gravitacional é realizada pela troca de um gráviton virtual (perturbação quantizada no campo da métrica) e uma vez que os próprios grávitons podem trocar grávitons virtuais, podem consequentemente exercer força gravitacional [12]. A consideração do efeito back reaction tem como objetivo fornecer melhor aproximação para a geometria do espaço-tempo em escala quântica, pois, como será discutido, este efeito é de origem quântica e estudar sua influência em um espaço-tempo demanda estudar tal espaço-tempo numa escala pequena o suficiente para que efeitos quânticos sejam importantes. O interesse em um estudo dessa natureza remonta o fato de não haver uma teoria consistente de gravidade quântica, ou seja, teoria de gravitação na escala em que efeitos quânticos influenciam o espaço-tempo. A próxima pergunta é como incorporar efeitos quânticos na teoria clássica da gravidade de Einstein, tal pergunta tem sido respondida pela abordagem semiclássica conhecida da literatura e que será seguida neste trabalho. A teoria semiclássica da gravidade acopla um campo de matéria quantizado ao campo gravitacional por meio das equações de Einstein semiclássicas [34, 35]

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi \langle T_{\mu\nu} \rangle^{(\text{ren})}, \quad (2.63)$$

o que aponta o fato de a geometria do espaço-tempo gerar um valor esperado do tensor de momento-energia não-nulo $\langle T_{\mu\nu} \rangle^{(\text{ren})}$ o qual, por sua vez atua como uma fonte de curvatura. Este é o problema de back reaction [36]. O esforço que é encontrado na literatura para resolver as equações de Einstein semiclássicas de forma autoconsistente num estado de vácuo $|0\rangle$ é uma forma de atacar este problema. O tensor de momento-energia com o qual lida-se é renormalizado, como pode ser visto pela relação anterior na qual escrevemos o sobrescrito “ren” no termo do tensor, devido às divergências que ocorrem no procedimento padrão uma vez que o mesmo é não-linear e o problema passa a ser um problema de renormalização. Em espaços-tempos planos, existe uma solução para tal problema que é conhecida como *ordenamento normal* haja vista que o procedimento de renormalização é como a renormalização da energia do estado de vácuo para zero. Entretanto, para espaços-tempos curvos, o problema é não-trivial uma vez que efeitos de polarização de vácuo podem tornar o estado de vácuo do tensor momento-energia não-nulo [35]. Outra forma de proceder e contornar tais problemas consiste em estudar o problema com base numa teoria de perturbação e estudar o efeito back reaction como uma perturbação na métrica da singularidade, uma vez que tal efeito é uma anomalia⁴ na métrica clássica e atua como uma perturbação na gravidade superficial [36, 37, 38]. Mantendo aqui a convenção de unidades $G = c = k_B = 1$ na qual o comprimento de Planck é igual à massa de Planck $l_P = M_P = \sqrt{\hbar}$, consideramos que o efeito back reaction na gravidade superficial é dado por

⁴Referimo-nos aqui à definição de anomalia relacionada ao fato de um efeito puramente quântico agir sobre um sistema clássico causando uma quebra de simetria.

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_0(r_+) + \xi \mathcal{K}_0(r_+), \quad (2.64)$$

onde \mathcal{K}_0 é a gravidade superficial clássica no horizonte de eventos r_+ e ξ é uma constante adimensional com magnitude da ordem de \hbar com a estrutura [37]

$$\xi = \beta \frac{M_P^2}{M^2} \quad (2.65)$$

onde β é um fator numérico. Esta proposta é baseada na escala de massa (ou comprimento) relevante para o problema que é a massa do buraco negro (em nosso caso, a corda negra) M comparada à massa de Planck M_P , dada pela equação (2.65) na qual assumimos que termos da ordem de ξ^2 são desprezíveis quando comparados aos termos da ordem ξ . Vamos ter, então, que

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &= \mathcal{K}_0(r_+) \left(1 + \beta \frac{M_P^2}{M^2(r_+)} \right) \\ &= \mathcal{K}_0(r_+) \left(1 + \frac{\sigma}{M^2(r_+)} \right) \end{aligned} \quad (2.66)$$

com $\sigma = \beta M_P^2$. A interpretação do efeito back reaction como perturbação na gravidade superficial é útil para o cálculo da temperatura Hawking devido à conhecida relação entre estas duas grandezas dada por $T_H = \frac{\mathcal{K}}{2\pi}$, da qual poderemos apreciar as grandezas termodinâmicas uma vez conhecida a temperatura. Uma derivação desta relação pode ser encontrada na seção 4.2.1. É importante entender que a consideração do efeito back reaction feita aqui é em *nível de árvore* ou *1-loop* [39]: isto significa que a consideração do efeito corresponde ao termo dominante e o primeiro termo subsequente da série perturbativa como pode ser visto ao inspecionar-se a equação (2.64), ou seja, nossa consideração corresponde às contribuições semiclássicas interpretadas como efeitos de anomalia conforme, em contrapartida à abordagem de renormalização do tensor momento-energia.

O próximo passo da consideração do efeito back reaction é estudar as propriedades termodinâmicas da corda negra na presença de tal efeito e comparar tais resultados com os resultados sem a consideração do efeito. Isto é realizado nas seções 4.2.2 e 4.2.3.

Não-comutatividade do Espaço-tempo

Uma coisa é certa, quanto mais profundamente confuso você fica em sua vida, mais aberta sua mente se torna para novas ideias

—NEIL DEGRASSE TYSON

Neste capítulo apresentamos a não-comutatividade de um ponto de vista físico, ou seja, de uma maneira que seja possível a interpretação fenomenológica dos efeitos não-comutativos. Iniciamos com a apresentação dos princípios fundamentais e o contexto para o pontapé inicial do estudo da não-comutatividade do espaço-tempo nas ciências físicas. Posteriormente, trataremos mais especificamente de como compreende-se a matéria em tal espaço-tempo o que consequentemente leva a escrita da métrica do espaço-tempo não-comutativo da corda negra no próximo capítulo. Por fim, fazemos alguns apontamentos sobre a teoria quântica de campos no espaço-tempo não-comutativo nos concentrando em fenomenologia e previsões.

3.1 Aspectos fundamentais

O surgimento do estudo da não-comutatividade do espaço-tempo em ciências físicas remonta ao advento da mecânica quântica e teoria quântica de campos. O tema ganha espaço a partir do trabalho de Snyder em 1947 [40]. Com evidente interesse numa robusta descrição do problema de interação entre matéria e campos, ele foi o primeiro autor a dedicar um artigo com o objetivo de discutir as, então, novas propriedades do espaço-tempo não-comutativo, que por ele foi chamado de *espaço-tempo quantizado* devido ao fato de, ao assumir-se a não-comutatividade do espaço-tempo, entendermos que este não é mais uma entidade contínua. As motivações para tal desenvolvimento podem ser entendidas seguindo a conjectura que aponta que o espaço-tempo ordinário perde o significado quando as distâncias consideradas são muito pequenas [41, 42]: suponha que uma coordenada pode ser medida com precisão a no espaço-tempo, isto leva a uma incerteza no momento da ordem de $\frac{1}{a}$. Com efeito, este processo de medição demanda uma energia a ser transmitida ao sistema da ordem de $\frac{1}{a}$ (dada a relação linear entre energia e momento prevista pela teoria da relatividade especial) em dada região. O tensor de momento-energia do sistema gera um campo gravitacional [considerando-se as equações de Einstein (2.19)] e quanto menor for a incerteza na medição da coordenada, maior será a intensidade do campo gravitacional, de forma que ao tomar o limite em que a tende a zero, o campo gravitacional se torna muito intenso e provoca a formação de um horizonte de eventos,

que não possibilita a detecção da partícula (pois nenhum sinal poderia ser emitido para fora do horizonte de eventos) impedindo o próprio processo de medição. Uma proposta para solucionar tal problema é propor que as coordenadas do espaço-tempo são operadores hermitianos que não comutam entre si $x^\mu \rightarrow \hat{x}^\mu$ obedecendo

$$[x^\mu, x^\nu] = i\theta^{\mu\nu} \quad (3.1)$$

onde $\mu, \nu = 0, 1, \dots, D-1$ e $\theta^{\mu\nu}$ é uma matriz real antissimétrica $D \times D$ com D a dimensão do espaço-tempo. Esta relação representa, o que é chamado por Snyder, a quantização do espaço-tempo, uma vez que se escrevemos o princípio da incerteza generalizado

$$(\Delta x^\mu)^2 (\Delta x^\nu)^2 \geq \left(\frac{1}{2i} [\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] \right)^2 \quad (3.2)$$

encontramos

$$\Delta x^\mu \Delta x^\nu \geq \frac{1}{2} |\theta^{\mu\nu}|. \quad (3.3)$$

O resultado (3.3) traduz a existência de um comprimento mínimo característico do espaço-tempo dado por $\sqrt{|\theta|}$, com a consideração de que o parâmetro de não-comutatividade é uniforme em todas as direções e tem magnitude $|\theta^{\mu\nu}| = \theta$, a partir do qual podem ser feitas medições (e distâncias abaixo desse valor não são previstas), o que conseqüentemente dá luz ao fato de a noção de ponto não fazer mais sentido: se uma coordenada, digamos x^μ , é bem conhecida (a incerteza associada à medição da mesma é baixa), então, pela relação (3.3) a incerteza associada à coordenada x^ν é muito grande de forma a satisfazer tal relação. Este fato implica na impossibilidade de existência de ponto no espaço-tempo, haja vista que para que seja definido um ponto é necessário o conhecimento preciso de, pelo menos, duas coordenadas que formam o par ordenado e fornecem a localização de tal ponto. Com base nessas características, von Neumann foi o primeiro a descrever de maneira formal um “espaço quantizado”, estudo chamado por ele de “geometria sem ponto”, devido ao fato de a noção de ponto ser abandonada. Isto levou à teoria de álgebras de von Neumann e resultou no nascimento da *geometria não-comutativa* que se refere ao estudo de espaços topológicos nos quais C^* -álgebras comutativas de funções são substituídas por álgebras não-comutativas [43].

De acordo com a discussão precedente, podemos comentar a interpretação do espaço-tempo não-comutativo a partir da analogia entre tal espaço-tempo e o espaço-tempo da mecânica quântica. Como é sabido, em mecânica quântica o espaço-tempo é regido pela álgebra de operadores hermitianos, que representam observáveis, e guiado pelo princípio da incerteza que resulta na relação de não-comutação $[x^\mu, p^\mu] = i\hbar$ onde p^μ representa o momento linear associado ao sistema. No espaço-tempo não-comutativo, temos o princípio da incerteza generalizado que resulta na relação de não-comutação $[x^\mu, x^\nu] = i\theta^{\mu\nu}$, ainda, por comparação direta, o parâmetro θ tem um papel para o espaço-tempo não-comutativo análogo ao papel exercido por \hbar no espaço-tempo da mecânica quântica. Interpretamos que o espaço-tempo não-comutativo é, conceitualmente, o análogo geométrico do espaço-tempo da mecânica quântica e, portanto, há oportunidade para uma interpretação de que este seja o espaço-tempo apropriado para a descrição de uma *gravidade quântica* no sentido de descrever o espaço-tempo numa escala na qual

os efeitos quânticos prevalecem dada pelo comprimento de Planck e que θ determina a célula fundamental de discretização, chamada de célula de Planck, assim como \hbar discretiza o espaço de fase clássico.

Também se faz importante neste momento um comentário com respeito a não violação das simetrias de Lorentz baseadas em transformações do sistema de referência do observador [44]. Pelo fato de $\theta^{\mu\nu}$ transformar-se de maneira covariante, uma transformação de Lorentz realizada (rotações ou boosts) sobre o sistema de referência do observador mantém a física inalterada. Todavia, transformações de Lorentz de partícula¹, ou de uma configuração de campo, com um sistema de referência de observador fixo deixam $\theta^{\mu\nu}$ inalterado, mas alteram completamente a física do problema. Assim, o uso de $\theta^{\mu\nu}$ gera direcionamento quadridimensional em qualquer sistema de referência inercial fixo. Esta discussão fortalece a ideia de uma teoria de campos no espaço-tempo não-comutativo como uma extensão de violação da simetria de partícula de Lorentz do modelo padrão, envolvendo campos ordinários [44], uma vez que devido à hipótese de a magnitude θ do elemento $\theta^{\mu\nu}$ ser independente da posição no espaço-tempo, a condição de que o coeficiente para a violação da simetria de Lorentz de partícula ser constante é satisfeita. Nestes termos, energia e momento seriam grandezas conservadas numa teoria de campos não-comutativa.

3.2 A matéria no espaço-tempo não-comutativo

Devido às características do espaço em curta escala, que a partir do princípio da incerteza generalizado leva a relação de incerteza posição posição, a noção de “massa pontual” não faz mais sentido. Enquanto que no espaço (em grande escala) comutativo a densidade de massa de uma partícula pode ser escrita pelo produto entre sua massa e a função delta centrada no ponto de sua localização, em curta escala essa descrição perde o sentido e se faz necessária a descrição baseada em uma distribuição para a densidade de massa. Entendemos agora que a massa está distribuída numa distribuição gaussiana com largura mínima $\sqrt{\theta}$ e podemos expressar a densidade de massa ρ_θ como [45]

$$\rho_\theta = \frac{M}{(4\pi\theta)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{r^2}{4\theta}}, \quad (3.4)$$

de tal sorte que a massa é determinada integrando a equação (3.4) sobre um volume de raio r

$$m_\theta(r) = \int_0^r 4\pi r'^2 \rho_\theta(r') dr' = \frac{4\pi M}{(4\pi\theta)^{\frac{3}{2}}} \int_0^r r'^2 e^{-\frac{r'^2}{4\theta}} dr'. \quad (3.5)$$

A fim de obter uma expressão fechada para a massa, vamos efetuar a integral utilizando a mudança de variável

¹ A quebra de simetria, devida à presença de campos vetoriais e tensoriais de fundo, ocorre somente quando consideramos uma transformação de referencial ativa de Lorentz. Por isso, se faz necessária a distinção: a transformação de Lorentz de observador - indica transformação passiva em presença de um campo de fundo; transformação de Lorentz de partícula - indica a transformação ativa, na partícula, em presença de um campo de fundo.

$$\begin{cases} u = \frac{r'^2}{4\theta} & \Rightarrow & r' = (4\theta)^{1/2}u^{1/2} \\ du = \frac{r'}{2\theta}dr' \end{cases} \quad (3.6)$$

e, portanto, reescrevemos a integral anterior como

$$\begin{aligned} m_\theta(r) &= \frac{4\pi M}{(4\pi)^{\frac{3}{2}}\theta^{\frac{3}{2}}} \int_0^{\frac{r^2}{4\theta}} (4\theta)ue^{-u} \frac{2\theta}{(4\theta)^{\frac{1}{2}}u^{\frac{1}{2}}} du \\ &= \frac{4\pi M}{8\pi^{\frac{3}{2}}} \frac{8}{2} \int_0^{\frac{r^2}{4\theta}} u^{\frac{3}{2}-1} e^{-u} du. \end{aligned} \quad (3.7)$$

A última integral é reconhecida do apêndice A como a integral que define a *função gama incompleta inferior* $\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\theta}\right)$. Logo, podemos escrever

$$m_\theta(r) = \frac{2M}{\sqrt{\pi}} \gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\theta}\right), \quad (3.8)$$

e como é discutido na seção A.2, tomar o limite $\frac{r}{\sqrt{\theta}} \rightarrow \infty$ significa considerar distâncias muito maiores que a escala $\sqrt{\theta}$. Assim, ao livrar o sistema dos efeitos da não-comutatividade, a função $\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\theta}\right)$ torna-se a função $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ de forma que $m_\theta \rightarrow M$ e recuperamos as características do espaço-tempo comutativo.

Estas considerações contemplam o fato de que, diferentemente do que se poderia pensar num primeiro momento, para incorporar os efeitos oriundos da não-comutatividade do espaço-tempo não é necessário efetuar nenhuma modificação na ação de Einstein-Hilbert quadridimensional, mas apenas ressaltar a interpretação de que a massa está difundida em determinada região de tamanho $\sqrt{\theta}$. De fato, a não-comutatividade é uma propriedade intrínseca da variedade e não uma condição de estrutura geométrica imposta pela teoria, o que significa que a gravidade é afetada por ela de forma indireta uma vez que a mudança das equações de campo de Einstein reside no tensor momento-energia modificado para incluir os efeitos não-comutativos [8]. Ou seja, o termo geométrico das equações de campo dado pelo tensor de Einstein permanece inalterado e toda a mudança da característica do espaço-tempo é trazida pelo termo fonte de curvatura dado pelo tensor momento-energia modificado. Repare que, tratando-se deste tensor, a densidade (3.4) representa a componente temporal do mesmo

$$T_{\theta 0}^0 = -\rho_\theta(r), \quad (3.9)$$

onde o subscrito θ indica que estamos lidando com não-comutatividade. A determinação deste objeto como um todo é baseada na conservação covariante $T_{\theta;\nu}^{\mu\nu} = 0$ e na condição suficiente de soluções do tipo buraco negro $g_{tt} = -g_{rr}^{-1}$ (também apresentada na seção 2.2.1) de forma que teremos [45]

$$T_{\theta\mu}^{\nu} = \begin{pmatrix} -\rho_{\theta} & & & \\ & p_r & & \\ & & p_{\perp} & \\ & & & p_{\perp} \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

com pressão radial $p_r = -\rho_{\theta}$ e pressão tangencial $p_{\perp} = -\rho_{\theta}(r) - \frac{r}{2}\partial_r\rho_{\theta}(r)$. A expressão (3.10) ressalta que tal tensor difere do tensor de momento-energia convencional uma vez que representa um fluido perfeito com termos de pressão *anisotrópicos* em face à forma padrão a qual representa um fluido perfeito isotrópico. De início, vale ressaltar que esta anisotropia é um atributo, como esperado, que se manifesta em curta escala de forma que para grandes distâncias a característica isotrópica é recuperada (isto pode ser verificado de maneira direta inspecionando as componentes do tensor no limite $r \gg \sqrt{\theta}$). Ainda, esta propriedade tem uma interpretação física interessante pois uma pressão radial não-nula é necessária para equilibrar a força gravitacional na direção interna e assim prevenir a formação de um ponto de matéria, de forma a originar a premissa de haver um comprimento mínimo do espaço-tempo.

3.3 Teoria quântica de campos em espaço-tempo não-comutativo

Nosso objetivo nesta seção é apresentar uma breve discussão introdutória fundamentada na literatura [46, 43, 42, 47, 41, 48] acerca dos avanços numa teoria de campos baseada na não-comutatividade do espaço-tempo. Pretendemos apresentar primeiramente um apanhado geral sobre tal teoria de forma a apresentar e discutir parte de nosso referencial teórico e seguir para uma breve discussão acerca de previsões e fenomenologia conhecidas.

Fundamentos

A construção operacional de uma teoria de campos não-comutativa remonta ao artefato conhecido como *símbolo de Weyl* que se originou nos trabalhos de Hermann Weyl [42, 49] nos quais ele disserta sobre a relação de correspondência entre as variáveis clássicas do espaço euclidiano D -dimensional e operadores definidos no espaço euclidiano não-comutativo, que traz à tona os mapas de Weyl-Wigner. Isto leva a modificação da operação de produto entre campos dando origem a uma nova operação de produto que ficou conhecida como *produto Groenewold-Moyal* o qual guarda propriedades de associatividade, mas não de comutatividade. Seguindo o procedimento para obtenção do operador de Weyl encontrado na referência [50], levando em conta apenas o desenvolvimento geométrico de forma que o tempo não é apreciado, consideramos o espaço euclidiano com funções f que podem ser expressas por transformadas de Fourier da seguinte forma

$$\tilde{f}(k) = \int d^D z e^{-ik_l z^l} f(z), \quad (3.11)$$

com $l = 1, 2, 3, \dots, D$. Promovendo as coordenadas z^l a operadores hermitianos \hat{z}^l que obedecem

$$[\hat{z}^l, \hat{z}^j] = i\theta^{lj} \quad (3.12)$$

de forma que é gerada uma álgebra não-comutativa. Assim, podemos apresentar o operador de Weyl por meio de

$$\hat{\mathcal{W}}[f] = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \tilde{f}(k) e^{ik_l \hat{z}^l} \quad (3.13)$$

o qual pode ser expresso em termos de um operador hermitiano $\hat{\Delta}(z)$ definido como

$$\hat{\Delta}(z) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} e^{(ik_l \hat{z}^l - ik_l z^l)} \quad (3.14)$$

de forma que o operador de Weyl (3.13) é reescrito como

$$\hat{\mathcal{W}}[f] = \int d^D z f(z) \hat{\Delta}(z) \quad (3.15)$$

e este resultado fornece o mapeamento entre os campos e os operadores que foi comentado anteriormente. Ainda, se calculamos o produto de dois operados no espaço não-comutativo

$$\hat{\mathcal{W}}[f] \hat{\mathcal{W}}[g] = \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} \frac{d^D k_2}{(2\pi)^D} \tilde{f}(k_1) \tilde{g}(k_2) e^{ik_{1,l} \hat{z}^l} e^{ik_{2,l} \hat{z}^l} \quad (3.16)$$

e aplicamos a fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff²,

$$e^A \cdot e^B = e^{-\frac{1}{2}[A,B]} \cdot e^{A+B}$$

que para o nosso caso, usando a premissa (3.12), escreve-se

$$e^{ik_{1,l} \hat{z}^l} e^{ik_{2,l} \hat{z}^l} = e^{-\frac{i}{2} k_{1,l} \theta^{lj} k_{2,j}} e^{i(k_{1,j} + k_{2,j}) \hat{z}^j} \quad (3.17)$$

assim podemos expressar tal produto nos seguintes termos

$$\hat{\mathcal{W}}[f] \hat{\mathcal{W}}[g] = \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} \frac{d^D k_2}{(2\pi)^D} \tilde{f}(k_1) \tilde{g}(k_2) e^{-\frac{i}{2} k_{1,l} \theta^{lj} k_{2,j}} e^{i(k_{1,j} + k_{2,j}) \hat{z}^j} \quad (3.18)$$

donde define-se o produto Groenewold-Moyal como

$$\hat{\mathcal{W}}[f(z)] \hat{\mathcal{W}}[g(z)] = \hat{\mathcal{W}}[f(z) \star g(z)], \quad (3.19)$$

com

$$f(z) \star g(z) = \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} \frac{d^D k_2}{(2\pi)^D} \tilde{f}(k_1) \tilde{g}(k_2) e^{-\frac{i}{2} k_{1,l} \theta^{lj} k_{2,j}} e^{i(k_{1,j} + k_{2,j}) \hat{z}^j}. \quad (3.20)$$

Nestes termos, podemos definir

$$f_w(z) = \text{Tr} \left(\hat{\mathcal{W}}[f(z)] \hat{\Delta}(z) \right), \quad (3.21)$$

²A aplicação desta fórmula é possível se os operadores A e B comutam com o comutador destes, ou seja, $[A, [A, B]] = 0 = [B, [A, B]]$. A partir da relação (3.12) vemos que esta condição é satisfeita para o nosso desenvolvimento.

onde a função $f_w(z)$ é denominada *função distribuição de Wigner* e, portanto, o mapa $\hat{\Delta}(z)$ representa a correspondência biunívoca entre os campos de Wigner e os operadores de Weyl. Geralmente, esta correspondência é chamada de *correspondência (mapa) de Weyl-Wigner*.

Uma definição equivalente para o produto estrela Groenewold-Moyal escrito em termos diferenciais é a seguinte, de acordo com as referências [51, 43]

$$\begin{aligned} f(z) \star g(z) &= f(z) \exp \left[\frac{i}{2} \overleftarrow{\partial}_l \theta^{lj} \overrightarrow{\partial}_j \right] g(z) \\ &= f(z)g(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{i}{2} \right)^n \frac{1}{n!} \theta^{l_1 j_1} \dots \theta^{l_n j_n} \partial_{l_1} \dots \partial_{l_n} f(z) \partial_{j_1} \dots \partial_{j_n} g(z) \\ &\approx f(z)g(z) + \frac{i}{2} \theta^{lj} \partial_l f(z) \partial_j g(z) + \mathcal{O}(\theta^2) \end{aligned} \quad (3.22)$$

que deixa claro o acréscimo de uma fase no produto de dois operadores como a correção da operação de produto convencional. Tal ocorrência é importante no estudo de mistura de divergências IR/UV [42].

Devido ao fato de termos desenvolvido os fundamentos operacionais da teoria de campos não-comutativa utilizando apenas coordenadas espaciais, cabe aqui a observação de que uma teoria de campos não-comutativa na qual os efeitos de não-comutatividade atuam apenas sobre coordenadas espaciais (portanto a coordenada temporal continua se comportando como uma coordenada comutativa) não alteram de maneira tão expressiva o formalismo da mecânica quântica, visto que, por exemplo, ainda podem ser despendidos esforços para o desenvolvimento da dinâmica de Heisenberg e Schroedinger convencionais [46]. Entretanto, como era de se esperar, a não-comutatividade modifica alguns aspectos da teoria, como, por exemplo, torná-la não-local no sentido de que o produto entre operadores é entendido como um produto entre distribuições e a relação ponto a ponto consequente de multiplicação convencional não é bem definida. Ao incluirmos a variável tempo como uma variável que também é influenciada pelos efeitos da não-comutatividade, as propriedades de unitariedade e causalidade podem ser modificadas, possibilitando um entendimento de tempo de uma forma não convencional. Este fato leva alguns autores a estabelecer a condição de que $\theta^{0j} = 0$, que não é uma condição necessária, principalmente se o propósito é o estudo de fenômenos de baixa energia [47], mas tem o intuito de evitar possíveis interpretações não convencionais acerca do tempo ou complicações sobre tais interpretações em meio a teoria. Seguindo este raciocínio, estamos considerando todas as variáveis espaço-temporais ao realizar nossos cálculos nos próximos capítulos (incluindo a variável tempo), entretanto, não vamos nos ater a possíveis discussões acerca de interpretações relacionadas à mudanças nas características da coordenada temporal, pois estamos interessados essencialmente nas consequências da premissa de as coordenadas espaciais não comutarem.

Previsões e fenomenologia

As implicações de um espaço-tempo não-comutativo na formulação de uma teoria quântica de campos são muito interessantes do ponto de vista físico e são amplamente abordadas na literatura [47, 43]. Com isso em mente, faremos algumas considerações sobre tais efeitos com base em estudos conhecidos de forma a apresentar parte de nosso referencial teórico.

Nível de Landau mais baixo

O problema envolvendo uma partícula carregada (elétron) num campo magnético externo é bastante conhecido e quem primeiro contemplou este problema do ponto de vista da dinâmica quântica foi o físico russo Lev Landau (1908-1968) em 1930. Ele foi o primeiro a obter o resultado de que as órbitas de ciclotron de partículas carregadas em campos magnéticos são quantizadas e mostrou que os níveis de energia associados, conhecidos como níveis de Landau, são discretos, espaçados por quantidade constante de energia e que são infinitamente degenerados.

Uma abordagem utilizada para desenvolver este problema e analisá-lo em termos do espaço não-comutativo é encontrada na referência [52] e vamos seguir esta prescrição. Consideramos uma partícula de massa m , de carga elétrica e submetida a um campo magnético externo B que nesta análise está na direção z perpendicular ao plano xy , de localização da partícula. Para tal configuração ser satisfeita, pode-se escolher o gauge $\vec{A} = (0, xB, 0)$ de tal sorte que $\vec{\nabla} \times \vec{A} = B\hat{z}$. Esta escolha é substituída na expressão do hamiltoniano para uma partícula sob um campo magnético

$$H = \frac{1}{2m} \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2. \quad (3.23)$$

Como o hamiltoniano comuta com as componentes do momento p_y e p_z , podemos escrever as equações de autovalor $p_z|\Psi\rangle = \hbar k_z|\Psi\rangle$ e $p_y|\Psi\rangle = \hbar k_y|\Psi\rangle$ sendo $|\Psi\rangle$ o autoestado do hamiltoniano completo. Isto resulta na seguinte expressão para a autoenergia do estado $|n, k\rangle$

$$E_n = \frac{\hbar e B}{mc} \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad (3.24)$$

donde vemos que a separação dos níveis (estados) de energia é proporcional à razão $\frac{B}{m}$ de forma que se o campo magnético é grande (em comparação com m), o único nível de energia relevante é o estado de mais baixa energia uma vez os níveis mais energéticos são altos demais (aumentam indefinidamente se consideramos $B \rightarrow \infty$). Por fim, acrescentando um termo de potencial $V(x, y)$ para representar de forma genérica quaisquer impurezas no plano, a lagrangiana escreve-se

$$L = \frac{e}{c} Bxy - V(x, y) \quad (3.25)$$

que tem a forma padrão $L = p\dot{q} - H(p, q)$ com $H(p, q)$ o hamiltoniano associado e \dot{q} a velocidade expressa em coordenadas generalizadas, o que nos permite reconhecer $\frac{e}{c}Bx$ e y como variáveis canonicamente conjugadas cuja relação de comutação é

$$\begin{aligned} \left[\frac{eB}{c}x, y \right] &= -i\hbar \\ \Rightarrow [x, y] &= -\frac{i\hbar c}{eB}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Este resultado também é obtido de forma mais robusta ainda por [52] onde é calculado o valor esperado do comutador entre as coordenadas

$$\langle 0, k | [x, y] | 0, k' \rangle = -\frac{i\hbar c}{eB} \langle 0, k | 0, k' \rangle \quad (3.27)$$

que é uma confirmação do que encontramos em (3.26). Este resultado nos mostra que o movimento dos elétrons no nível de Landau mais baixo é descrito num plano não-comutativo. Este resultado tem importância para a origem da geometria não-comutativa em teoria das cordas [47, 53].

Referenciais para experimentos

Devido à violação da simetria de partícula de Lorentz³, há uma direção particular preferencial no espaço associada a θ em dado sistema de referência⁴ e experimentos que dizem respeito à geometria não-comutativa podem medir as componentes de $\vec{\theta}$. Encontra-se experimentos deste tipo atualmente na literatura, em particular, no trabalho de [54], é mostrado uma variação temporal no parâmetro θ , levando-se em conta o movimento do referencial do laboratório devido à rotação da Terra, e utiliza-se a formulação proposta para analisar experimentos de eletrodinâmica quântica para medir valores médios temporais de observáveis e assim calcular componentes de $\vec{\theta}$.

Transições atômicas e estimativas de θ

Entre os estudos de mecânica quântica em espaço-tempo não-comutativo, a aplicação desta para o cálculo do desvio Lamb⁵ do átomo de hidrogênio é significativa pois é capaz de fornecer estimativas de limitação para o parâmetro de não-comutatividade como mostrado por [56, 57]. Em termos de mecânica quântica no espaço-tempo não-comutativo, é feita a substituição do operador de posição x_i por $x'_i = x_i + \frac{1}{2\hbar} \theta_{ij} p_j$, que representa o espaço-tempo deformado pelo parâmetro θ , e então as técnicas e regras da mecânica quântica convencional são aplicadas. Em detalhe, o potencial coulombiano é modificado para

$$V(r) = -\frac{e^2}{r} - e^2 \frac{(\vec{r} \times \vec{p}) \cdot \vec{\theta}}{4\hbar r^3} + \mathcal{O}(\theta^2).$$

O valor limite encontrado foi $\frac{1}{\sqrt{\theta}} \geq 10 \text{ TeV}$ onde é especificado que os efeitos Zeeman e Stark não influenciam tal resultado. Para efeito de informação e comparação, medidas realizadas por meio de transições no átomo de hélio fornecem $\frac{1}{\sqrt{\theta}} \geq 30 \text{ GeV}$ [58].

Por fim, podemos citar o trabalho de [59] que aborda o mecanismo experimental baseado no efeito Aharonov-Bohm a ser utilizado para uma possível estimativa do valor do parâmetro θ , e o trabalho de [60] que discute uma proposta de experimento do tipo interferômetro de Michelson-Morley para estimar um valor limite para tal parâmetro. No primeiro destes trabalhos, é avaliado que utilizando um experimento de física de partículas é possível obter um valor estimado por $\theta \sim [10 \text{ TeV}]^{-2}$ usando energias no intervalo descrito entre 200 GeV e 300 GeV.

³Comentada na nota de rodapé 1.

⁴Esta questão foi discutida na seção 3.1 e pode ser aprofundada em [44].

⁵O desvio Lamb (*Lamb shift*), em homenagem à descoberta de Willis Lamb, é o nome dado à pequena separação entre níveis $2p_{3/2}$ e $2p_{1/2}$ do átomo de hidrogênio devido à força spin-órbita [55].

No segundo trabalho, há o esforço para testar a não-comutatividade tentando medir-se a alteração causada por esta na relação de dispersão de fótons. Mostra-se que para que haja alteração no padrão de interferência de uma franja, utilizando luz visível num campo magnético de fundo de intensidade 1 T e usando a condição $\frac{1}{\sqrt{\theta}} \geq 10 \text{ TeV}$, seria necessário que a soma dos braços do interferômetro fosse de um parsec, que equivale à distância de um objeto cuja paralaxe anual média⁶ é de um segundo de arco. É comentado que esta seria uma distância impraticável para se manter um campo magnético forte coerente e doravante estaria sujeita à questão acerca da uniformidade de θ sobre estas grandes distâncias.

⁶Para que lembremos dos conceitos, paralaxe é a mudança aparente na posição de um objeto devido ao movimento do observador; a paralaxe anual média representa a metade do desvio total da posição de um objeto quando medida na Terra em determinada posição na sua órbita e seis meses depois quando está em uma posição de sua órbita oposta em relação ao Sol.

CAPÍTULO 4

Cordas Negras

Inteligência é a capacidade de se adaptar à mudança

—STEPHEN HAWKING

Neste capítulo vamos apresentar os aspectos gerais do estudo de cordas negras e desenvolver o trabalho levando em consideração um espaço-tempo não-comutativo. Inicialmente, discutimos o formalismo e características da solução cilíndrica e em seguida abordamos o estudo do espaço-tempo não-comutativo desta. Posteriormente, discutiremos os resultados obtidos com relação às propriedades termodinâmicas e, na sequência, desenvolvemos um estudo sobre o equilíbrio térmico do sistema considerado. Apresentamos neste, e no capítulo subsequente, os resultados obtidos provenientes do trabalho teórico realizado.

4.1 Espaço-tempo não-comutativo da corda negra

4.1.1 A solução de corda negra

O estudo de soluções das equações de Einstein correspondentes a buracos negros desempenham um papel muito importante na física uma vez que esses objetos têm se mostrado uma ferramenta essencial para entender o colapso gravitacional e uma ferramenta para investigar a relação entre o estudo das características do espaço-tempo em escala microscópica, regida pela Mecânica Quântica, e na escala macroscópica, regida pela Relatividade Geral. Este aspecto revela-se por indícios tais como a previsão de radiação emitida por buracos negros feita com uso de teoria quântica de campos (radiação Hawking), processos de espalhamento envolvendo partículas e buracos negros [61], e a estatística que deveria ser obedecida por um gás de buraco negro [62], por exemplo. O interesse em estudar buracos negros com topologias diferentes daquela dos buracos negros esféricos poderia não ter sido tão bem desenvolvido após a formulação da conjectura hoop (*hoop conjecture*) por Thorne [63], uma vez que esta prevê que buracos negros só podem ser formados se uma quantidade de matéria for comprimida a uma região de circunferência $4\pi GM$ em todas as direções, de forma que apenas buracos negros esféricos poderiam existir. Entretanto, esta proposição é válida apenas em um espaço-tempo no qual a constante cosmológica é nula. Por outro lado, espaços-tempos que admitem constante cosmológica negativa são o pano de fundo para a existência de buracos negros cilíndricos.

De fato, em junho de 1995, Lemos publica seu primeiro trabalho [9] acerca da solução de cordas negras, motivado pelo fato de as soluções de buracos negros previstas pela relatividade

geral serem capazes de descrever a maneira com a qual o espaço-tempo se comporta após o colapso gravitacional e de a teoria das cordas, a qual é uma teoria para as interações da natureza e uma candidata importante (assim como a teoria de gravidade em loop) para uma consistente teoria quântica da gravidade, ser capaz de fornecer soluções clássicas de buracos negros assim como cordas negras e membranas negras (que são objetos estendidos com horizontes de eventos). Neste trabalho, Lemos discute a nova solução do tipo corda negra ao solucionar as equações de movimento resultantes da ação quadridimensional de Einstein-Hilbert

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int \sqrt{-g}(R - 2\Lambda)d^4x. \quad (4.1)$$

O estudo fica mais robusto com a publicação do trabalho [10] no qual discute-se de forma mais completa a solução e analisa não somente a solução estática como também soluções estacionárias com rotação e carga elétrica. Todavia, não vamos discutir tais soluções aqui. A partir da variação da ação (4.1) com respeito ao campo gravitacional $g_{\mu\nu}$, e com a escolha de unidades seguindo $G = c = k_B = 1$, pode-se estabelecer as equações de movimento do problema cuja solução é [9, 10]

$$ds^2 = - \left(\alpha^2 r^2 - \frac{4M}{\alpha r} \right) dt^2 + \left(\alpha^2 r^2 - \frac{4M}{\alpha r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\phi^2 + \alpha^2 r^2 dz^2. \quad (4.2)$$

Esta solução representa o espaço-tempo de uma corda negra estática, no vácuo, com horizonte de eventos localizado em

$$r_+ = \frac{(4M_+)^{\frac{1}{3}}}{\alpha} \iff M_+ = \frac{\alpha^3 r_+^3}{4} \quad (4.3)$$

onde $M_+ = M(r_+)$ e $\alpha = -\frac{\Lambda}{3}$, com Λ sendo a constante cosmológica. É importante destacar que a coordenada temporal é definida no intervalo $-\infty < t < \infty$, a coordenada radial $0 \leq r < \infty$, a coordenada axial $-\infty < z < \infty$ e, finalmente, a coordenada angular é definida por $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Também é pertinente comentar que o próprio Lemos conecta a solução (4.2) com a solução do modelo buraco negro BTZ de forma que estes dois modelos de descrição de um espaço-tempo provido de singularidade estão relacionados [11]. Outro ponto a ser comentado é o fato de que, assintoticamente, na coordenada radial $r \rightarrow \infty$, o espaço-tempo da corda negra é anti-de Sitter e este fato traz à tona uma dificuldade para a solução (4.2): em um espaço-tempo no qual a singularidade se estende uniformemente por toda a linha axial, o eixo z , a energia total seria infinita, o que significa que massa total ADM não seria bem definida de forma que é interessante lidar com densidade de massa (massa por unidade de comprimento), a exemplo do que é encontrado na literatura, mesmo que não tenhamos tal problema. Todavia, uma maneira de redefinir a densidade de massa formalmente é desenvolvida por Lemos [10] com base no método de York e Brown [64]. Para nossos propósitos, não vamos desenvolver aqui.

Estamos prontos para avançar ao estudo do espaço-tempo não-comutativo do buraco negro cilíndrico. A transição pode ser feita de duas maneiras: escrevemos as equações de Einstein considerando o tensor momento-energia apropriado para o espaço-tempo não-comutativo e solucionamos essas para obter o elemento de linha que descreve o espaço-tempo não-comutativo da corda negra [65]; alternativamente [8, 37], procedemos com base na interpretação física da

matéria no espaço-tempo, pois, como vimos na seção 3.2, a massa está distribuída gaussianamente de forma que podemos fazer $M \rightarrow m_\theta$ com m_θ dado em (3.8)

$$m_\theta(r) = \frac{2M}{\sqrt{\pi}} \gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\theta}\right),$$

e assim expressar a métrica da corda negra no espaço-tempo não-comutativo como

$$ds^2 = - \left[\alpha^2 r^2 - \frac{8M}{\sqrt{\pi}\alpha r} \gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\theta}\right) \right] dt^2 + \left[\alpha^2 r^2 - \frac{8M}{\sqrt{\pi}\alpha r} \gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\theta}\right) \right]^{-1} dr^2 + r^2 d\phi^2 + \alpha^2 r^2 dz^2, \quad (4.4)$$

tal equação fornece o elemento de linha o qual representa o espaço-tempo não comutativo de uma corda negra estática no vácuo. O elemento de linha (4.4) foi obtido utilizando-se a transição $M \rightarrow m_\theta$ e está em concordância com o elemento de linha que encontra-se na referência [65] obtido a partir da solução formal das equações de Einstein. Note que se calculamos $g_{tt} = 0$, localizamos o horizonte de eventos em

$$r_+^3 = \frac{8M_+}{\sqrt{\pi}\alpha^3} \gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r_+^2}{4\theta}\right) \quad (4.5)$$

que leva a

$$M_+ = \frac{\sqrt{\pi}\alpha^3}{8} \frac{r_+^3}{\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r_+^2}{4\theta}\right)}. \quad (4.6)$$

Repare que se tomamos o limite $r_+ \rightarrow 0$ a massa expressa na equação (4.6) não vai para zero e como mostra a figura 4.1 a característica mais notável é a previsão de que a massa não se anula, uma vez que se consideramos que tal objeto “evapora”, no sentido de emitir radiação, interpretamos que existe um limite na evaporação do buraco negro cilíndrico. Esta interpretação será discutida ao longo deste capítulo. O valor M_{\min} que representa o fim da evaporação pode ser calculado fazendo-se $r_+ \rightarrow 0$ na equação (4.6) que, nesse caso, retorna

$$M_{\min} = \frac{3}{2} \sqrt{\pi} \alpha^3 \theta^{\frac{3}{2}}. \quad (4.7)$$

Uma observação interessante sobre o resultado (4.7) é que a relação entre as constantes α e θ que aparecem nesta equação é, mais explicitamente, $(\alpha\sqrt{\theta})^3$, ou seja, a constante α , que representa a presença da constante cosmológica $\alpha = -\frac{\Lambda}{3}$, em termos do elemento mínimo de distância do espaço-tempo $\sqrt{\theta}$. Esta relação é um parâmetro importante para as análises gráficas como poderá ser visto nas discussões que estão por vir.

A figura 4.1 apresenta um gráfico mostrando o comportamento da massa para ambos os casos comutativo e não-comutativo onde destacamos que teremos valores diferentes para as grandezas a depender de como escalamos o parâmetro α em termos do comprimento mínimo $\sqrt{\theta}$. Ressaltamos que o parâmetro $\sqrt{\theta}$ representa o parâmetro de normalização para todos os

gráficos deste capítulo de forma que expressamos a constante α em termos de tal parâmetro. Assim, temos um valor de α diferente para cada curva, seja ela representação do comportamento da grandeza física no espaço-tempo comutativo ou não-comutativo, uma vez que o valor desta constante é normalizado por $\sqrt{\theta}$. Lembremos que esta escala é importante, pois a constante α está associada à constante cosmológica e esta escala, então, representa a maneira com a qual se manifesta a constante cosmológica em termos do elemento $\sqrt{\theta}$. Também pode-se notar que ao considerar os efeitos da não-comutatividade, a massa tem valores maiores que o esperado para caso comutativo, o que pode ser visto no gráfico 4.1 ao perceber que as curvas tracejadas sempre percorrem valores maiores que as curvas cheias na escala de aproximadamente $4\sqrt{\theta}$. Este comportamento é também esperado para a energia interna uma vez que, para este caso estático e sem carga, a energia interna está associada à massa do buraco negro. O comportamento da energia interna será discutido na seção 4.1.2.

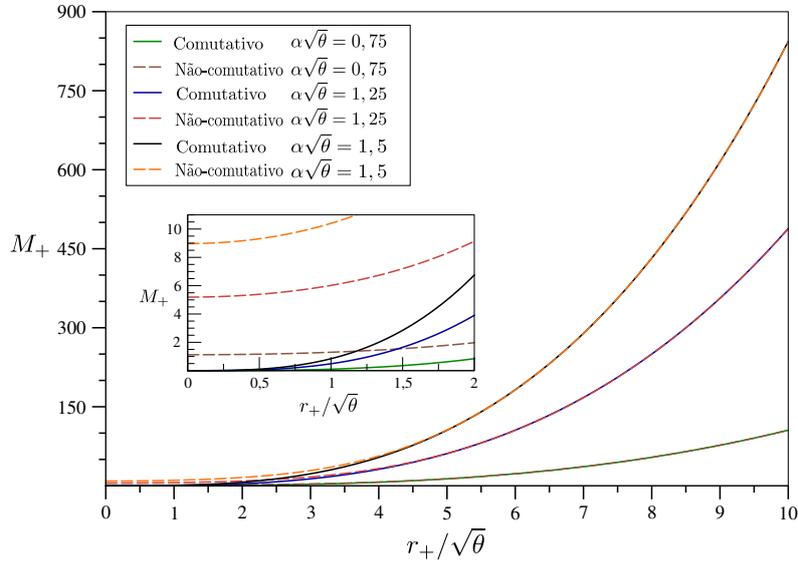


Figura 4.1: Massa para os casos comutativo e não-comutativo. No eixo vertical temos a massa por unidade de comprimento e no eixo horizontal temos o raio do horizonte de eventos escalado pelo comprimento mínimo do espaço-tempo $\sqrt{\theta}$.

4.1.2 Grandezas termodinâmicas

Temperatura

Voltamos nossas atenções para a temperatura da corda negra que podemos calcular com auxílio de (2.62)

$$T_H = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{dg^{rr}}{dr} \right) \Big|_{r=x_0}$$

modificada por (4.4), ou seja, utilizando o elemento de linha do buraco negro cilíndrico

$$g^{rr} = \alpha^2 r^2 - \frac{8M}{\sqrt{\pi}\alpha r} \gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\theta}\right)$$

$$\left. \frac{dg^{rr}}{dr} \right|_{r=r_+} = 2\alpha^2 r_+ + \frac{8M_+}{\sqrt{\pi}\alpha} \left[\frac{1}{r_+^2} \gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r_+^2}{4\theta}\right) - \frac{1}{r_+} \gamma'\left(\frac{3}{2}, \frac{r_+^2}{4\theta}\right) \right]$$

onde $\gamma'\left(\frac{3}{2}, \frac{r_+^2}{4\theta}\right) \equiv \frac{d}{dr_+} \gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r_+^2}{4\theta}\right)$, conforme apêndice A, de forma que

$$T_H = \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{\alpha^2 r_+}{2} + \frac{2M_+}{\sqrt{\pi}\alpha} \left[\frac{1}{r_+^2} \gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r_+^2}{4\theta}\right) - \frac{1}{r_+} \gamma'\left(\frac{3}{2}, \frac{r_+^2}{4\theta}\right) \right] \right\} \quad (4.8)$$

e ainda, se utilizamos a relação (4.6),

$$T_H = \frac{\alpha^2 r_+}{4\pi} \left[3 - \frac{\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r_+^2}{4\theta}\right)}{\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r_+^2}{4\theta}\right)} r_+ \right]. \quad (4.9)$$

O resultado (4.9) foi obtido anteriormente por [65] utilizando uma abordagem diferente onde não considerou a interação de campos ou o método abordado aqui. Isto mostra que a abordagem de tunelamento e o método de Hamilton-Jacobi são plausíveis e mostra que o procedimento matemático desenvolvido é razoável de forma que verificamos nosso resultado.

Investigando a expressão (4.8) ou (4.9), que são equivalentes, esperamos que elas sejam capazes de retornar o caso do espaço-tempo comutativo quando $\frac{r_+}{\sqrt{\theta}} \rightarrow \infty$. Isto significa considerar um limite no qual a distância radial é muitas ordens de grandeza maior que o comprimento característico de discretização $\sqrt{\theta}$ do espaço-tempo não-comutativo, e os efeitos da não-comutatividade não são perceptíveis. Note que, no limite de longas distâncias considerado, o segundo parâmetro no argumento de γ torna-se $\frac{r_+^2}{4\theta} \rightarrow \infty$ e como discutido na seção A.2, para o comportamento assintótico da função γ , podemos escrever

$$\gamma\left(\frac{3}{2}, \infty\right) = \int_0^\infty u^{\frac{3}{2}} e^{-u} \frac{du}{u} = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \quad (4.10)$$

Adotando o resultado do comportamento assintótico acima na equação (4.8), estaremos estudando o caso comutativo já que fazer $\frac{r_+^2}{4\theta} \rightarrow \infty$ é equivalente a tomar r_+ muitas ordens de grandeza maior que $\sqrt{\theta}$. Logo, usando um índice sobrescrito (c) para denotar que a grandeza está sendo analisada no limite do comutativo, temos que

$$T_H^{(c)} = \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{\alpha^2 r_+}{2} + \frac{2M_+}{\sqrt{\pi}\alpha} \left[\frac{1}{r_+^2} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{1}{r_+} \frac{d}{dr} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \right] \right\} \quad (4.11)$$

que dá

$$T_H^{(c)} = \frac{1}{4\pi} \left(2\alpha^2 r_+ + \frac{4M_+}{\alpha r_+^2} \right), \quad (4.12)$$

ou sem a dependência de massa

$$T_H^{(c)} = \frac{3\alpha^2 r_+}{4\pi} \quad (4.13)$$

que é verificada em [66].

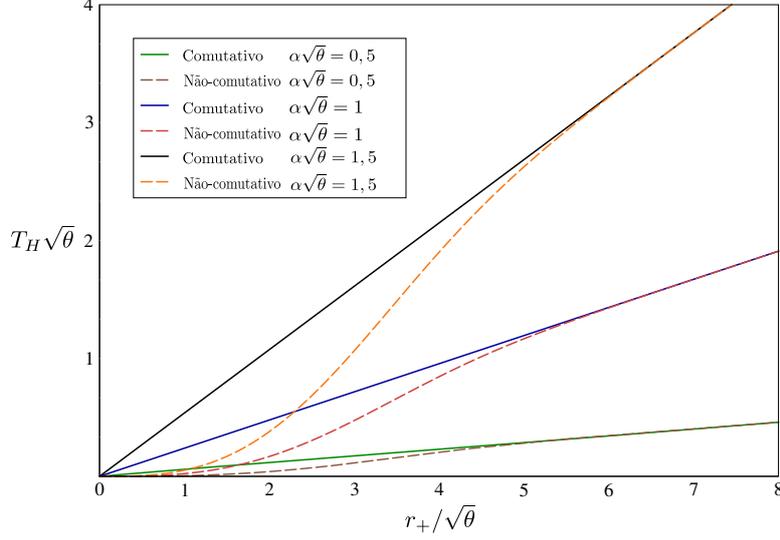


Figura 4.2: Temperatura Hawking para vários valores do parâmetro $\alpha\sqrt{\theta}$. Em pequena escala, a temperatura prevista seria inferior àquela sem consideração da não-comutatividade.

O gráfico na figura 4.2 é bastante instrutivo. Vemos imediatamente que a temperatura em pequena escala é menor do que se esperava do estudo comutativo, em comprimentos de até $r_+ \approx 5\sqrt{\theta}$ o buraco negro cilíndrico tem temperatura mais baixa devido a influência da não comutatividade do espaço-tempo. Repare também que para que seja alcançada $T_H = 0$, seria necessário ter $r_+ = 0$ o que, por hipótese, não é permitido, ou seja, a temperatura de zero absoluto não pode ser atingida. Assim, inferimos do gráfico 4.2 que a terceira lei da termodinâmica é verificada para a corda negra sob influência da não-comutatividade do espaço-tempo. Para grandes comprimentos, temos a sobreposição das duas curvas, recuperamos o espaço-tempo comutativo e conseqüentemente a noção de ponto.

Entropia

Com o intuito de calcular a entropia, partimos da primeira lei da termodinâmica na forma

$$dM_+ = T_H dS_+ \quad (4.14)$$

isto leva a

$$\Delta S_+ = \int \frac{dM_+}{T_H} = \int_{r_0}^{r_+} \frac{1}{T_H} \left(\frac{\partial M_+}{\partial r_+} \right) dr_+. \quad (4.15)$$

Devemos agora usar o resultado de (4.13) na equação acima e também calcular a taxa $\partial M_+ / \partial r_+$ usando (4.6). Para facilitar, façamos novamente $\gamma \equiv \gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r_+^2}{4\theta}\right)$ e tomemos $r_0 = 0$.

$$\frac{\partial M_+}{\partial r_+} = \frac{\sqrt{\pi}\alpha^3 (3\gamma r_+^2 - \gamma' r_+^3)}{8\gamma^2}. \quad (4.16)$$

Basta agora substituir o resultado acima e (4.9) em (4.15):

$$\begin{aligned} S_+ &= \int_0^{r_+} \frac{\pi}{\alpha^2} \left[\frac{r_+}{2} + \frac{1}{4} \left(r_+ - \frac{\gamma'}{\gamma} r_+^2 \right) \right]^{-1} \left[\frac{\sqrt{\pi}\alpha^3 (3\gamma r_+^2 - \gamma' r_+^3)}{8\gamma^2} \right] dr_+ \\ &= \frac{\pi^{\frac{3}{2}}\alpha}{2} \int_0^{r_+} \frac{\left[3 - \frac{\gamma'}{\gamma} r_+ \right] r_+}{\gamma \left[3 - \frac{\gamma'}{\gamma} r_+ \right]} dr_+ \end{aligned}$$

que é equivalente a

$$S_+ = \frac{\pi^{\frac{3}{2}}\alpha}{2} \int_0^{r_+} \frac{r'_+}{\gamma \left(\frac{3}{2}, \frac{r'_+{}^2}{4\theta} \right)} dr'_+. \quad (4.17)$$

Aqui r'_+ representa a variável de integração. Neste resultado, que está de acordo com [65], vemos claramente que a entropia não obedece a lei da área, mas quando tomamos o limite do comutativo a situação muda, pois tomando o limite do comutativo, a equação (4.17) assume a forma

$$S_+^{(c)} = \frac{\pi^{\frac{3}{2}}\alpha}{2} \int_0^{r_+} \frac{r'_+}{\sqrt{\pi}/2} dr'_+ = \frac{\pi\alpha r_+^2}{2} \quad (4.18)$$

que passa a obedecer a lei da área de Bekenstein $S = A/4$ onde, em nosso caso, $A = 2\pi\alpha r_+^2$ é a área do buraco negro cilíndrico [67]. Perceba que a expressão (4.17) não pode ser integrada se não forem realizadas aproximações para a função gama incompleta inferior tais quais as apresentadas no apêndice A, o que pode levar a resultados menos precisos. Na seção 4.2 vamos desenvolver um método alternativo ao método Hamilton-Jacobi para calcular a temperatura Hawking a partir do qual poderemos computar a entropia do sistema.

Capacidade calorífica

Neste ponto, entendemos a corda negra como um sistema termodinâmico e a fim de estudar sua estabilidade termodinâmica calculamos a capacidade calorífica da seguinte forma

$$C_+ = \frac{\partial Q}{\partial T_H} = \frac{T_H \partial S_+}{\partial T_H} = \frac{\partial M_+}{\partial T_H} = \frac{\left(\frac{\partial M_+}{\partial r_+} \right)}{\left(\frac{\partial T_H}{\partial r_+} \right)} \quad (4.19)$$

onde utilizamos (4.14). A quantidade $\left(\frac{\partial M_+}{\partial r_+} \right)$ já foi calculada antes na equação (4.16) e para calcular o denominador do último termo da relação acima usamos (4.9) com a mesma convenção usada antes para γ :

$$\frac{\partial T_H}{\partial r_+} = \frac{\alpha^2}{4\pi} \left\{ 3 - \frac{\gamma'}{\gamma} r_+ - \frac{r_+}{\gamma} \left[\gamma'' r_+ - \frac{\gamma'^2}{\gamma} r_+ + \gamma' \right] \right\} \quad (4.20)$$

Substituindo (4.16) e (4.20) acima em (4.19), vamos obter

$$C_+ = \left[\frac{\sqrt{\pi} \alpha^3 (3\gamma r_+^2 - \gamma' r_+^3)}{8 \gamma^2} \right] \left(\frac{\alpha^2}{4\pi} \right)^{-1} \left\{ 3 - \frac{\gamma'}{\gamma} r_+ - \frac{r_+}{\gamma} \left[\gamma'' r_+ - \frac{\gamma'^2}{\gamma} r_+ + \gamma' \right] \right\}^{-1}$$

que leva a

$$C_+ = \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{2} \alpha r_+^2 \frac{\left(3 - \frac{\gamma'}{\gamma} r_+ \right)}{\left[3\gamma - r_+ \left(\gamma'' r_+ - \frac{\gamma'^2}{\gamma} r_+ + 2\gamma' \right) \right]}, \quad (4.21)$$

onde lembramos que $\gamma \equiv \gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r_+^2}{4\theta}\right)$ e verificamos [65].

Também podemos verificar o limite do comutativo aqui fazendo $\frac{r_+}{\sqrt{\theta}} \rightarrow \infty$, o que leva a $\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r_+^2}{4\theta}\right) \rightarrow \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$ e por conseguinte as derivadas $\gamma' = \gamma'' \rightarrow 0$ e a relação (4.21) toma a forma

$$C_+^{(c)} = \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{2} \frac{3\alpha r_+^2}{3\gamma} = \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{2} \frac{\alpha r_+^2}{\frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{2}} = \pi \alpha r_+^2 \quad (4.22)$$

este resultado mostra que a capacidade calorífica da corda negra é sempre positiva o que significa que a mesma é termodinamicamente estável e isso também significa que transições de fase não devem acontecer. Veremos que esta situação é alterada quando considerarmos efeito de back reaction na seção 4.2. Expomos em gráfico os resultados que dizem respeito à capacidade calorífica na figura 4.3

Como mostrado na figura 4.3, vemos que o comportamento da capacidade calorífica para $r_+ \sim \sqrt{\theta}$ tem uma forma muito diferente do caso comutativo, o que significa que a influência da não-comutatividade é bastante perceptível nessa região. Quando assumimos grandes distâncias, o comportamento da capacidade calorífica recai no comportamento do caso comutativo. Outro ponto interessante é perceber que se $r_+/\sqrt{\theta} \rightarrow 0$, C_+ cresce indefinidamente. Uma possível interpretação para tal fato é a seguinte: como a capacidade calorífica está relacionada à quantidade de energia que deve ser transferida ao sistema para variar sua temperatura, e a temperatura está relacionada ao horizonte de eventos como vemos em (4.9), o resultado da figura 4.3 reflete o fato de que seria necessária uma transferência de energia infinita para reduzir o raio do horizonte de eventos a zero, o que seria impossível. Isso reflete nossa premissa de haver um comprimento mínimo, da ordem do comprimento de Planck, a partir do qual seja permitida a existência do corda negra. Seguindo esta interpretação, para reduzir a temperatura ao zero absoluto, $T_H \rightarrow 0$, teríamos que ter $r_+ \rightarrow 0$, como pode ser visto da figura 4.2, e portanto, seria necessária “evaporação infinita” (uma transferência de energia infinita) no sentido de a corda

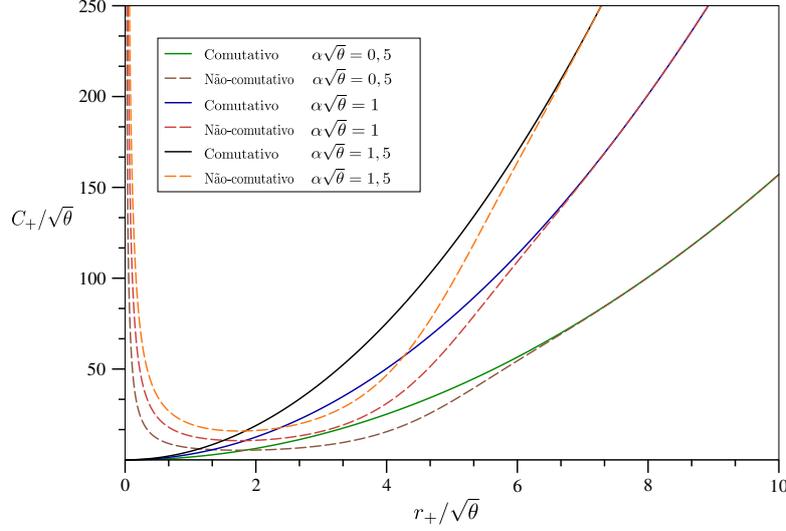


Figura 4.3: Capacidade calorífica para vários valores do parâmetro $\alpha\sqrt{\theta}$. Sob influência da não-comutatividade, as curvas de capacidade calorífica aumentam indefinidamente quando próximas à origem.

negra evaporar até se extinguir. Em outras palavras, a corda negra não pode evaporar até se extinguir pois isto violaria a terceira lei da termodinâmica. Isso corrobora com o resultado (4.7) visível na figura 4.1.

Energia livre: espaço-tempo comutativo

A fim de entendermos de forma mais abrangente a termodinâmica de buracos negros em relatividade geral cilíndrica e sua estabilidade, vamos agora estudar o comportamento da energia livre associada a este sistema. Começamos investigando a energia interna da corda negra sob a perspectiva do espaço-tempo comutativo e posteriormente estudaremos tal grandeza no espaço-tempo não-comutativo. Procedemos seguindo a prescrição da referência [68] desenvolvida para buracos negros esféricos mas que aqui adaptaremos para o nosso caso de buracos negros cilíndricos. Neste procedimento, vamos considerar uma cavidade cilíndrica de raio finito R , com $R > r_+$. Fora do horizonte de eventos, a temperatura é dada por

$$T^{(c)} = \frac{T_H^{(c)}}{\sqrt{g_{tt}(R)}} \quad (4.23)$$

onde g_{tt} representa a componente temporal do tensor métrico dado em (4.2). A expressão para temperatura (4.23) é aquela sobre o horizonte de eventos $T_H^{(c)}$ ponderada pelo fator de Tolman [68, 69] o qual leva em consideração o desvio para o vermelho (redshift) ao afastar-se do horizonte de eventos. Como o sistema dentro da cavidade R consiste apenas da corda negra, variações de energia estão associadas a variações na massa da mesma, de forma que podemos escrever a primeira lei da termodinâmica para este sistema $dE = TdS$, que nos leva a

$$E^{(c)} = M_0 + \int_{S_0}^{S_+} T^{(c)} dS'_+ = M_0 + \int_{r_0}^{r_+} T^{(c)}(r'_+, R) \left(\frac{\partial S'_+}{\partial r'_+} \right) dr'_+ \quad (4.24)$$

e a equação anterior é válida considerando-se as condições de contorno $E(r_0) = M_0$ e $S(r_0) = S_0$. Ou seja, o que estamos considerando é que a temperatura no horizonte de eventos é dada por (4.13) e que a entropia em termos de dado r_+ é calculada por meio de

$$S_+^{(c)} = \frac{\pi\alpha}{2} r_+^2. \quad (4.18 \text{ revisitada})$$

Note que a expressão (4.18) é uma expressão para a variação de entropia no limite do comutativo da expressão (4.17) que representa a variação de entropia no caso não-comutativo. Nestas equações citadas, é considerado como condição inicial que a entropia S_0 vale zero e, por isso, pode-se obter a entropia para dado r_+ já que $\Delta S_+ = S_+ - S_0 = S_+ - 0 = S_+$, mas tal condição não é necessária. A substituição da expressão para a temperatura local (4.23) na integral da expressão para a energia fornece

$$E^{(c)} = M_0 + \pi\alpha \int_{r_0}^{r_+} T^{(c)}(r'_+, R) r'_+ dr'_+. \quad (4.25)$$

Substituindo agora a temperatura em (4.13)

$$T_H^{(c)} = \frac{3\alpha^2 r_+}{4\pi} \quad (4.13 \text{ revisitada})$$

na relação (4.23), podemos encontrar uma expressão para $T^{(c)}$ e usar na integral (4.25). Para tal realização, precisamos desenvolver $g_{tt}(R)$ como

$$\begin{aligned} g_{tt}(R) &= \alpha^2 R^2 - \frac{4M_+}{\alpha R} \\ &= \alpha^2 R^2 \left(1 - \frac{r_+^3}{R^3}\right). \end{aligned} \quad (4.26)$$

Portanto, segue que

$$T^{(c)} = \frac{3\alpha r_+}{4\pi R} \frac{1}{\left(1 - \frac{r_+^3}{R^3}\right)^{\frac{1}{2}}} \quad (4.27)$$

e com isso a energia interna se torna

$$E^{(c)} = M_0 + \pi\alpha \left(\frac{3\alpha}{4\pi R}\right) \int_{r_0}^{r_+} \frac{r'_+{}^2}{\left(1 - \frac{r_+^3}{R^3}\right)^{\frac{1}{2}}} dr'_+. \quad (4.28)$$

Para resolver a integral e determinar a energia interna fazemos a substituição $u = 1 - \frac{r_+^3}{R^3}$ e desenvolvemos. Por fim, somos levados a

$$E^{(c)}(r_+, R) = M_0 + \frac{\alpha^2 R^2}{2} \left[\left(1 - \frac{r_0^3}{R^3}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(1 - \frac{r_+^3}{R^3}\right)^{\frac{1}{2}} \right]. \quad (4.29)$$

Repare que se $r_0 < r_+$, a contribuição para M_0 no lado direito de (4.29) é positiva, ou seja, como r_0 representa o valor inicial do raio do horizonte de eventos, a energia interna aumenta com o aumento do raio e inversamente, diminui com a diminuição do mesmo.

Uma vez que temos posse da energia interna, podemos calcular a energia livre por meio de

$$F^{(c)} = E^{(c)}(r_+, R) - T^{(c)} S_+^{(c)}, \quad (4.30)$$

e substituindo cada ingrediente dessa equação pelos correspondentes resultados anteriores vamos encontrar

$$F^{(c)} = M_0 + \frac{\alpha^2 R^2}{2} \left[\left(1 - \frac{r_0^3}{R^3}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(1 - \frac{r_+^3}{R^3}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{3}{4} \frac{r_+^3/R^3}{\left(1 - \frac{r_+^3}{R^3}\right)^{\frac{1}{2}}} \right]. \quad (4.31)$$

Energia livre: espaço-tempo não-comutativo

Estudando agora o espaço-tempo não-comutativo, seguimos a mesma prescrição utilizada para o caso comutativo. Em termos operacionais, uma vantagem agora é que temos a oportunidade de verificação dos nossos resultados uma vez que nossas equações devem recair nas equações obtidas para o caso anterior quando tomamos o limite de grandes distâncias. Entretanto, uma desvantagem é a complexidade inevitável das equações quando estamos estudando sobre o espaço-tempo não-comutativo.

Seguindo o mesmo procedimento realizado para o espaço-tempo comutativo, consideramos uma cavidade cilíndrica de tamanho fixo R , utilizamos a primeira lei para escrever a energia interna e para isso precisamos determinar a temperatura local no contorno da cavidade T . Lembrando que

$$T = \frac{T_H}{\sqrt{g_{tt}(R)}},$$

e para o caso não-comutativo, de acordo com a equação (4.4),

$$g_{tt}(R) = \alpha^2 R^2 - \frac{8M_+}{\sqrt{\pi}\alpha R},$$

que em termos de r_+ fica

$$g_{tt}(R) = \alpha^2 R^2 \left[1 - \frac{\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{R^2}{4\theta}\right) r_+^3}{\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r_+^2}{4\theta}\right) R^3} \right]. \quad (4.32)$$

Logo,

$$T = \frac{\alpha}{4\pi R} r_+ \left[3 - \frac{d}{dr_+} \gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r_+^2}{4\theta}\right) r_+ \right] \left[1 - \frac{\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{R^2}{4\theta}\right) r_+^3}{\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r_+^2}{4\theta}\right) R^3} \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (4.33)$$

Utilizando a equação (4.17) para a entropia, podemos escrever

$$dS'_+ = \left(\frac{\partial S'_+}{\partial r'_+} \right) dr'_+ = \frac{\pi^{\frac{3}{2}} \alpha}{2} \frac{r'_+}{\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r'^2_+}{4\theta}\right)} dr'_+. \quad (4.34)$$

Temos agora todos os ingredientes para escrever uma expressão para a energia interna de forma que

$$E = M_0 + \frac{\sqrt{\pi} \alpha^2}{8R} \int_{r_0}^{r_+} \left[\frac{3r'^2_+}{\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r'^2_+}{4\theta}\right)} - \frac{r'^3_+ \frac{d}{dr'_+} \gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r'^2_+}{4\theta}\right)}{\gamma^2\left(\frac{3}{2}, \frac{r'^2_+}{4\theta}\right)} \right] \left[1 - \frac{\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{R^2}{4\theta}\right) r'^3_+}{\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r'^2_+}{4\theta}\right) R^3} \right]^{-\frac{1}{2}} dr'_+. \quad (4.35)$$

Repare que o primeiro termo entre colchetes da integral acima pode ser escrito como a derivada de um produto, pois

$$\frac{d}{dr'_+} \left(\frac{r'^3_+}{\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r'^2_+}{4\theta}\right)} \right) = \frac{3r'^2_+ \gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r'^2_+}{4\theta}\right) - r'^3_+ \frac{d}{dr'_+} \gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r'^2_+}{4\theta}\right)}{\gamma^2\left(\frac{3}{2}, \frac{r'^2_+}{4\theta}\right)} = \frac{3r'^2_+}{\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r'^2_+}{4\theta}\right)} - \frac{r'^3_+ \frac{d}{dr'_+} \gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r'^2_+}{4\theta}\right)}{\gamma^2\left(\frac{3}{2}, \frac{r'^2_+}{4\theta}\right)}$$

então, podemos reescrever a integral para a energia interna como

$$E = M_0 + \frac{\sqrt{\pi} \alpha^2}{8R} \int_{r_0}^{r_+} \frac{d}{dr'_+} \left(\frac{r'^3_+}{\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r'^2_+}{4\theta}\right)} \right) \left[1 - \frac{\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{R^2}{4\theta}\right) r'^3_+}{\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r'^2_+}{4\theta}\right) R^3} \right]^{-\frac{1}{2}} dr'_+. \quad (4.36)$$

De forma que resolvendo a integral encontramos

$$E = M_0 + \frac{\sqrt{\pi}}{\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{R^2}{4\theta}\right)} \frac{\alpha^2 R^2}{4} \left[\left(1 - \frac{\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{R^2}{4\theta}\right) r_0^3}{\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r_0^2}{4\theta}\right) R^3} \right)^{\frac{1}{2}} - \left(1 - \frac{\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{R^2}{4\theta}\right) r_+^3}{\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r_+^2}{4\theta}\right) R^3} \right)^{\frac{1}{2}} \right]. \quad (4.37)$$

Os resultados estão ilustrados na figura 4.4 e em primeiro lugar vemos que há uma grande diferença de comportamento para valores de r_+ próximos a $\sqrt{\theta}$. Enquanto que para o caso em que consideramos o espaço-tempo comutativo, a energia interna da corda negra pode assumir o valor nulo, quando a não-comutatividade do espaço-tempo é levada em consideração, vemos que a energia interna do sistema não pode ser zero, mas atinge valores mínimos destacados

na legenda da figura 4.4. A diferença entre as duas curvas é significativa até meados de $r_+ \approx 9,5\sqrt{\theta}$, mostrando que a não-comutatividade influencia o comportamento termodinâmico do sistema em toda a escala do espaço-tempo da ordem de $10\sqrt{\theta}$ e como neste intervalo os valores percorridos pelas curvas tracejadas do espaço-tempo não-comutativo são sempre maiores que os valores percorridos pelas curvas cheias do espaço-tempo comutativo, entendemos que, numa escala de até uma ordem de grandeza do comprimento de Planck, o sistema é mais energético do que se esperava quando não havia consideração dos efeitos de não-comutatividade do espaço-tempo.

Com o resultado (4.37) para a energia, podemos calcular a energia livre associada F por meio de

$$F = E(r_+, R) - TS_+, \quad (4.38)$$

e vemos que precisamos calcular a entropia do sistema S_+ . A nossa estratégia aqui é usar a relação (4.17) para obter uma expressão para a variação de entropia e com ela teremos o comportamento da entropia para dado r_+ .

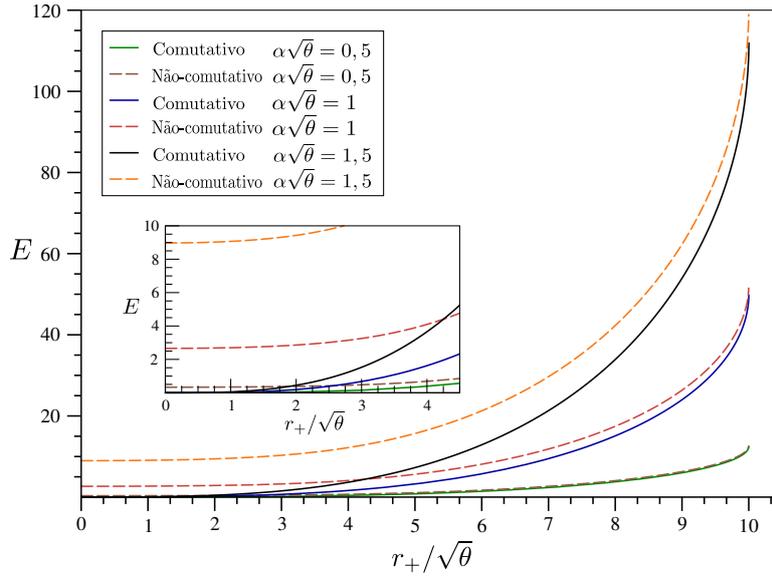


Figura 4.4: Na previsão não-comutativa a energia interna não é zero para $r_+/\sqrt{\theta} = 0$, mas assume valores mínimos: $E_{\min} = 0,33$ para $\alpha\sqrt{\theta} = 0,5$; $E_{\min} = 2,66$ para $\alpha\sqrt{\theta} = 1$ e $E_{\min} = 8,97$ para $\alpha\sqrt{\theta} = 1,5$. Destacamos que fizemos $E_0 = 0$ e $r_0 = 0$.

A integral da entropia (4.17) pode ser calculada usando-se a expansão assintótica para a função gama que discutimos no apêndice A

$$\gamma\left(\frac{3}{2}, x\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left[1 - e^{-x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{(1-2k)/2}}{\Gamma\left(\frac{3}{2} - k\right)} \right] \approx \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left[1 - \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}/2} e^{-x} \right], \quad (4.39)$$

onde usamos a expansão em maior ordem apenas (com $k = 0$). Acima, o x é $\frac{r_+^2}{4\theta}$ em nosso caso e, desenvolvendo para obter uma expressão integral da entropia em (4.17), teremos

$$\int_{r_0}^{r_+} \frac{r'_+}{\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r'_+{}^2}{4\theta}\right)} dr'_+ = \int_{r_0}^{r_+} \frac{r'_+}{\frac{\sqrt{\pi}}{2} \left[1 - \frac{2r'_+}{2\sqrt{\pi}\sqrt{\theta}} e^{-\frac{r'_+{}^2}{4\theta}}\right]} dr'_+. \quad (4.40)$$

Como mostramos, esta expressão integral é uma expressão aproximativa pois estamos considerando a expansão assintótica da função gama. A consideração de um número suficiente de termos da expansão nos ajuda a efetuar a integração para obter a seguinte expressão

$$S_+ = \frac{r_+^3}{8\sqrt{\pi}R} + \frac{\theta}{2\sqrt{\pi}} \operatorname{erf}\left(\frac{r_+}{2\sqrt{\theta}}\right) + \frac{\sqrt{\theta}}{2\pi} \frac{r_+^2}{R} e^{-\frac{r_+^2}{4\theta}} + \frac{1}{12\pi\sqrt{\theta}} \frac{r_+^4}{R} e^{-\frac{r_+^2}{4\theta}} \quad (4.41)$$

onde $\operatorname{erf}\left(\frac{r_+}{2\sqrt{\theta}}\right)$ representa a função erro conforme apresentamos no apêndice A. Desta forma, somos capazes de escrever

$$F = E - \frac{\sqrt{\pi}\alpha^2 r_+}{8} \frac{r_+}{R} \left[3 - \frac{r_+^3}{4\theta^{\frac{3}{2}}} \frac{e^{-\frac{r_+^2}{4\theta}}}{\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r_+^2}{4\theta}\right)}\right] \left[1 - \frac{\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{R^2}{4\theta}\right) r_+^3}{\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r_+^2}{4\theta}\right) R^3}\right]^{-\frac{1}{2}} \\ \cdot \left[\frac{r_+^3}{8\sqrt{\pi}R} + \frac{\theta}{2\sqrt{\pi}} \operatorname{erf}\left(\frac{r_+}{2\sqrt{\theta}}\right) + \frac{\sqrt{\theta}}{2\pi} \frac{r_+^2}{R} e^{-\frac{r_+^2}{4\theta}} + \frac{1}{12\pi\sqrt{\theta}} \frac{r_+^4}{R} e^{-\frac{r_+^2}{4\theta}}\right]$$

e agora substituindo a expressão (4.37) para a energia obtemos finalmente

$$F = M_0 + \frac{\sqrt{\pi}}{\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{R^2}{4\theta}\right)} \frac{\alpha^2 R^2}{4} \left[\left(1 - \frac{\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{R^2}{4\theta}\right) r_0^3}{\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r_0^2}{4\theta}\right) R^3}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(1 - \frac{\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{R^2}{4\theta}\right) r_+^3}{\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r_+^2}{4\theta}\right) R^3}\right)^{\frac{1}{2}}\right] \\ - \frac{\sqrt{\pi}\alpha^2 r_+}{8} \frac{r_+}{R} \left[3 - \frac{r_+^3}{4\theta^{\frac{3}{2}}} \frac{e^{-\frac{r_+^2}{4\theta}}}{\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r_+^2}{4\theta}\right)}\right] \left[1 - \frac{\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{R^2}{4\theta}\right) r_+^3}{\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r_+^2}{4\theta}\right) R^3}\right]^{-\frac{1}{2}} \\ \cdot \left[\frac{r_+^3}{8\sqrt{\pi}R} + \frac{\theta}{2\sqrt{\pi}} \operatorname{erf}\left(\frac{r_+}{2\sqrt{\theta}}\right) + \frac{\sqrt{\theta}}{2\pi} \frac{r_+^2}{R} e^{-\frac{r_+^2}{4\theta}} + \frac{1}{12\pi\sqrt{\theta}} \frac{r_+^4}{R} e^{-\frac{r_+^2}{4\theta}}\right] \quad (4.42)$$

Perceba que mesmo que este seja um resultado aproximativo, uma vez que iniciamos o cálculo da integral (4.17) com a utilização da expansão assintótica da função γ , pois a integral supracitada não pode ser resolvida de maneira trivial, veremos, entretanto, que esta expressão para a entropia está correta quando a mesma for recuperada através de um método diferente de calcular as grandezas termodinâmicas (diretamente pelo cálculo da gravidade superficial) apresentado detalhadamente na seção 4.2.1. De fato, o cálculo da entropia no espaço-tempo não-comutativo é não-trivial de forma que, no apêndice B, apresentamos um desenvolvimento

detalhado do cálculo de tal grandeza e uma verificação do resultado, haja vista que tal procedimento se revela importante quando estudamos a influência de back reaction sobre o espaço-tempo não-comutativo da corda negra na seção 4.2.3.

O gráfico dos resultados apresentados nesta seção encontram-se na figura 4.5 que nos mostra que a energia livre assume valores negativos e positivos e que as curvas dos casos comutativo e não-comutativo se cruzam em determinado ponto. Vemos também que quando r_+ é muitas ordens de grandeza maior que o comprimento característico $\sqrt{\theta}$ as duas curvas se sobrepõem significando que nesse limite a não-comutatividade não exerce influência sobre sistema, como esperado. Analisando de forma mais detalhada, lembramos do gráfico 4.2 que mostra que tanto para o caso comutativo quanto para o não-comutativo, se r_+ é grande então T_H também é. Com efeito, o acoplamento $T_H S_+$ na expressão para a energia livre $F = E - T_H S_+$ aumenta e, para dado valor de T_H a energia livre F pode ser positiva ou negativa, o que está explícito na figura 4.5 a seguir. Vale a pena perceber que no caso não-comutativo, F passa a ser negativo de forma mais tardia (em termos de valor de r_+) em comparação ao caso comutativo: vemos que os valores da energia livre atingidos pelas linhas tracejadas, correspondentes ao espaço-tempo não-comutativo passam a ser negativos em torno de 4,07 para $\alpha\sqrt{\theta} = 0,5$, 4,99 para $\alpha\sqrt{\theta} = 1$, e 5,7 para $\alpha\sqrt{\theta} = 1,5$ após o fazerem as curvas cheias que traduzem o espaço-tempo comutativo em torno de 0,05 para $\alpha\sqrt{\theta} = 0,5$, 0,04 para $\alpha\sqrt{\theta} = 1$, 0,03 para $\alpha\sqrt{\theta} = 1,5$. Este fato representa outra forma de verificar o que interpretamos do gráfico 4.4, onde vimos que a energia na escala $10\sqrt{\theta}$ é maior quando levamos em conta a não-comutatividade, já que se E é maior, $F = E - T_H S_+$ somente assumirá valores negativos para maiores valores do acoplamento $T_H S_+$ o que acontece com as curvas tracejadas no gráfico de F .

Como sabemos, dependendo do sinal, a variação da energia livre representa o trabalho realizado pelo ou sobre o sistema num processo isotérmico reversível. Assim, comentando o caso $\alpha\sqrt{\theta} = 1$, entre os três apresentados (a análise é semelhante para os outros casos), onde temos duas regiões para investigar mudanças na energia livre: a região $r_+ < 4,99\sqrt{\theta}$ e a região $r_+ > 4,99\sqrt{\theta}$. Vamos fazer a análise com base na seguinte observação [70]

$$\begin{aligned}\Delta F &= \Delta E - T_H \Delta S_+, & \text{mas} \\ \Delta E &= T_H \Delta S_+ - W, & \text{então} \\ \Delta F &= -W\end{aligned}\tag{4.43}$$

ou seja, a variação de F representa o trabalho consumido pelo sistema no processo isotérmico, e o sinal de ΔF depende se $W > 0$ ou $W < 0$. Para a região com valores menores que $r_+ = 4,99\sqrt{\theta}$ a energia livre é sempre positiva e por isso podemos investigar as variações $\Delta F = F_f - F_i$, com $F_f > 0$ a energia livre final e $F_i > 0$ a energia livre inicial do processo, da seguinte maneira: se $F_f > F_i$, então $\Delta F > 0$ e a relação (4.43) nos diz trabalho foi realizado sobre o sistema e se $F_f < F_i$ então $\Delta F < 0$ e o sistema realizou trabalho. Para a região $r_+ > 4,99\sqrt{\theta}$, temos que F assume valores negativos e se $|F_f| > |F_i|$ então $\Delta F < 0$ [porque temos $-|F_f| - (-|F_i|) < 0$ pois $|F_f| > |F_i|$] o que significaria trabalho sendo realizado pelo sistema e se $|F_f| < |F_i|$ então $\Delta F > 0$ e trabalho foi realizado sobre o sistema. Variações entre as duas regiões são dadas com a análise da localização de F_f e F_i , pois $F > 0$ para $r_+ < 4,99\sqrt{\theta}$ e $F < 0$ para $r_+ > 4,99\sqrt{\theta}$. O fato de imaginarmos a variação do raio do horizonte de eventos como consequência

da mudança na energia livre é uma forma de entendermos que efeitos não-comutativos no espaço-tempo de buracos negros atuam de forma conceitualmente análoga a considerar efeitos quânticos no espaço-tempo clássico de buracos negros. Já que a análise clássica do tensor momento-energia não permitiria a mudança da área do horizonte de eventos.

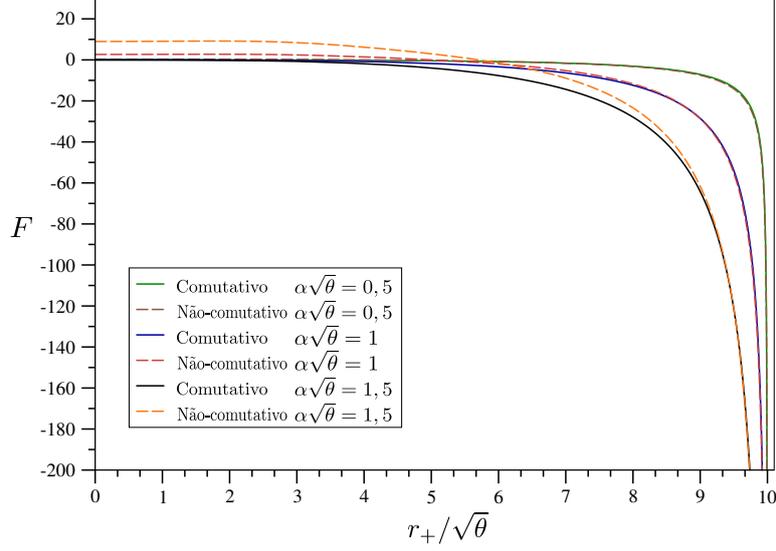


Figura 4.5: Energia livre. Destacamos que fizemos $E_0 = 0$ e $r_0 = 0$.

Vemos que a equação (4.42), apesar de extensa, se reduz ao caso comutativo no limite $\frac{r_+}{\sqrt{\theta}} \rightarrow \infty$, e mostramos isso primeiramente observando que se $r_+^2 \gg \theta$ e $R^2 > r_+^2$ então $R^2 \gg \theta$ e isso significa que os termos que contêm $\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{R^2}{4\theta}\right) \rightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ também, assim como $\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r_+^2}{4\theta}\right) \rightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Também podemos entender que o termo que contém a função erro será proporcional a uma fração de θ nesse limite, pois $\text{erf}\left(\frac{r_+}{2\sqrt{\theta}}\right) \rightarrow 1$ e a razão $\frac{r_+}{R}$ é menor que 1. Esse termo então pode ser desprezado em face aos demais nesse limite ($\theta \ll r_+, r_0, R$). Para resumir, temos

$$\begin{aligned}
 F|_{r_+^2 \gg \theta} &= M_0 + \frac{\alpha^2 R^2}{2} \left[\left(1 - \frac{r_0^3}{R^3}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(1 - \frac{r_+^3}{R^3}\right)^{\frac{1}{2}} \right] - \frac{3}{8} \frac{\alpha^2}{\left(1 - \frac{r_+^3}{R^3}\right)^{\frac{1}{2}}} \frac{r_+^3}{R} \\
 &= M_0 + \frac{\alpha^2 R^2}{2} \left[\left(1 - \frac{r_0^3}{R^3}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(1 - \frac{r_+^3}{R^3}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{3}{4} \frac{r_+^3/R^3}{\left(1 - \frac{r_+^3}{R^3}\right)^{\frac{1}{2}}} \right] \\
 &= F^{(c)},
 \end{aligned} \tag{4.44}$$

onde $F^{(c)}$ é dado em (4.31).

4.2 Termodinâmica da corda negra na presença de back reaction

Desenvolvemos neste ponto um estudo acerca do comportamento da métrica do buraco negro cilíndrico nos espaços-tempos comutativo e não comutativo na presença de back reaction, por meio do detalhamento e adaptação do método apresentado no trabalho publicado por [37]. Para realizar esse estudo, interpretamos o efeito back reaction como uma perturbação na gravidade superficial no horizonte de eventos da corda negra de forma a observar alteração dessa grandeza, e por consequência alteração das grandezas termodinâmicas devida a esse efeito. De forma direta, esperamos obter as grandezas termodinâmicas alteradas devido a presença de back reaction, mas que recuperem sua forma já calculada anteriormente se desconsiderarmos esse efeito. Como discutido na seção 2.2.2, a importância de estudar o espaço-tempo na presença de back reaction reside no fato de não haver uma teoria consistente de gravitação quântica e considerar a influência de efeitos de back reaction em primeira aproximação pode ser útil para uma análise da relação entre as teorias clássica e quântica da gravidade ou, pelo menos, fornecer a possibilidade de interpretação de como algumas interações e efeitos quânticos podem modificar a teoria clássica em pequena escala.

4.2.1 Preliminares: a relação $T_H = \frac{\kappa}{2\pi}$

Nesta seção vamos usar um procedimento encontrado em [37] que relaciona a abordagem de tunelamento e geodésicas nulas para obter, de forma geral, a relação entre temperatura e gravidade superficial $T_H = \frac{\kappa}{2\pi}$. Seja uma métrica da forma

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{1}{g(r)}dr^2 + p(r)dq^2, \quad (4.45)$$

onde estamos assumindo que a métrica tem uma forma específica em dt^2 e dr^2 , mas pode assumir formas diferentes nas demais componentes do elemento de linha, como $r^2d\Omega^2$ para uma métrica esfericamente simétrica ou $r^2d\phi^2 + \alpha^2r^2dz^2$ para o caso da simetria cilíndrica na presença de uma constante cosmológica negativa. Repare que há uma singularidade em $f(r_+) = g(r_+) = 0$ que podemos evitar se usarmos uma transformação de coordenadas de Painlevé na forma

$$dt \rightarrow dt - \sqrt{\frac{1-g(r)}{f(r)g(r)}}dr, \quad (4.46)$$

pois,

$$\begin{aligned} ds^2 &= -f(r) \left(dt - \sqrt{\frac{1-g(r)}{f(r)g(r)}}dr \right)^2 + \frac{1}{g(r)}dr^2 + p(r)dq^2 \\ &= -f(r)dt^2 + 2f(r)\sqrt{\frac{1-g(r)}{f(r)g(r)}}dtdr + dr^2 + p(r)dq^2 \end{aligned} \quad (4.47)$$

o que torna a métrica (4.45) não mais estática, refletindo a natureza do espaço-tempo. Geodésicas nulas radiais são obtidas fazendo $ds^2 = 0 = dq^2$ em (4.47):

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + 2f(r)\sqrt{\frac{1-g(r)}{f(r)g(r)}}\left(\frac{dr}{dt}\right) - f(r) = 0. \quad (4.48)$$

Definindo $\dot{r} = \frac{dr}{dt}$, podemos escrever a relação anterior como

$$\dot{r}^2 + 2\sqrt{\frac{f(r)}{g(r)}}\sqrt{1-g(r)}\dot{r} - f(r) = 0 \quad (4.49)$$

que é uma equação quadrática para \dot{r} . Agora, vamos resolver a equação acima utilizando a técnica de soma e produto. Vamos escrever a equação acima na forma padrão

$$\dot{r}^2 + B\dot{r} + C = 0. \quad (4.50)$$

Como sabemos, queremos que as duas raízes da equação, digamos r_1 e r_2 , satisfaçam as relações de Girard

$$\begin{cases} r_1 r_2 = C \\ r_1 + r_2 = -B \end{cases} \quad (4.51)$$

então suponhamos que podemos escrever

$$\begin{cases} r_1 = -\frac{B}{2} + w \\ r_2 = -\frac{B}{2} - w \end{cases} \quad (4.52)$$

que satisfazem a segunda relação de Girard e onde devemos determinar a quantidade w . Substituindo o que obtivemos acima na primeira relação de Girard vamos ter

$$\begin{aligned} r_1 r_2 &= C \\ \frac{B^2}{4} - w^2 &= C \\ w &= \pm \sqrt{\frac{B^2}{4} - C}. \end{aligned}$$

Repare que a relação acima fornece as quantidades $+w$ e $-w$ necessárias para determinar as raízes em (4.52) e com isso podemos determinar r_1 e r_2 que são as raízes de nossa equação. Utilizando esse procedimento em (4.49) com $B = 2\sqrt{\frac{f(r)}{g(r)}}\sqrt{1-g(r)} = 2f(r)\sqrt{\frac{1-g(r)}{f(r)g(r)}}$ e $C = -f(r)$, vamos ter que

$$\begin{aligned}
w &= \pm \sqrt{\frac{4f^2(1-g)}{4fg} + f} \\
&= \pm \sqrt{\frac{f}{g}},
\end{aligned}$$

o que leva nossas raízes de (4.49) a serem escritas como

$$r_1 = \sqrt{\frac{f}{g}}(1 - \sqrt{1-g}) \quad (4.53)$$

e de forma semelhante,

$$r_2 = \sqrt{\frac{f}{g}}(-1 - \sqrt{1-g}). \quad (4.54)$$

Portanto, podemos escrever que

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{f(r)}{g(r)}}(\pm 1 - \sqrt{1-g(r)}) \quad (4.55)$$

onde os sinais positivo e negativo fornecem geodésicas saindo e chegando, respectivamente. Se expandirmos as funções $f(r)$ e $g(r)$ em torno do raio do horizonte de eventos, vamos obter que

$$f(r) = f'(r_+)(r - r_+) + \mathcal{O}((r - r_+)^2), \quad (4.56)$$

$$g(r) = g'(r_+)(r - r_+) + \mathcal{O}((r - r_+)^2). \quad (4.57)$$

Então, nas proximidades do horizonte de eventos da corda negra a trajetória de uma geodésica radial que está saindo é

$$\begin{aligned}
\dot{r} &= \sqrt{\frac{f'(r_+)(r - r_+)}{g'(r_+)(r - r_+)}} [+1 - \sqrt{1 - g'(r_+)(r - r_+)}] \\
\dot{r} &= \sqrt{\frac{f'(r_+)}{g'(r_+)}} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{2}g'(r_+)(r - r_+) + \mathcal{O}((r - r_+)^2) \right) \right] \\
\dot{r} &= \sqrt{f'(r_+)g'(r_+)}(r - r_+) + \mathcal{O}((r - r_+)^2)
\end{aligned} \quad (4.58)$$

onde nós mantivemos a equação (4.55) em primeira ordem.

Queremos agora escrever a equação (4.58) em termos da gravidade superficial pelo fato de que na presença de back reaction é, geralmente, a gravidade superficial que é conhecida mesmo

que a métrica não seja [37]. A gravidade superficial para a métrica transformada (4.47) é dada por

$$\mathcal{K} = -\Gamma_{tt}^t|_{r=r_+} = \frac{1}{2} \left[\sqrt{\frac{1-g(r)}{f(r)g(r)}} g(r) \frac{df(r)}{dr} \right] \Big|_{r=r_+}. \quad (4.59)$$

Vamos tentar entender o resultado acima. Partindo da definição geral de gravidade superficial

$$\begin{aligned} \chi^\alpha \nabla_\alpha \chi^\beta &= -\mathcal{K} \chi^\beta \\ \chi^\alpha (\partial_\alpha \chi^\beta + \Gamma_{\alpha\delta}^\beta \chi^\delta) &= -\mathcal{K} \chi^\beta, \end{aligned} \quad (4.60)$$

usamos o vetor de Killing $\chi^\beta = \partial_t = (1, 0, 0, 0)$. Isso implica que

$$-\Gamma_{tt}^t = \mathcal{K} \quad \text{no horizonte de eventos} \quad (4.61)$$

já que $\alpha = \beta = \delta = t$ pois esta é a única componente não nula do vetor de Killing. Logo, como

$$\begin{aligned} \Gamma_{tt}^t|_{r=r_+} &= \frac{1}{2} g^{t\lambda} (2\partial_t g_{t\lambda} - \partial_\lambda g_{tt}) \\ \Gamma_{tt}^r|_{r=r_+} &= \frac{1}{2} g^{tr} (2\partial_t g_{tr} - \partial_r g_{tt}), \end{aligned} \quad (4.62)$$

e como nenhuma componente depende de t : $2\partial_t g_{tr} = 0$.

Tudo que precisamos agora é calcular a inversa da componente g_{tr} e substituir na equação acima para obter a equação (4.59). Usando a representação matricial da métrica (4.47) temos, fazendo $f(r) \sqrt{\frac{1-g(r)}{f(r)g(r)}} = A(r) = A$, $p(r) = p$ e $f(r) = f$ para facilitar a notação,

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -f(r) & A(r) & 0 \\ A(r) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & p(r) \end{pmatrix}$$

calculando sua inversa:

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{A^2+f} & \frac{A}{A^2+f} & 0 \\ \frac{A}{A^2+f} & \frac{f}{A^2+f} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{p} \end{pmatrix}$$

portanto, a componente procurada é $g^{tr} = \frac{A}{A^2+f}$. Voltando com $A = A(r) = f(r) \sqrt{\frac{1-g(r)}{f(r)g(r)}}$ teremos

$$\frac{A}{A^2+f} = g(r) \sqrt{\frac{(1-g(r))}{f(r)g(r)}}. \quad (4.63)$$

A substituição deste resultado na equação (4.62) e a observação de que $\partial_r g_{tt} = \frac{df(r)}{dr}$ nos leva a equação (4.59) que queremos justificar. Agora, se usarmos a expansão em série de Taylor para $f(r)$ e $g(r)$ a equação (4.59) é escrita como

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &= \frac{1}{2} \left[\sqrt{\frac{1-g(r)}{f(r)g(r)}} g(r) \frac{df(r)}{dr} \right] \Big|_{r=r_+} \\ &= \frac{1}{2} \left[\sqrt{f'(r_+)g'(r_+)} \left(1 - \frac{1}{2} g'(r-r_+) + \mathcal{O}((r-r_+)^2) \right) \right] \\ &\approx \frac{1}{2} \sqrt{f'(r_+)g'(r_+)} \end{aligned} \quad (4.64)$$

onde mantivemos apenas os termos de primeira ordem. Esse resultado em (4.58) leva a

$$\dot{r} = \mathcal{K}(M)(r-r_+) + \mathcal{O}((r-r_+)^2). \quad (4.65)$$

Consideramos agora um pacote de energia positiva que cruza o horizonte na direção externa de r_{dentro} para r_{fora} . A parte imaginária da ação S deste pacote é dada por

$$\text{Im} S = \text{Im} \int_{r_{\text{dentro}}}^{r_{\text{fora}}} p_r dr = \text{Im} \int_{r_{\text{dentro}}}^{r_{\text{fora}}} \int_0^{p_r} dp'_r dr. \quad (4.66)$$

Usando agora a equação de movimento de Hamilton $\dot{r} = \frac{dH}{dp_r}|_r$, a última igualdade acima pode ser escrita como

$$\text{Im} S = \text{Im} \int_{r_{\text{dentro}}}^{r_{\text{fora}}} \int_0^H \frac{dH'}{\dot{r}} dr, \quad (4.67)$$

onde no lugar do momento, a energia é usada como variável de integração.

Agora consideramos o efeito de autogravitação da própria partícula, para a qual (4.65) e (4.67) serão modificadas. Fazemos a mudança $M \rightarrow M - \omega$ em (4.65) e obtemos a seguinte expressão

$$\dot{r} = (r-r_+) \mathcal{K}(M - \omega), \quad (4.68)$$

onde ω é a energia de um pacote se movendo ao longo de uma geodésica do espaço-tempo.

Agora usamos o fato de que podemos escrever $H = M - \omega$ para a corda negra. Fazendo a modificação da autogravitação em (4.67), o resultado é

$$\begin{aligned} \text{Im} S &= \text{Im} \int_{r_{\text{dentro}}}^{r_{\text{fora}}} \int_M^{M-\omega} \frac{d(M-\omega)}{\dot{r}} dr \\ &= -\text{Im} \int_{r_{\text{dentro}}}^{r_{\text{fora}}} \int_0^\omega \frac{d\omega'}{\dot{r}} dr, \end{aligned} \quad (4.69)$$

onde fizemos uma mudança de variável na última igualdade: $M - \omega = \omega'$. Substituindo \dot{r} de (4.68) na equação anterior, teremos

$$\text{Im}S = -\text{Im} \int_0^\omega \frac{d\omega'}{\mathcal{K}(M - \omega')} \int_{r_{\text{dentro}}}^{r_{\text{fora}}} \frac{dr}{r - r_+}. \quad (4.70)$$

A integração em r é feita por uma deformação do contorno de integração em torno do polo r_+ seguindo um procedimento parecido ao desenvolvido em (2.48) com a exceção de que agora vamos escolher um semicírculo no semiplano complexo inferior garantindo que soluções de energia positiva decaem no tempo (ou seja, semiplano inferior do plano de ω' e $r_{\text{dentro}} > r_{\text{fora}}$). Após a integração em r , encontramos

$$\text{Im}S = \pi \int_0^\omega \frac{d\omega'}{\mathcal{K}(M - \omega')}. \quad (4.71)$$

A amplitude de tunelamento a partir da aproximação WKB é dada por

$$\Gamma \sim e^{-2\text{Im}S} = e^{\Delta S}, \quad (4.72)$$

onde o resultado é expresso mais naturalmente em termos da variação de entropia da corda negra. Para entender a última identificação ($\Gamma = e^{\Delta S}$) considere um processo no qual a corda negra emite um pacote de energia. Vamos denotar os estados inicial e final por i e f , respectivamente. No equilíbrio térmico

$$\frac{dP_i}{dt} = P_i P_{i \rightarrow f} - P_f P_{f \rightarrow i} = 0, \quad (4.73)$$

onde P_a denota a probabilidade de obter o sistema no macroestado a ($a = i, f$) e $P_{a \rightarrow b}$ denota a probabilidade de transição do estado a para o b ($a, b = i, f$). De acordo com a mecânica estatística, a entropia de um dado estado (especificado pelos seus macroestados) é uma função logarítmica do número total de microestados ($S = \log \Omega$). Então, o número de microestados Ω de uma corda negra é e^S . Como a probabilidade de obter um sistema em um macroestado particular é proporcional ao número de microestados disponíveis para esta configuração, obtemos a partir de (4.73),

$$e^{S_i} P_{\text{emissão}} = e^{S_f} P_{\text{absorção}} \quad (4.74)$$

onde $P_{\text{emissão}}$ é a probabilidade de emissão $P_{i \rightarrow f}$, e $P_{\text{absorção}}$ é a probabilidade de absorção $P_{f \rightarrow i}$. Então, a amplitude de tunelamento é

$$\Gamma = \frac{P_{\text{emissão}}}{P_{\text{absorção}}} = e^{S_f - S_i} = e^{\Delta S}, \quad (4.75)$$

levando então à correspondência

$$\Delta S = -2\text{Im}S, \quad (4.76)$$

a qual segue de (4.72).

Com o objetivo de escrever a entropia da corda negra em termos de sua massa, nós temos que substituir o valor de ω em termos de M para o qual a corda negra é estável, isto é

$$\frac{d(\Delta S)}{d\omega} = 0. \quad (4.77)$$

Usando (4.71) e (4.76) na equação acima nós vamos alcançar

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{d}{d\omega} \text{Im} S \\ &= -\pi \frac{d}{d\omega} \int_0^\omega \frac{d\omega'}{\mathcal{K}(M-\omega')} \\ &= \pi \int_0^\omega \frac{d}{d\omega} \frac{d\omega'}{\mathcal{K}(M-\omega')} \\ &= \frac{1}{\mathcal{K}(M-\omega)}, \end{aligned} \quad (4.78)$$

onde dividimos os dois membros da última igualdade por π . As raízes dessa equação são escritas na forma

$$\omega = \varphi(M), \quad (4.79)$$

o que significa

$$\frac{1}{\mathcal{K}(M-\varphi(M))} = 0. \quad (4.80)$$

Este valor de ω da equação (4.79) é substituído de volta na expressão de ΔS para resultar

$$\Delta S = -2\pi \int_0^{\varphi(M)} \frac{d\omega'}{\mathcal{K}(M-\omega')}. \quad (4.81)$$

Tendo obtido a forma da mudança de entropia, estamos agora aptos a encontrar uma expressão para a entropia de um estado particular. Pela definição de variação de entropia

$$\Delta S = S_{\text{final}} - S_{\text{inicial}}. \quad (4.82)$$

Agora escolhendo a entropia da corda negra no estado final como sendo zero, nós obtemos a expressão para a entropia procurada

$$S = S_{\text{inicial}} = -\Delta S = 2\pi \int_0^{\varphi(M)} \frac{d\omega'}{\mathcal{K}(M-\omega')}. \quad (4.83)$$

Da segunda lei da termodinâmica, nós escrevemos o inverso da temperatura da corda negra como

$$\frac{1}{T_H} = \frac{dS}{dM} = 2\pi \frac{d}{dM} \int_0^{\varphi(M)} \frac{d\omega'}{\mathcal{K}(M-\omega')}. \quad (4.84)$$

Usando agora a identidade

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x, b(x))b'(x) - f(x, a(x))a'(x) + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) dt \quad (4.85)$$

para

$$F(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(x, t) dt, \quad (4.86)$$

vemos que o limite inferior da integral $a(x) = 0$ em nosso caso, por isso o segundo termo da identidade acima será nulo. O último termo depende da derivada do integrando que em nosso caso é

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, t) = -\frac{1}{[\mathcal{K}(M - \omega')]^2} \frac{\partial \mathcal{K}(M - \omega')}{\partial (M - \omega')}, \quad (4.87)$$

logo,

$$\frac{1}{T_H} = 2\pi \left[\frac{\varphi'(M)}{\mathcal{K}(M - \varphi(M))} - \int_0^{\varphi(M)} \frac{1}{[\mathcal{K}(M - \omega')]^2} \frac{\partial \mathcal{K}(M - \omega')}{\partial (M - \omega')} \right]. \quad (4.88)$$

Note que fazendo $x = M - \omega'$ na integral acima nós obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^{\varphi(M)} \frac{1}{[\mathcal{K}(M - \omega')]^2} \frac{\partial \mathcal{K}(M - \omega')}{\partial (M - \omega')} d\omega' &= - \int_M^{M - \varphi(M)} \frac{1}{[\mathcal{K}(x)]^2} \frac{\partial \mathcal{K}(x)}{\partial (x)} dx \\ &= - \left[\frac{1}{\mathcal{K}(M - \varphi(M))} - \frac{1}{\mathcal{K}(M)} \right]. \end{aligned} \quad (4.89)$$

Substituindo este resultado na equação anterior para a temperatura, obteremos

$$\frac{1}{T_H} = 2\pi \left[\frac{\varphi'(M) - 1}{\mathcal{K}(M - \varphi(M))} + \frac{1}{\mathcal{K}(M)} \right]. \quad (4.90)$$

Finalmente, fazendo uso da equação (4.80) segue a relação para a temperatura

$$T_H = \frac{\mathcal{K}}{2\pi} = \frac{1}{4\pi} \sqrt{f'(r_+)g'(r_+)}. \quad (4.91)$$

Para uma checagem de coerência, considere a segunda lei da termodinâmica, a qual é agora escrita como

$$dM = d\omega' = T_H dS = \frac{\mathcal{K}(M)}{2\pi} dS. \quad (4.92)$$

Inserindo esta relação em (4.71), obtemos

$$\text{Im } S = \frac{1}{2} \int_{S_B(M)}^{S_B(M - \omega)} dS = -\frac{1}{2} \Delta S. \quad (4.93)$$

que reproduz (4.76). Isso mostra a consistência interna da abordagem.

O trabalho realizado nesta seção representa uma justificativa para o uso da expressão (2.64) (e conseqüentemente a relação (2.66)) apresentada na seção 2.2.2, uma vez que pudemos demonstrar a veracidade da relação $T_H = \mathcal{K}/2\pi$ que é o ponto de início para a análise da influência de back reaction apreciada neste trabalho. Começamos dando atenção para o espaço-tempo comutativo e, em seguida partimos para o estudo no espaço-tempo não-comutativo a exemplo do que fizemos com a análise dos aspectos da energia livre nas seções 4.1.2 e 4.1.2. O motivo para proceder desta maneira é o mesmo: uma vez que é de interesse verificar os resultados de forma a tentar manter consistência dos mesmos, é importante que tenhamos em mãos resultados provenientes das inspeções nos espaços-tempos comutativo e não-comutativo para comparação.

4.2.2 Back reaction no espaço-tempo comutativo

O elemento de linha que descreve o comportamento do espaço-tempo comutativo da corda negra é aquele apresentado em (4.2), e com o formalismo que acabamos de apresentar, vemos que $f(r) = g(r)$ o que significa que a equação (4.91) se reduz a

$$\mathcal{K}_0(r_+) = \frac{1}{2}f'(r_+) = \frac{3\alpha^2}{2}r_+. \quad (4.94)$$

Onde utilizamos a relação (4.3) para escrever $f'(r_+)$. A substituição da equação anterior na equação (2.66)

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_0(r_+) \left(1 + \frac{\sigma}{M^2(r_+)} \right) \quad (2.66 \text{ revisitada})$$

resulta em

$$\mathcal{K} = \frac{3\alpha^2}{2}r_+ \left(1 + \frac{16\sigma}{\alpha^6 r_+^6} \right), \quad (4.95)$$

onde fizemos uso novamente da relação (4.3) para escrever o resultado em termos de r_+ e utilizando a relação (4.91) podemos escrever que

$$\mathcal{T}_H^{(c)} = \frac{3\alpha^2}{4\pi}r_+ \left(1 + \frac{16\sigma}{\alpha^6 r_+^6} \right). \quad (4.96)$$

Repare que a expressão (4.96) se reduz a forma obtida sem back reaction (4.13) se consideramos $\sigma = 0$, como esperado. Portanto, podemos escrever

$$\mathcal{T}_H^{(c)} = T_H^{(c)} \left(1 + \frac{16\sigma}{\alpha^6 r_+^6} \right). \quad (4.97)$$

Utilizando a primeira lei da termodinâmica na forma $dM = TdS$ teremos a capacidade calorífica dada por

$$\mathcal{C}^{(c)} = \frac{\mathcal{T}_H^{(c)} \partial \mathcal{S}^{(c)}}{\partial \mathcal{T}_H^{(c)}} = \frac{\left(\frac{\partial M_+}{\partial r_+} \right)}{\left(\frac{\partial \mathcal{T}_H^{(c)}}{\partial r_+} \right)}. \quad (4.98)$$

Agora, usando a relação do horizonte de eventos (4.3), nós encontramos

$$\frac{\partial M_+}{\partial r_+} = \frac{3}{4} \alpha^3 r_+^2, \quad (4.99)$$

e usando (4.96),

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{T}_H^{(c)}}{\partial r_+} &= \frac{3\alpha^2}{4\pi} \left[\left(1 + \frac{16\sigma}{\alpha^6 r_+^6} \right) + r_+ \left(\frac{-96\sigma}{\alpha^6 r_+^7} \right) \right] \\ &= \frac{3\alpha^2}{4\pi} \left(1 - \frac{80\sigma}{\alpha^6 r_+^6} \right). \end{aligned}$$

Isso nos leva a

$$\mathcal{C}^{(c)} = \frac{\pi \alpha r_+^2}{\left(1 - \frac{80\sigma}{\alpha^6 r_+^6} \right)}. \quad (4.100)$$

Se comparamos com (4.22) podemos escrever

$$\mathcal{C}^{(c)} = \frac{\mathcal{C}_+^{(c)}}{\left(1 - \frac{80\sigma}{\alpha^6 r_+^6} \right)}. \quad (4.101)$$

A expressão acima fornece (4.22) ao tomarmos $\sigma = 0$, como esperado.

Para calcular a variação de entropia, a estratégia é obter uma expressão para a parte imaginária da ação e usar a relação (4.76). Partindo de (4.95), vamos escrever a gravidade superficial \mathcal{K} em termos da massa M_+ fazendo uso mais uma vez de (4.3):

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(r_+) &= \frac{3}{2} \alpha^2 r_+ \left(1 + \frac{16\sigma}{\alpha^6 r_+^6} \right) \\ \mathcal{K}(M_+) &= \frac{3}{2^{\frac{1}{3}}} \alpha M_+^{\frac{1}{3}} \left(1 + \frac{\sigma}{M_+^2} \right), \end{aligned} \quad (4.102)$$

e podemos agora substituir a expressão acima na integral que fornece a parte imaginária da ação (4.71) e integrar sobre ω' . Teremos

$$\begin{aligned}
\text{Im S} &= \frac{2^{\frac{1}{3}} \pi}{3 \alpha} \int_0^\omega \frac{d\omega'}{(M_+ - \omega')^{\frac{1}{3}} \left[1 + \frac{\sigma}{(M_+ - \omega')^2} \right]} \\
&= \frac{2^{\frac{1}{3}} \pi}{3 \alpha} \int_0^\omega \frac{(M_+ - \omega')^2}{\left[(M_+ - \omega')^{\frac{7}{3}} + \sigma (M_+ - \omega')^{\frac{1}{3}} \right]} d\omega', \tag{4.103}
\end{aligned}$$

que após o processo de integração, que pode ser inspecionado consultando-se a seção B.1, e uso da relação $\Delta S^{(c)} = -2 \text{Im S}$ resulta

$$\begin{aligned}
\Delta S^{(c)} &= 2^{\frac{1}{3}} \frac{\pi}{\alpha} \left\{ (M_+ - \omega)^{\frac{2}{3}} - \sigma^{\frac{1}{3}} \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \arctan \left[\frac{\sqrt{3}}{3} \left(\frac{2(M_+ - \omega)^{\frac{2}{3}}}{\sigma^{\frac{1}{3}}} - 1 \right) \right] \right. \right. \\
&+ \left. \frac{1}{3} \ln \left[(M_+ - \omega)^{\frac{2}{3}} + \sigma^{\frac{1}{3}} \right] - \frac{1}{6} \ln \left[(M_+ - \omega)^{\frac{4}{3}} - \sigma^{\frac{1}{3}} (M_+ - \omega)^{\frac{2}{3}} + \sigma^{\frac{1}{3}} \right] \right) \\
&- M_+^{\frac{2}{3}} + \sigma^{\frac{1}{3}} \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \arctan \left[\frac{\sqrt{3}}{3} \left(\frac{2M_+^{\frac{2}{3}}}{\sigma^{\frac{1}{3}}} - 1 \right) \right] + \frac{1}{3} \ln (M_+^{\frac{2}{3}} + \sigma^{\frac{1}{3}}) \right. \\
&\left. \left. - \frac{1}{6} \ln (M_+^{\frac{4}{3}} - \sigma^{\frac{1}{3}} M_+^{\frac{2}{3}} + \sigma^{\frac{1}{3}}) \right) \right\}. \tag{4.104}
\end{aligned}$$

A equação (4.104) acima fica bastante simples se fazemos $\sigma = 0$, o que significa desconsiderar o efeito de back reaction:

$$\Delta S^{(c)} \Big|_{\sigma=0} = \Delta S_+^{(c)} = 2^{\frac{1}{3}} \frac{\pi}{\alpha} \left[(M_+ - \omega)^{\frac{2}{3}} - M_+^{\frac{2}{3}} \right]. \tag{4.105}$$

Para confirmar que a equação (4.105) acima realmente fornece a variação de entropia correta para o caso sem a presença de back reaction, podemos calcular ΔS_+ diretamente da primeira lei da termodinâmica:

$$S_+^{(c)} = \int \frac{dM_+}{T_H^{(c)}} \tag{4.106}$$

onde T_H é dada em (4.13) em termos de r_+ e vamos reescrevê-la em termos de M_+ :

$$T_H^{(c)}(M_+) = \frac{3\alpha^2}{4\pi} r_+ = \frac{3}{2^{\frac{2}{3}}} \frac{\alpha}{\pi} M_+^{\frac{1}{3}}, \tag{4.107}$$

logo,

$$S_+^{(c)}(M_+) = \frac{2^{\frac{1}{3}} \pi}{3 \alpha} \int M_+^{-\frac{1}{3}} dM_+ = 2^{\frac{1}{3}} \frac{\pi}{\alpha} M_+^{\frac{2}{3}}. \tag{4.108}$$

De forma análoga,

$$S_+^{(c)}(M_+ - \omega) = 2^{\frac{1}{3}} \frac{\pi}{\alpha} (M_+ - \omega)^{\frac{2}{3}}, \quad (4.109)$$

de forma que pelas duas expressões anteriores

$$\Delta S_+^{(c)} = S_+^{(c)}(M_+ - \omega) - S_+^{(c)}(M_+) = 2^{\frac{1}{3}} \frac{\pi}{\alpha} \left[(M_+ - \omega)^{\frac{2}{3}} - M_+^{\frac{2}{3}} \right], \quad (4.110)$$

que confirma (4.105).

Partindo para o estudo da energia livre, utilizamos a equação (4.102) para expressar a temperatura em termos da massa M_+ como

$$\mathcal{T}_H^{(c)}(M_+) = \frac{3\alpha}{2^{\frac{4}{3}}\pi} M_+^{\frac{1}{3}} \left(1 + \frac{\sigma}{M_+^2} \right). \quad (4.111)$$

Nossa estratégia aqui é proceder com o ponto de vista de uma variação de massa expressa no intervalo $[M_0, M_+]$ uma vez que consideramos que a corda negra evapora sua massa a partir de um valor inicial M_0 até certo valor M_+ . Como sabemos, podemos escrever a temperatura dentro de uma cavidade cilíndrica de raio finito R ponderada pelo fator de redshift como

$$\mathcal{T}^{(c)} = \frac{\mathcal{T}_H^{(c)}}{\sqrt{g_{tt}(R)}} \quad (4.112)$$

seguindo o procedimento da seção 4.1.2, a energia interna se torna

$$\mathcal{E}^{(c)} = M_0 + \int_{S_0}^{S_+} \mathcal{T}^{(c)} dS^{(c)} = M_0 + \int_{M_0}^{M_+} \mathcal{T}^{(c)} \frac{dM'_+}{\mathcal{T}_H^{(c)}}, \quad (4.113)$$

onde usamos a relação $dM_+ = \mathcal{T}_H^{(c)} dS^{(c)}$. Substituindo $\mathcal{T}^{(c)}$ vamos ter

$$\mathcal{E}^{(c)} = M_0 + \int_{M_0}^{M_+} \frac{\mathcal{T}_H^{(c)}}{\sqrt{g_{tt}(R)}} \frac{dM'_+}{\mathcal{T}_H^{(c)}} = M_0 + \int_{M_0}^{M_+} \frac{dM'_+}{\sqrt{g_{tt}(R)}}. \quad (4.114)$$

Como o termo $g_{tt}(R)$ refere-se à métrica (4.2), ele é

$$g_{tt}(R) = \alpha^2 R^2 - \frac{4M_+}{\alpha R}$$

e a integral anterior fica completamente expressa em termos de M_+ como segue

$$\mathcal{E}^{(c)} = M_0 + \int_{M_0}^{M_+} \frac{dM'_+}{\left[\alpha^2 R^2 - \frac{4M'_+}{\alpha R} \right]^{\frac{1}{2}}}, \quad (4.115)$$

de forma que se utilizamos uma substituição simples para resolvê-la como $u = \alpha^2 R^2 - \frac{4M'_+}{\alpha R}$, encontramos

$$\mathcal{E}^{(c)} = M_0 - \frac{\alpha^2 R^2}{2} \left[\left(1 - \frac{4M_+}{\alpha^3 R^3} \right)^{\frac{1}{2}} - \left(1 - \frac{4M_0}{\alpha^3 R^3} \right)^{\frac{1}{2}} \right]. \quad (4.116)$$

Para caráter de verificação, podemos utilizar a relação (4.3), que relaciona M_+ e r_+ por $M_+ = \alpha^3 r_+^3/4$, e escrever a equação (4.116) em termos do raio do horizonte de eventos como segue

$$\mathcal{E}^{(c)} = M_0 - \frac{\alpha^2 R^2}{2} \left[\left(1 - \frac{r_+^3}{R^3}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(1 - \frac{r_0^3}{R^3}\right)^{\frac{1}{2}} \right] = E^{(c)}, \quad (4.117)$$

onde $E^{(c)}$ foi obtida anteriormente na relação (4.29). Ou seja, a energia interna do sistema não é alterada pela presença de back reaction.

Vamos agora calcular a energia livre associada por meio de

$$\mathcal{F}^{(c)} = \mathcal{E}^{(c)} - T^{(c)} \mathcal{S}^{(c)}, \quad (4.118)$$

de onde vemos imediatamente que, diferente da energia interna, a energia livre terá correções devido a presença de back reaction visto que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{(c)} &= \mathcal{E}^{(c)} - \frac{\mathcal{T}_H^{(c)}}{\sqrt{g_{tt}(R)}} \mathcal{S}^{(c)} \\ &= \mathcal{E}^{(c)} - \frac{3\alpha}{2^{\frac{4}{3}}\pi} M_+^{\frac{1}{3}} \left(1 + \frac{\sigma}{M_+^2}\right) \frac{1}{\left[\alpha^2 R^2 - \frac{4M_+}{\alpha R}\right]^{\frac{1}{2}}} \mathcal{S}^{(c)}, \end{aligned}$$

e agora lembrando a equação (4.104) aplicada para um valor de massa M_+ :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^{(c)}(M_+) &= 2^{1/3} \frac{\pi}{\alpha} \left\{ M_+^{2/3} + \sigma^{1/3} \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \arctan \left[\frac{\sqrt{3}}{3} \left(\frac{2M_+^{2/3}}{\sigma^{1/3}} - 1 \right) \right] + \frac{1}{3} \ln(M_+^{2/3} + \sigma^{1/3}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{6} \ln(M_+^{4/3} - \sigma^{1/3} M_+^{2/3} + \sigma^{1/3}) \right) \right\}, \end{aligned}$$

basta agora substituir a expressão acima para encontrar a energia livre associada ao nosso sistema

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{(c)} &= M_0 - \frac{\alpha^2 R^2}{2} \left[\left(1 - \frac{4M_+}{\alpha^3 R^3}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(1 - \frac{4M_0}{\alpha^3 R^3}\right)^{\frac{1}{2}} \right] - \frac{3\alpha}{2^{\frac{4}{3}}\pi} \frac{M_+^{\frac{1}{3}}}{\alpha R \left[1 - \frac{4M_+}{\alpha^3 R^3}\right]^{\frac{1}{2}}} \left(1 + \frac{\sigma}{M_+^2}\right) \\ &\quad \cdot 2^{1/3} \frac{\pi}{\alpha} \left\{ M_+^{2/3} + \sigma^{1/3} \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \arctan \left[\frac{\sqrt{3}}{3} \left(\frac{2M_+^{2/3}}{\sigma^{1/3}} - 1 \right) \right] + \frac{1}{3} \ln(M_+^{2/3} + \sigma^{1/3}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{6} \ln(M_+^{4/3} - \sigma^{1/3} M_+^{2/3} + \sigma^{1/3}) \right) \right\}. \end{aligned} \quad (4.119)$$

Vale a pena notar que se fazemos $\sigma = 0$ na equação (4.119), recuperamos o resultado (4.31) obtido antes sem a correção de back reaction. Para que isso fique claro, basta escrevermos o resultado (4.119) em termos de r_+ usando a conhecida relação $M_+ = \alpha^3 r_+^3/4$ [equação (4.3)]:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{(c)}\Big|_{\sigma=0} &= M_0 + \frac{\alpha^2 R^2}{2} \left[\left(1 - \frac{4M_0}{\alpha^3 R^3}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(1 - \frac{4M_+}{\alpha^3 R^3}\right)^{\frac{1}{2}} \right] - \frac{3}{2} \frac{(M_+^{\frac{1}{3}} M_+^{\frac{2}{3}})}{\alpha R \left[1 - \frac{4M_+}{\alpha^3 R^3}\right]^{\frac{1}{2}}} \\
&= M_0 + \frac{\alpha^2 R^2}{2} \left[\left(1 - \frac{4M_0}{\alpha^3 R^3}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(1 - \frac{4M_+}{\alpha^3 R^3}\right)^{\frac{1}{2}} \right] - \frac{3}{2} \frac{M_+^{\frac{1}{3}}}{\alpha R \left[1 - \frac{4M_+}{\alpha^3 R^3}\right]^{\frac{1}{2}}} \\
&= M_0 + \frac{\alpha^2 R^2}{2} \left[\left(1 - \frac{r_0^3}{R^3}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(1 - \frac{r_+^3}{R^3}\right)^{\frac{1}{2}} \right] - \frac{3}{8} \frac{\alpha^3 r_+^3}{\alpha R \left[1 - \frac{4M_+}{\alpha^3 R^3}\right]^{\frac{1}{2}}} \\
&= M_0 + \frac{\alpha^2 R^2}{2} \left[\left(1 - \frac{r_0^3}{R^3}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(1 - \frac{r_+^3}{R^3}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{3}{4} \frac{r_+^3/R^3}{\left(1 - \frac{r_+^3}{R^3}\right)^{\frac{1}{2}}} \right] = F^{(c)}, \quad (4.120)
\end{aligned}$$

onde $F^{(c)}$ foi obtido na equação (4.31). Com esta verificação, estabelecemos a consistência em nossos procedimentos matemáticos desenvolvidos.

4.2.3 Back reaction no espaço-tempo não-comutativo

Considerando a não-comutatividade do espaço-tempo, utilizamos o elemento de linha em (4.4) e a expressão (4.91) para calcular a gravidade superficial. Repare que, se tratando da corda negra, teremos $f(r) = g(r)$ na equação (4.91) de forma que encontramos

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_0 &= \frac{f'(r_+)}{2} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ 2\alpha^2 r - \frac{8M_+}{\sqrt{\pi}\alpha} \left[-\frac{1}{r_+^2} \gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r_+^2}{4\theta}\right) + \frac{1}{r_+} \frac{d}{dr_+} \gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r_+^2}{4\theta}\right) \right] \right\}. \quad (4.121)
\end{aligned}$$

Fazemos uso da relação encontrada na seção A.2 e da regra da cadeia para a derivada da função γ :

$$\frac{d}{dr_+} \gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r_+^2}{4\theta}\right) = \frac{r_+^2}{4\theta^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{r_+^2}{4\theta}}, \quad (4.122)$$

de forma que podemos escrever

$$\mathcal{K}_0 = \frac{3\alpha^2 r_+}{2} - \frac{\alpha^2 r_+^4}{8\theta^{\frac{3}{2}}} \frac{e^{-\frac{r_+^2}{4\theta}}}{\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r_+^2}{4\theta}\right)}, \quad (4.123)$$

onde esta equação foi alcançada com auxílio de (4.5). O efeito back reaction atuando sobre a gravidade superficial no espaço-tempo não-comutativo se traduz como

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_0(r_+) \left(1 + \frac{\sigma}{m_\theta^2(r_+)} \right), \quad (4.124)$$

onde m_θ é apresentada em

$$m_\theta(r) = \frac{2M}{\sqrt{\pi}} \gamma \left(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\theta} \right), \quad (3.8 \text{ revisitada})$$

e a gravidade superficial fica na seguinte forma se usamos a equação (4.123):

$$\mathcal{K} = \frac{\alpha^2 r_+}{2} \left[3 - \frac{r_+^3}{4\theta^{3/2}} \frac{e^{-\frac{r_+^2}{4\theta}}}{\gamma \left(\frac{3}{2}, \frac{r_+^2}{4\theta} \right)} \right] \left(1 + \frac{\sigma}{m_\theta^2(r_+)} \right). \quad (4.125)$$

Agora devemos notar que podemos obter uma relação simples entre $m_\theta(r_+)$ e r_+ se consideramos (3.8) avaliada em r_+ com auxílio de

$$M_+ = \frac{\sqrt{\pi}\alpha^3}{8} \frac{r_+^3}{\gamma \left(\frac{3}{2}, \frac{r_+^2}{4\theta} \right)}, \quad (4.6 \text{ revisitada})$$

de forma que é encontrado

$$m_\theta(r_+) = \frac{1}{4} \alpha^3 r_+^3. \quad (4.126)$$

Logo, teremos

$$\mathcal{K} = \frac{\alpha^2 r_+}{2} \left[3 - \frac{r_+^3}{4\theta^{3/2}} \frac{e^{-\frac{r_+^2}{4\theta}}}{\gamma \left(\frac{3}{2}, \frac{r_+^2}{4\theta} \right)} \right] \left(1 + \frac{16\sigma}{\alpha^6 r_+^6} \right), \quad (4.127)$$

e usando $\mathcal{T}_H = \frac{\mathcal{K}}{2\pi}$ [relação (4.91)], obtemos

$$\mathcal{T}_H = \frac{\alpha^2 r_+}{4\pi} \left[3 - \frac{r_+^3}{4\theta^{3/2}} \frac{e^{-\frac{r_+^2}{4\theta}}}{\gamma \left(\frac{3}{2}, \frac{r_+^2}{4\theta} \right)} \right] \left(1 + \frac{16\sigma}{\alpha^6 r_+^6} \right). \quad (4.128)$$

Podemos fazer algumas verificações acerca do resultado (4.128) acima. Investigamos o seu comportamento no limite $r_+/\sqrt{\theta} \rightarrow \infty$, ou seja, investigamos o comportamento do termo negativo entre colchetes acima quando r_+ é muitas ordens de grandeza maior que $\sqrt{\theta}$ o que representa o limite do espaço-tempo comutativo. O que esperamos é que, nesse limite, o resultado acima reproduza (4.96). Desenvolvendo, com a simplificação $x = r_+/\sqrt{\theta}$, encontramos

$$\begin{aligned}
L &= \lim_{\frac{r_+}{\sqrt{\theta}} \rightarrow \infty} \left[\frac{r_+^3}{4\theta^{3/2}} \frac{e^{-\frac{r_+^2}{4\theta}}}{\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r_+^2}{4\theta}\right)} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[-\frac{x^3}{4} \frac{e^{-\frac{x^2}{4}}}{\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{x^2}{4}\right)} \right] \\
&= -\frac{1}{4} \left[\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{x^2}{4}\right)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{e^{\frac{x^2}{4}}} \right] \quad \text{regra de L'Hôpital} \\
&= -\frac{1}{4} \left[\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{x^2}{4}\right)} 6 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{xe^{\frac{x^2}{4}}} \right] \\
&= -\frac{1}{4} \left[\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{x^2}{4}\right)} 6 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^{\frac{x^2}{4}}} \right] \quad \text{regra de L'Hôpital} \\
&= -\frac{1}{4} \left[\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{x^2}{4}\right)} 12 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{xe^{\frac{x^2}{4}}} \right] \\
&= 0, \tag{4.129}
\end{aligned}$$

onde usamos repetidas vezes a regra de L'Hôpital para resolver os impasses (∞/∞). Logo, (4.128) fica

$$\mathcal{T}_H^{(c)} = \frac{3\alpha^2}{4\pi} r_+ \left(1 + \frac{16\sigma}{\alpha^6 r_+^6} \right), \tag{4.130}$$

que é idêntica à equação (4.96) obtida anteriormente sem a consideração da não-comutatividade. Também vale a pena notar que se desconsideramos o efeito de back reaction, a equação para a temperatura (4.128) se reduz ao resultado esperado para o caso não-comutativo (4.9). É fácil ver isso se notarmos que o termo negativo entre colchetes em (4.128) é o mesmo que $-\frac{\gamma'}{\gamma} r_+$ por (4.122). Ou seja, (4.128) pode ser escrita como

$$\mathcal{T}_H = \frac{\alpha^2 r_+}{4\pi} \left[3 - \frac{\gamma'\left(\frac{3}{2}, \frac{r_+^2}{4\theta}\right)}{\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r_+^2}{4\theta}\right)} r_+ \right] \left(1 + \frac{16\sigma}{\alpha^6 r_+^6} \right), \tag{4.131}$$

ou,

$$\mathcal{T}_H = T_H \left(1 + \frac{16\sigma}{\alpha^6 r_+^6} \right). \tag{4.132}$$

Temos um gráfico ilustrado na figura 4.6 associado ao resultado (4.132). O que percebemos é que a presença do efeito de back reaction muda completamente o comportamento da temperatura tanto nos casos comutativo e não-comutativo quando o raio do horizonte de eventos aproxima-se de zero. A curva de temperatura na presença de back reaction aumenta dramaticamente quando $r_+/\sqrt{\theta}$ se aproxima de zero. Investigando a figura 4.6, percebemos que o

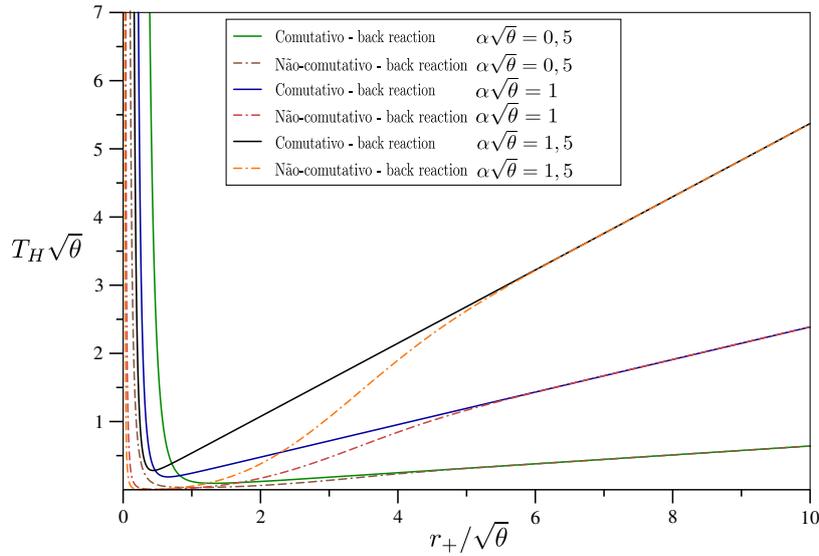


Figura 4.6: Comportamento da temperatura considerando-se efeitos de back reaction para vários valores do parâmetro $\alpha \sqrt{\theta}$. Temos $\sigma = 10^{-3}$

efeito back reaction tem relevância apenas para comprimentos muito curtos, a diferença no comportamento para quando o efeito não é considerado acontece na escala de, no máximo, $\sqrt{\theta}$. Ressaltemos que nossa premissa é assumir a não-comutatividade que por consequência significa abandonar a noção de ponto e considerar que não existem distâncias menores que o comprimento mínimo característico do espaço-tempo dado por $\sqrt{\theta}$. Com efeito, comprimentos menores que esse valor não fazem sentido, e portanto, não devem representar sistemas físicos. Analisando o gráfico citado, vemos que a influência do efeito back reaction é realmente significativa na faixa de distâncias menores que o comprimento mínimo, ou seja, a temperatura Hawking do buraco negro cilíndrico não sofre alterações em nosso estudo uma vez que, como acabamos de concluir, esta escala não representa uma faixa de distâncias aceitáveis. Neste ponto é importante destacar que utilizamos, para todo o estudo considerando a presença de back reaction, utilizamos $\sigma = 10^{-3}$. Lembremos aqui que todos os gráficos deste capítulo estão normalizados por $\sqrt{\theta}$ que fornece a escala do problema (escala de Planck) e assim o valor escolhido representa a escolha do fator numérico β para expressar $\sigma = \beta M_p^2$ como o parâmetro de perturbação de back reaction.

Observando a figura 4.6, entende-se que com o aumento do valor do parâmetro $\alpha \sqrt{\theta}$ os valores de temperatura também aumentam, entretanto, a influência do efeito back reaction sobre cada curva de temperatura permanece inalterada. A figura representa uma ilustração da verificação das equações (4.97) e (4.132) haja vista que é possível ver que para grandes distâncias as curvas geradas com previsão de back reaction sobrepõem as curvas de temperatura sem a consideração de tal efeito.

Vamos agora nos voltar para a capacidade calorífica e averiguar a estabilidade da corda negra na presença de back reaction sob a perspectiva do espaço-tempo não-comutativo. Partindo de

$$C = \frac{\left(\frac{\partial M_+}{\partial r_+}\right)}{\left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial r_+}\right)}.$$

e calculando cada termo, encontramos

$$\frac{\partial M_+}{\partial r_+} = \frac{\alpha^3 \sqrt{\pi}}{8} \frac{\partial}{\partial r_+} \left(\frac{r_+^3}{\gamma} \right) = \frac{\alpha^3 \sqrt{\pi}}{8} (3r_+^2 \gamma - r_+^3 \gamma'), \quad (4.133)$$

onde usamos (4.6). Agora, usando (4.128), teremos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial r_+} &= \frac{\alpha^2}{4\pi} \frac{\partial}{\partial r_+} \left[\left(3r_+ - \frac{\gamma' r_+^2}{\gamma} \right) \left(1 + \frac{16\sigma}{\alpha^6 r_+^6} \right) \right] \\ &= \frac{\alpha^2}{4\pi} \left\{ 3 - \left[\frac{(\gamma'' r_+^2 + 2\gamma' r_+) \gamma - (\gamma' r_+^2) \gamma'}{\gamma^2} \right] \right\} \left(1 + \frac{16\sigma}{\alpha^6 r_+^6} \right) \\ &+ \frac{\alpha^2}{4\pi} \left\{ \left(3r_+ - \frac{\gamma' r_+^2}{\gamma} \right) \left(-6 \frac{16\sigma}{\alpha^6 r_+^7} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (4.134)$$

O que precisamos fazer agora é dividir a equação (4.133) pela equação (4.134) para obter uma expressão para a capacidade calorífica. Após essa operação e alguma manipulação, obtemos

$$C = \frac{\pi^{3/2}}{2} \alpha r_+^2 \frac{\left(3 - \frac{\gamma'}{\gamma} r_+ \right)}{\left[3\gamma - \gamma' r_+^2 - 2\gamma' r_+ + \frac{\gamma^2}{\gamma} r_+^2 - \frac{16\sigma}{\alpha^6 r_+^6} \left(15\gamma + \gamma' r_+^2 - 4\gamma' r_+ - \frac{\gamma^2}{\gamma} r_+^2 \right) \right]}. \quad (4.135)$$

Onde mais uma vez vemos que se fizermos $\sigma = 0$, obtemos o resultado esperado para o caso não-comutativo (4.21). Isso fica mais claro se reescrevemos a equação anterior em termos de C_+ encontramos

$$C = \frac{C_+}{1 - \frac{16\sigma}{\alpha^6 r_+^6} \left[\frac{15\gamma + r_+ \left(\gamma' r_+ - 4\gamma + \frac{\gamma^2}{\gamma} r_+ \right)}{3\gamma - r_+ \left(\gamma' r_+ + 2\gamma - \frac{\gamma^2}{\gamma} r_+ \right)} \right]}. \quad (4.136)$$

Diferentemente da temperatura, a capacidade calorífica sofre influência do efeito back reaction no regime físico ($r_+ \geq \sqrt{\theta}$) e existem várias implicações. Primeiramente, investigando o caso comutativo (curva laranja no gráfico 4.7), o qual é apresentado com a configuração $\alpha\sqrt{\theta} = 0,5$, podemos apontar que a assíntota vertical mostrada localiza-se no ponto $r_+ = 1,35\sqrt{\theta}$. Este ponto divide o gráfico da capacidade calorífica em duas regiões: a região $r_+ < 1,35\sqrt{\theta}$ caracteriza-se por valores negativos o que indica instabilidade termodinâmica e $C_+/\sqrt{\theta}$ continua assumindo valores cada vez mais negativos de forma que assintotam a reta vertical em 1,35; a região $r_+ > 1,35\sqrt{\theta}$ caracteriza-se por valores positivos, indicando

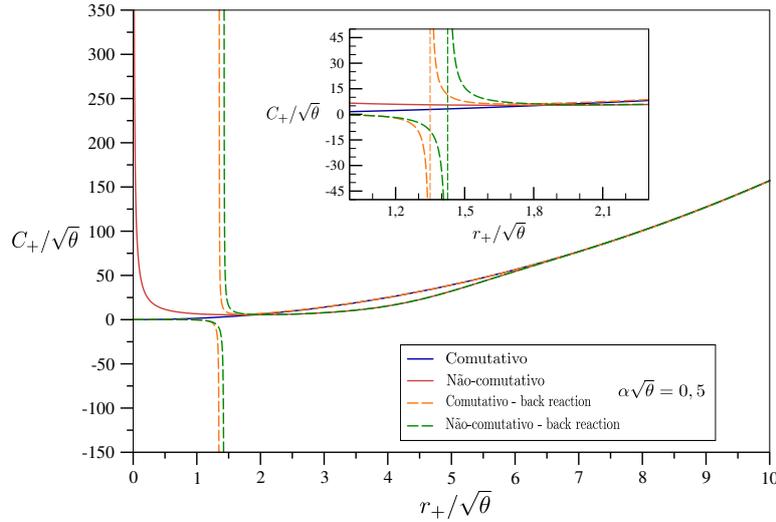


Figura 4.7: Capacidade calorífica com a configuração $\alpha\sqrt{\theta} = 0,5$ e $\sigma = 10^{-3}$.

estabilidade termodinâmica nessa região. Observando o ponto $r_+ = 1,35\sqrt{\theta}$, ponto cujos valores de capacidade calorífica assintotam positivamente à direita e negativamente à esquerda, podemos dizer que este é um ponto de descontinuidade e, como acabamos de interpretar, representa um ponto de mudança de comportamento (instabilidade à esquerda para estabilidade à direita). Estamos, então, lidando com uma transição de fase termodinâmica para a corda negra. Temos uma transição de fase de primeira ordem como consequência do efeito back reaction: a perturbação do sistema que consideramos, e expressamos como a perturbação sobre a gravidade superficial na equação (2.64), causa uma quebra de simetria no sistema, que é a quebra de simetria conforme¹. Portanto, o efeito back reaction age sobre o sistema causando uma anomalia conforme, que assim como comentamos na seção 2.2.2, reflete a ação de efeitos quânticos na teoria clássica aqui abordada. Para resumir, o efeito back reaction está associado à mudança de fase ao atingir determinada temperatura (ou, equivalentemente, determinado raio).

Para uma análise mais acurada e obtenção do valor de temperatura correspondente à transição de fase é necessário reescrever r_+ em termos da temperatura Hawking e elaborar um gráfico da nova relação de forma a verificar o valor de temperatura Hawking crítica no qual localiza-se a descontinuidade da capacidade calorífica. Sabemos que a identificação formal de uma transição de fase é feita analisando-se gráficos de capacidade calorífica (ou calor específico) versus temperatura absoluta, diferente do caso do gráfico 4.7 onde temos a capacidade versus o raio do horizonte de eventos r_+ , nosso parâmetro de controle. Entretanto, como a relação entre a temperatura Hawking e o raio do horizonte r_+ existe e não apresenta descontinuidades, como pode ser visto em 4.6, podemos inferir que existe um valor real e finito de temperatura correspondente para o qual ocorre a descontinuidade da capacidade calorífica observada no gráfico 4.7 e em posse do valor de raio crítico, que é o valor para o qual a capacidade calorífica diverge,

¹A simetria conforme é aquela associada às transformações conformes as quais deixam o tensor métrico invariante a menos de um fator de escala. O grupo gerado é o grupo conforme o qual tem o grupo de Poincaré como subgrupo (cujo fator de escala é 1).

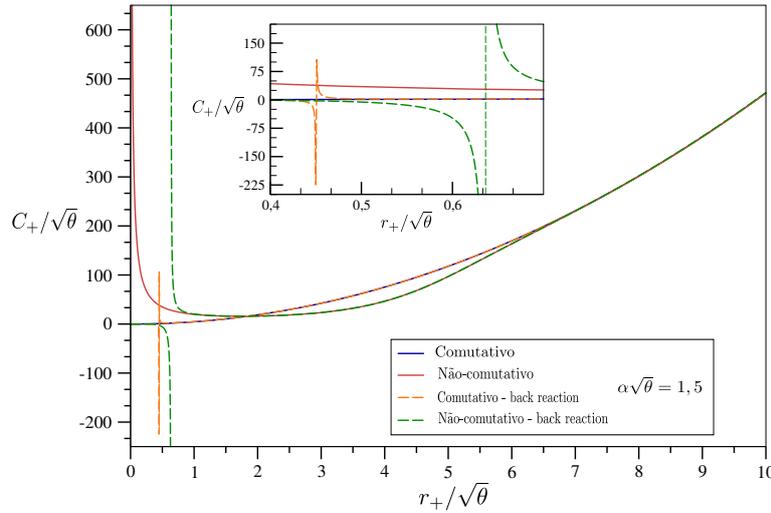


Figura 4.8: Capacidade calorífica com o parâmetro $\alpha\sqrt{\theta} = 1,5$ e $\sigma = 10^{-3}$.

podemos obter os valores de temperatura crítica. Observações semelhantes podem ser feitas sobre a curva (verde) que descreve o caso não-comutativo: temos uma reta vertical no ponto $r_+ = 1,426\sqrt{\theta}$ que divide o gráfico deste caso em duas regiões: a região à esquerda é caracterizada por valores negativos que representam instabilidade termodinâmica do buraco negro cilíndrico e a região à direita apresenta-se como uma região de estabilidade termodinâmica e, seguindo a mesma análise que acabamos de fazer, este ponto representa o ponto de transição de fase. Para calcular a temperatura crítica para os casos comutativo e não-comutativo basta substituir os valores de raio crítico, $r_{\text{crítico}}^{(c)} = 1,35$ para o caso comutativo e $r_{\text{crítico}} = 1,426$ para o caso não-comutativo, nas respectivas expressões de temperatura (4.96) e (4.131). Ao desenvolver, obtemos os seguintes valores

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_c^{(c)}\sqrt{\theta} &= 0,0136 \\ \mathcal{T}_c\sqrt{\theta} &= 0,0183.\end{aligned}\tag{4.137}$$

Sob a escolha que fizemos de parâmetros ($\alpha\sqrt{\theta}$ e σ), vemos que a temperatura crítica não é afetada de forma tão expressiva pela não-comutatividade do espaço-tempo de forma que a diferença entre as temperaturas da equação (4.137) se dá na terceira casa decimal: 0,0047. Isso nos diz que mesmo que a corda negra tenha um raio ligeiramente diferente devido a não-comutatividade, a temperatura para transição de fase é essencialmente a mesma. Seguindo com a análise do gráfico 4.7, reparamos que a não-comutatividade do espaço-tempo faz com que a assíntota vertical sofra um desvio (*shift*) de 0,076, se considerarmos a mudança do ponto 1,350 até o ponto 1,426, o que significa que a transição de fase ocorre para um valor maior de raio da corda negra devido aos efeitos não-comutativos. Perceba também que a sobreposição perfeita das curvas elaboradas com a consideração do efeito back reaction (verde para o caso não-comutativo e laranja para o caso comutativo) para valores maiores que o ponto de transição do horizonte de eventos nos indica que o nosso cálculo que resulta nas equações (4.135) e (4.100) estão corretos e recuperam os resultados anteriores quando $r_+/\sqrt{\theta}$ é grande, como esperado.

Inspecionando agora o gráfico apresentado na figura 4.8, o qual nos traz informações com a configuração $\alpha\sqrt{\theta} = 1,5$, vemos uma mudança expressiva no comportamento da curva referente à capacidade calorífica na presença de back reaction no espaço-tempo comutativo: a descontinuidade que ocorre na curva (laranja tracejada) agora é uma descontinuidade finita em face à descontinuidade infinita que aparece no gráfico da figura 4.7. Este é um indicativo de uma transição de fase de segunda ordem do sistema, devida à presença de back reaction, no espaço-tempo comutativo enquanto que no espaço-tempo não-comutativo a transição é de primeira ordem, caracterizada pela descontinuidade infinita da capacidade calorífica. A exemplo do procedimento realizado anteriormente com respeito à capacidade calorífica, com a configuração $\alpha\sqrt{\theta}$, ilustrada na figura 4.7, determinamos as respectivas temperaturas críticas associadas aos espaços-tempos comutativo e não-comutativo dadas pelos seguintes valores

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_c^{(c)}\sqrt{\theta} &= 0,2826 \\ \mathcal{T}_c\sqrt{\theta} &= 0,0139.\end{aligned}\tag{4.138}$$

Imediatamente podemos observar que para o caso comutativo, o valor de temperatura é uma ordem de grandeza maior que o valor voltado ao espaço-tempo não-comutativo e também é uma ordem de grandeza maior que o valor associado aos demais casos com a configuração $\alpha\sqrt{\theta} = 0,5$, o que nos revela uma grande diferença entre os valores de temperatura em (4.138): 0,2687 diferente do que acontece em (4.137). Portanto, percebemos que o sistema é sensível à escolha do parâmetro associado à constante cosmológica. A constante cosmológica desenvolve um papel importante para a interpretação de nosso sistema uma vez que, como comentamos na seção 2.1.1, tal grandeza está associada à densidade de energia de vácuo estabelecida em relatividade geral, e a sensibilidade do sistema às variações de tal constante revela a influência da energia de vácuo no espaço-tempo da corda negra. Ainda nesta discussão, considerando a interpretação da constante cosmológica como parâmetro para a expansão acelerada do universo, entendemos que nosso sistema é caracterizado pelas suas propriedades serem dependentes da maneira com a qual a energia de vácuo acelera a expansão do universo, expressa em termos de um candidato a escala fundamental de comprimento do espaço-tempo $\sqrt{\theta}$. Isto é, quando escrevemos a densidade de energia de vácuo como um múltiplo semi-inteiro do parâmetro de comutatividade $\alpha\sqrt{\theta} = 0,5$ o buraco negro cilíndrico sofre transições de fase de primeira ordem; quando expressamos a densidade de energia de vácuo como um múltiplo maior $\alpha\sqrt{\theta} = 1,5$ o comportamento previsto sem a consideração da não-comutatividade é de transição de fase de segunda ordem.

Nosso passo seguinte à discussão precedente seria determinar a entropia do sistema considerando a não-comutatividade e a presença de back reaction. Entretanto, o desenvolvimento é bastante extenso e exaustivo de forma que ele está inserido no capítulo B, mais especificamente na seção B.2, e vamos prosseguir para o estudo da energia livre.

Como realizado para o caso comutativo, escrevemos aqui a temperatura Hawking na presença de back reaction usando a relação $\mathcal{T}_H = \frac{\mathcal{K}}{2\pi}$ com a gravidade superficial \mathcal{K} em termos de M_+ dada em (B.14) apresentada no desenvolvimento da entropia do sistema encontrada no apêndice B.

$$\mathcal{T}_H = \frac{3\alpha}{2^{\frac{4}{3}}\pi} \frac{(M_+^2 + \sigma)}{M_+^{\frac{5}{3}}} \left[1 - \frac{2M_+}{3\alpha^3\theta\sqrt{\pi\theta}} \exp\left(-\frac{M_+^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{2}{3}}\alpha^2\theta}\right) \right]. \quad (4.139)$$

Como sabemos, definimos uma cavidade de tamanho finito R e a temperatura no contorno da cavidade é corrigida pelo fator de redshift

$$\mathcal{T} = \frac{\mathcal{T}_H}{\sqrt{g_{tt}(R)}} \quad (4.140)$$

onde $g_{tt}(R)$ representa a coordenada temporal do elemento de linha da corda negra no espaço-tempo não-comutativo (4.4) e é dado por

$$g_{tt}(R) = \alpha^2 R^2 - \frac{8M_+}{\sqrt{\pi}\alpha R} \gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{R^2}{4\theta}\right).$$

Seguindo fielmente o procedimento realizado no espaço-tempo comutativo, usamos a relação $dE = TdS$ de forma que alcançamos

$$\mathcal{E} = M_0 + \int_{S_0}^{S_+} T dS' = M_0 + \int_{M_0}^{M_+} T \frac{dM'_+}{\mathcal{T}} \quad (4.141)$$

onde usamos a relação $dM_+ = \mathcal{T}_H dS$. Substituindo a expressão para a temperatura dentro da cavidade nesta equação, vamos obter

$$\mathcal{E} = M_0 + \int_{M_0}^{M_+} \frac{\mathcal{T}_H}{\sqrt{g_{tt}(R)}} \frac{dM'_+}{\mathcal{T}_H} = M_0 + \int_{M_0}^{M_+} \frac{dM'_+}{\sqrt{g_{tt}(R)}}. \quad (4.142)$$

Basta agora substituir a expressão para $g_{tt}(R)$ na equação anterior. Note que como o tamanho da cavidade R é fixo, a função $\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{R^2}{4\theta}\right)$ que é uma integral definida, é uma constante. Temos então que resolver

$$\mathcal{E} = M_0 + \int_{M_0}^{M_+} \frac{dM'_+}{\left[\alpha^2 R^2 - \frac{8M'_+}{\sqrt{\pi}\alpha R} \gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{R^2}{4\theta}\right)\right]^{\frac{1}{2}}},$$

que resolvemos aplicando a substituição $u = \alpha^2 R^2 - \frac{8M'_+}{\sqrt{\pi}\alpha R} \gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{R^2}{4\theta}\right)$ de forma que encontramos

$$\mathcal{E} = M_0 - \frac{\sqrt{\pi}}{4} \frac{\alpha^2 R^2}{\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{R^2}{4\theta}\right)} \left\{ \left[1 - \frac{8M_+}{\sqrt{\pi}\alpha^3 R^3} \gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{R^2}{4\theta}\right) \right]^{\frac{1}{2}} - \left[1 - \frac{8M_0}{\sqrt{\pi}\alpha^3 R^3} \gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{R^2}{4\theta}\right) \right]^{\frac{1}{2}} \right\}. \quad (4.143)$$

Verifiquemos agora se o resultado sem o efeito de back reaction (4.29) pode ser recuperado a partir da equação (4.143) acima. Primeiro, lembremos a relação que conecta M_+ e r_+ no espaço-tempo não-comutativo

$$M_+ = \frac{\sqrt{\pi}\alpha^3 r_+^3}{8\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r_+^2}{4\theta}\right)}. \quad (4.5 \text{ revisitada})$$

A substituição da equação anterior em (4.143) fornece a expressão para a energia em termos do raio do horizonte de eventos r_+ . Logo,

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= M_0 - \frac{\sqrt{\pi}}{4} \frac{\alpha^2 R^2}{\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{R^2}{4\theta}\right)} \left\{ \left[1 - \frac{8}{\sqrt{\pi}\alpha^3 R^3} \left(\frac{\sqrt{\pi}\alpha^3 r_+^3}{\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r_+^2}{4\theta}\right)} \right) \gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{R^2}{4\theta}\right) \right]^{\frac{1}{2}} \right. \\ &\quad \left. - \left[1 - \frac{8}{\sqrt{\pi}\alpha^3 R^3} \left(\frac{\sqrt{\pi}\alpha^3 r_0^3}{8\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r_0^2}{4\theta}\right)} \right) \gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{R^2}{4\theta}\right) \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \\ &= M_0 + \frac{\sqrt{\pi}}{\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{R^2}{4\theta}\right)} \frac{\alpha^2 R^2}{4} \left[\left(1 - \frac{\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{R^2}{4\theta}\right) r_0^3}{\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r_0^2}{4\theta}\right) R^3} \right)^{\frac{1}{2}} - \left(1 - \frac{\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{R^2}{4\theta}\right) r_+^3}{\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r_+^2}{4\theta}\right) R^3} \right)^{\frac{1}{2}} \right] = E, \end{aligned} \quad (4.144)$$

e vemos que, assim como no caso comutativo, aqui a energia interna do sistema permanece inalterada na presença de back reaction.

Prosseguimos agora para o cálculo da energia livre associada \mathcal{F} usando o fato de que

$$\mathcal{F} = \mathcal{E} - TS. \quad (4.145)$$

Tudo que precisamos fazer para tornar a equação anterior explícita é substituir cada grandeza que já obtivemos anteriormente. Usando a simplificação $v = 2^{\frac{2}{3}}\alpha^2\theta$ teremos que

$$\mathcal{F} = \mathcal{E} - \frac{3\alpha}{2^{\frac{4}{3}}\pi} \frac{(M_+^2 + \sigma)}{M_+^{\frac{5}{3}}} \left[1 - \frac{2M_+}{3\alpha^3\theta\sqrt{\pi\theta}} e^{-\frac{M_+^{\frac{2}{3}}}{v}} \right] \frac{1}{\left[\alpha^2 R^2 - \frac{8M_+}{\sqrt{\pi}\alpha R} \gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{R^2}{4\theta}\right) \right]^{\frac{1}{2}}} \mathcal{S}. \quad (4.146)$$

Agora resgatamos a equação (B.44) do apêndice B.2 da qual podemos escrever uma expressão para a entropia $\mathcal{S}(M_+)$ da seguinte forma

$$\begin{aligned}
\mathcal{S} = & \frac{1}{2\alpha} \left\{ M_+^{\frac{2}{3}} + \sigma^{\frac{1}{3}} \left[\frac{\sqrt{3}}{3} \arctan \left[\frac{\sqrt{3}}{3} \left(\frac{2M_+^{\frac{2}{3}}}{\sigma^{\frac{1}{3}}} - 1 \right) \right] + \frac{1}{3} \ln(M_+^{\frac{2}{3}} + \sigma^{\frac{1}{3}}) \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{1}{6} \ln(M_+^{\frac{4}{3}} - \sigma^{\frac{1}{3}} M_+^{\frac{2}{3}} + \sigma^{\frac{1}{3}}) \right] \right\} \\
& + \frac{1}{\alpha^4 \theta \sqrt{\pi \theta}} \left\{ \frac{v^3}{4} \sqrt{\frac{\pi}{v}} \operatorname{erf} \left(\frac{M_+^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{v}} \right) + \frac{v}{3} M_+ e^{-\frac{M_+^{\frac{2}{3}}}{v}} - \frac{v^2}{2} M_+^{\frac{1}{3}} e^{-\frac{M_+^{\frac{2}{3}}}{v}} - \frac{2\sigma}{3} \left[\frac{e^{-\frac{M_+^{\frac{2}{3}}}{v}}}{M_+^{\frac{1}{3}}} + \sqrt{\frac{\pi}{v}} \operatorname{erf} \left(\frac{M_+^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{v}} \right) \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\sigma}{9} \left[\frac{8}{105v^7} \sqrt{\frac{\pi}{v}} \operatorname{erf} \left(\frac{M_+^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{v}} \right) + \frac{(8M_+^2 - 4vM_+^{\frac{4}{3}} + v^2M_+^{\frac{2}{3}} - 15v^3)}{105v^3M_+^{\frac{7}{3}}} e^{-\frac{M_+^{\frac{2}{3}}}{v}} \right] \right] \right\}. \quad (4.147)
\end{aligned}$$

A expressão anterior para a entropia deve ser substituída em (4.146) de forma que teremos finalmente a equação para a energia livre do sistema na presença de back reaction

$$\begin{aligned}
\mathcal{F} = & M_0 - \frac{\sqrt{\pi}}{4} \frac{\alpha^2 R^2}{\gamma \left(\frac{3}{2}, \frac{R^2}{4\theta} \right)} \left\{ \left[1 - \frac{8M_+}{\sqrt{\pi} \alpha^3 R^3} \gamma \left(\frac{3}{2}, \frac{R^2}{4\theta} \right) \right]^{\frac{1}{2}} - \left[1 - \frac{8M_0}{\sqrt{\pi} \alpha^3 R^3} \gamma \left(\frac{3}{2}, \frac{R^2}{4\theta} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \\
& - \frac{3\alpha}{2^{\frac{4}{3}} \pi} \frac{(M_+^2 + \sigma)}{M_+^{\frac{5}{3}}} \left[1 - \frac{2M_+}{3\alpha^3 \theta \sqrt{\pi \theta}} e^{-\frac{M_+^{\frac{2}{3}}}{v}} \right] \frac{1}{\left[\alpha^2 R^2 - \frac{8M_+}{\sqrt{\pi} \alpha R} \gamma \left(\frac{3}{2}, \frac{R^2}{4\theta} \right) \right]^{\frac{1}{2}}} \\
& \cdot \left\{ \frac{1}{2\alpha} \left(M_+^{\frac{2}{3}} + \sigma^{\frac{1}{3}} \left[\frac{\sqrt{3}}{3} \arctan \left[\frac{\sqrt{3}}{3} \left(\frac{2M_+^{\frac{2}{3}}}{\sigma^{\frac{1}{3}}} - 1 \right) \right] + \frac{1}{3} \ln(M_+^{\frac{2}{3}} + \sigma^{\frac{1}{3}}) \right. \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{1}{6} \ln(M_+^{\frac{4}{3}} - \sigma^{\frac{1}{3}} M_+^{\frac{2}{3}} + \sigma^{\frac{1}{3}}) \right] \right\} \\
& + \frac{1}{\alpha^4 \theta \sqrt{\pi \theta}} \left(\frac{v^3}{4} \sqrt{\frac{\pi}{v}} \operatorname{erf} \left(\frac{M_+^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{v}} \right) + \frac{v}{3} M_+ e^{-\frac{M_+^{\frac{2}{3}}}{v}} - \frac{v^2}{2} M_+^{\frac{1}{3}} e^{-\frac{M_+^{\frac{2}{3}}}{v}} - \frac{2\sigma}{3} \left[\sqrt{\frac{\pi}{v}} \operatorname{erf} \left(\frac{M_+^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{v}} \right) \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{e^{-\frac{M_+^{\frac{2}{3}}}{v}}}{M_+^{\frac{1}{3}}} + \frac{\sigma}{9} \left[\frac{8}{105v^7} \sqrt{\frac{\pi}{v}} \operatorname{erf} \left(\frac{M_+^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{v}} \right) + \frac{(8M_+^2 - 4vM_+^{\frac{4}{3}} + v^2M_+^{\frac{2}{3}} - 15v^3)}{105v^3M_+^{\frac{7}{3}}} e^{-\frac{M_+^{\frac{2}{3}}}{v}} \right] \right] \right) \right\}, \quad (4.148)
\end{aligned}$$

onde já substituímos a expressão de $\mathcal{E} = E$ dada em (4.143). Agora devemos verificar se a equação (4.148) recupera as equações obtidas anteriormente. Primeiro, façamos $\sigma = 0$. Perceba que o termo que corresponde a \mathcal{E} corresponde perfeitamente ao resultado sem back reaction já que a energia interna permanece inalterada. Entretanto, o termo $T\mathcal{S}$ em (4.143) não:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}|_{\sigma=0} &= E - \frac{M_+^{\frac{1}{3}}}{R \left[1 - \frac{8M_+}{\sqrt{\pi}\alpha^3 R^3} \gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{R^2}{4\theta}\right) \right]^{\frac{1}{2}}} \left[3 - \frac{2M_+}{\alpha^3 \theta \sqrt{\pi\theta}} e^{-\frac{M_+^{\frac{2}{3}}}{v}} \right] \\
&\cdot \left\{ \frac{1}{2\alpha} M_+^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{\alpha^4 \theta \sqrt{\pi\theta}} \left(\frac{v^3}{4} \sqrt{\frac{\pi}{v}} \operatorname{erf}\left(\frac{M_+^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{v}}\right) + \frac{v}{3} M_+ e^{-\frac{M_+^{\frac{2}{3}}}{v}} \right. \right. \\
&\left. \left. + \frac{v^2}{2} M_+^{\frac{1}{3}} e^{-\frac{M_+^{\frac{2}{3}}}{v}} \right) \right\}. \tag{4.149}
\end{aligned}$$

Aqui devemos ter cuidado ao usar a relação entre M_+ e r_+ para escrever a equação em termos do raio. Note que o termo $\frac{8M_+}{\sqrt{\pi}\alpha^3 R^3} \gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{R^2}{4\theta}\right)$ é obtido diretamente da métrica e está relacionado a r_+ pela expressão (4.6) que é exata; os demais termos são relacionados pela aproximação $r_+ \approx \frac{(4M_+)^{\frac{1}{3}}}{\alpha}$. Dito isso, começamos notando que

$$\begin{aligned}
3 - \frac{2M_+}{\alpha^3 \theta \sqrt{\pi\theta}} e^{-\frac{M_+^{\frac{2}{3}}}{v}} &= 3 - \frac{8M_+}{\alpha^3 r_+^3 \sqrt{\pi}} \frac{r_+^3}{4\theta^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{M_+^{\frac{2}{3}}}{v}} \\
&= 3 - \frac{r_+^3}{4\theta^{\frac{3}{2}}} \frac{e^{-\frac{M_+^{\frac{2}{3}}}{v}}}{\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r_+^2}{4\theta}\right)}, \tag{4.150}
\end{aligned}$$

onde multiplicamos o termo negativo acima por $1 = \frac{4r_+^3}{4r_+^3}$ e notamos que apareceu o termo $\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r_+^2}{4\theta}\right) = \sqrt{\pi}\alpha^3 r_+^3 / 8M_+$. Logo, teremos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}|_{\sigma=0} &= E - \frac{\alpha r_+}{2^{\frac{2}{3}} R \left[1 - \frac{\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{R^2}{4\theta}\right) r_+^3}{\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r_+^2}{4\theta}\right) R^3} \right]^{\frac{1}{2}}} \left[3 - \frac{r_+^3}{4\theta^{\frac{3}{2}}} \frac{e^{-\frac{r_+^2}{4\theta}}}{\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r_+^2}{4\theta}\right)} \right] \\
&\cdot \left\{ \frac{1}{2\alpha} \frac{\alpha^2 r_+^2}{2^{\frac{4}{3}}} + \frac{\alpha\theta}{2^{\frac{1}{3}}} \operatorname{erf}\left(\frac{r_+}{2\sqrt{\theta}}\right) + \frac{2^{\frac{4}{3}} \alpha^4 \theta^2}{2\alpha^4 \theta \sqrt{\pi\theta}} \frac{\alpha r_+}{2^{\frac{2}{3}}} e^{-\frac{r_+^2}{4\theta}} + \frac{2^{\frac{2}{3}} \alpha^2 \theta}{3\alpha^4 \theta \sqrt{\pi\theta}} \frac{\alpha^3 r_+^3}{4} e^{-\frac{r_+^2}{4\theta}} \right\} \tag{4.151}
\end{aligned}$$

que resulta em

$$\mathcal{F}|_{\sigma=0} = E - \frac{\alpha^2 \sqrt{\pi}}{\left[1 - \frac{\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{R^2}{4\theta}\right)}{\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r_+^2}{4\theta}\right)} \frac{r_+^3}{R^3} \right]^{\frac{1}{2}}} \left[3 - \frac{r_+^3}{4\theta^{\frac{3}{2}}} \frac{e^{-\frac{r_+^2}{4\theta}}}{\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r_+^2}{4\theta}\right)} \right] \cdot \left\{ \frac{r_+^3}{8\sqrt{\pi}R} + \frac{\theta}{2\sqrt{\pi}} \operatorname{erf}\left(\frac{r_+}{2\sqrt{\theta}}\right) + \frac{\sqrt{\theta}}{2\pi} \frac{r_+^2}{R} e^{-\frac{r_+^2}{4\theta}} + \frac{1}{12\pi\sqrt{\theta}} \frac{r_+^4}{R} e^{-\frac{r_+^2}{4\theta}} \right\}. \quad (4.152)$$

Para o caso comutativo com back reaction, a equação (4.152) se reduz corretamente à equação (4.31), pois todos os termos que dependem de θ ou $\sqrt{\theta}$ zeram quando tomamos o limite $r_+/\sqrt{\theta} \rightarrow \infty$.

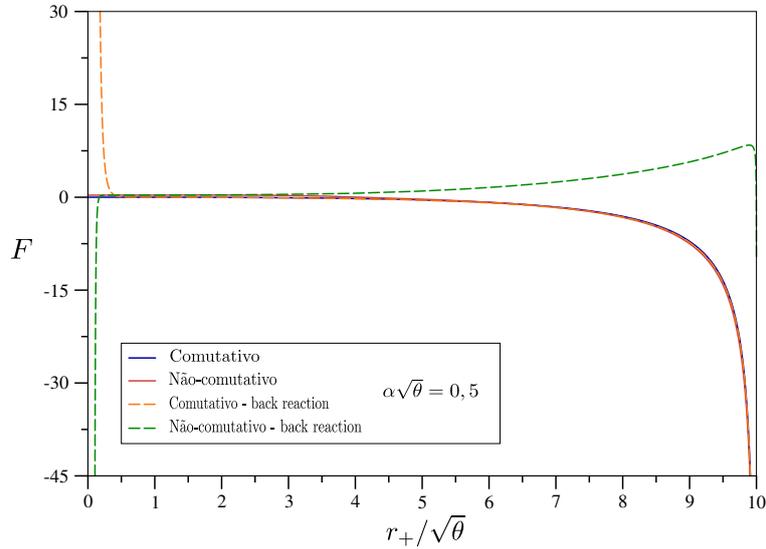


Figura 4.9: Energia livre com $\alpha\sqrt{\theta} = 0,5$. Temos $\sigma = 10^{-3}$.

A figura 4.9 ilustra os resultados acerca da energia livre para $\alpha\sqrt{\theta} = 0,5$. Imediatamente notamos que a curva correspondente ao espaço-tempo não-comutativo na presença de back reaction é a que sofre mudanças mais significativas uma vez que tal curva (verde tracejada) assume valores maiores que as demais e atinge um valor máximo antes de cair e assumir valores negativos. Interessante avaliar a influência da não-comutatividade nas curvas com back reaction, visto que para pontos da abscissa próximos à origem o comportamento das duas curvas que representam a consideração do efeito back reaction são muito diferentes: enquanto que a curva correspondente ao espaço-tempo comutativo da corda negra diverge positivamente ao se aproximar da origem, quando consideramos a não-comutatividade a divergência ocorre para valores negativos. As figuras 4.10 e 4.11 apresentam a energia livre com diferentes configurações para o parâmetro $\alpha\sqrt{\theta}$. Considerações sobre trabalho e energia livre podem ser realizadas aqui de forma semelhante à discussão apresentada na seção 4.1.2.

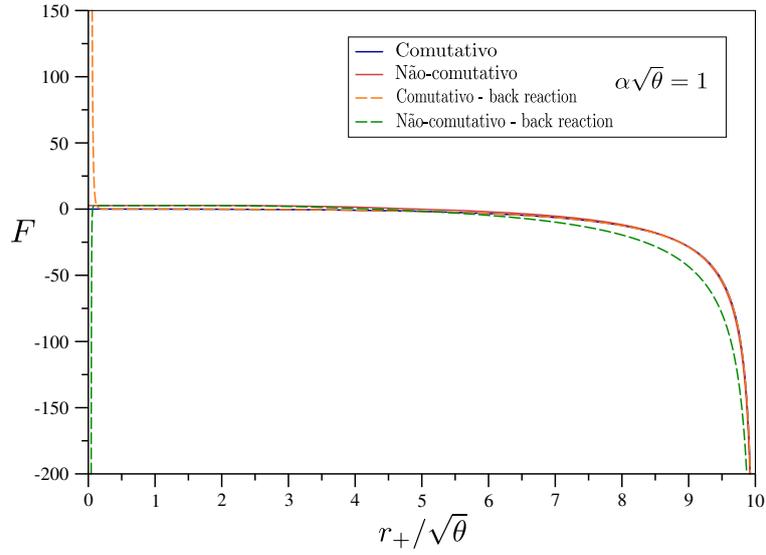


Figura 4.10: Energia livre com $\alpha\sqrt{\theta} = 1$. Temos $\sigma = 10^{-3}$.

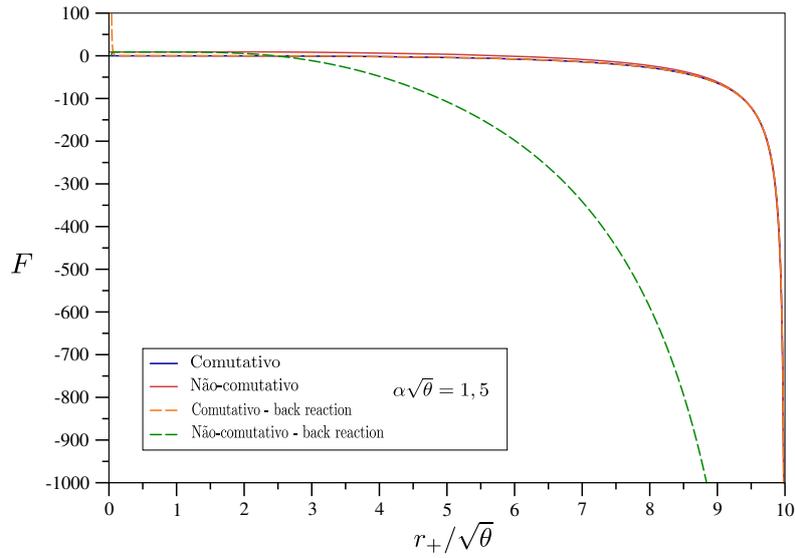


Figura 4.11: Energia livre com $\alpha\sqrt{\theta} = 1,5$. Temos $\sigma = 10^{-3}$.

Ressaltamos que os resultados que acabamos discutir são obtidos com a consideração do primeiro fator de correção da série perturbativa (2.66) de forma que pode ser interessante considerar mais termos da série para uma análise mais robusta e verificação se os efeitos previstos sobre o sistema continuam a ser previstos.

Corda negra em equilíbrio térmico com um reservatório

A persistência é o caminho do êxito

—CHARLES CHAPLIN

Neste capítulo estudamos as propriedades de equilíbrio térmico da corda negra, considerando esta e um reservatório térmico. Como sabemos, na ausência de back reaction, transições de fase termodinâmicas não são esperadas devido ao fato de a capacidade calorífica da corda negra nunca ser negativa, como pode-se observar em 4.3, de forma que o buraco negro cilíndrico deve alcançar o equilíbrio com o reservatório de energia visto que $C > 0$. Nossa estratégia aqui é imaginar o buraco negro cilíndrico de temperatura T imerso num reservatório térmico de temperatura T_R que pode ser a mesma ou diferente de sua temperatura: se for diferente, então $T_R > T$ e a corda negra absorve radiação, aumentando sua massa e, portanto, como vemos por (4.12) [lembrando da relação (4.3)] aumentando sua temperatura para alcançar o equilíbrio; ou $T_R < T$ e a corda negra emite radiação diminuindo sua massa, e por isso sua temperatura, para alcançar T_R . Este capítulo tem uma organização um pouco diferente dos anteriores: discutimos todo o desenvolvimento da teoria nas três primeiras seções e na última seção abordamos os resultados obtidos e fazemos as análises pertinentes.

5.1 Espaço vazio como reservatório térmico

Para começarmos, primeiro devemos notar que a equação que governa o comportamento da temperatura da corda negra no espaço-tempo cilíndrico como foi apresentada anteriormente, está expressa em unidades naturais $c = k_B = G = \hbar = 1$ e vamos agora voltar com as unidades do sistema internacional para que as análises a serem feitas sejam fidedignas

$$\begin{aligned} T_H^{(c)} &= \frac{3\alpha^2}{4\pi} r_+ \quad (\text{unidades naturais}) \\ T_H^{(c)} &= \frac{\hbar c}{k_B} \frac{3\alpha^2}{4\pi} r_+ \quad (\text{SI}). \end{aligned} \quad (5.1)$$

Vamos agora usar (4.3) para escrever a temperatura em termos da massa. Convém neste momento pontuar que a massa M da corda negra que estamos lidando é a massa por unidade de comprimento no eixo z , que é o eixo de simetria da corda negra. Isso é importante para as análises de unidades que vão ser desenvolvidas, pois no SI, entendemos que M que estamos

trabalhando tem unidade kg/m . No elemento de linha (4.2), usamos M nas unidades naturais utilizadas até agora de forma que ainda mantemos os coeficientes das componentes da métrica sem dimensão mesmo com a omissão das constantes fundamentais, mas se trabalharmos no SI, devemos acrescentar as constantes omitidas de forma que

$$ds^2 = - \left(\alpha^2 r^2 - \frac{4GM}{c^2 \alpha r} \right) c^2 dt^2 + \left(\alpha^2 r^2 - \frac{4GM}{c^2 \alpha r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\phi^2 + \alpha^2 r^2 dz^2, \quad (5.2)$$

onde destacamos o termo GM/c^2 uma vez que a relação de unidades

$$[GM] = \frac{kg \frac{m}{s^2} \cdot m^2}{(kg)^2} \frac{kg}{m} = \frac{m^2}{s^2}$$

que é a unidade de c^2 e tínhamos somente M com $c = G = 1$. O procedimento a ser seguido é utilizar a equação de Stefan-Boltzmann para examinar o fluxo de energia entre a corda negra e o espaço vazio como reservatório térmico. Neste caso, temos que a corda negra emite radiação e com isso perde massa, o que conseqüentemente causa uma diminuição na sua temperatura. Aplicando a equação de Stefan-Boltzmann

$$L = \lambda AT^4 \quad (5.3)$$

onde T acima em nosso caso é a temperatura Hawking, A é a área (por unidade de comprimento) do buraco negro cilíndrico $A = 2\alpha\pi r_+^2$, $\lambda = \pi^2 k_B^4 / 60 \hbar^3 c^2$ é a constante de Stefan-Boltzmann e L é o fluxo de energia. Como L é esse fluxo de energia do sistema, então ele representa a taxa de variação de energia no decorrer do tempo. Escrevendo todas estas grandezas em termos da massa M_+ [usando (4.3) para relacionar r_+ e M_+], vamos ter que

$$A = 2\alpha\pi r_+^2 = 2\alpha\pi \left[\frac{(4GM_+/c^2)^{\frac{1}{3}}}{\alpha} \right]^2, \quad (5.4)$$

então, escrevendo L com a substituição das constantes citadas

$$\begin{aligned} L &= \lambda \frac{2\pi}{\alpha} \left(\frac{4GM_+}{c^2} \right)^{\frac{2}{3}} \left[\frac{\hbar c}{k_B} \frac{3\alpha}{4\pi} \left(\frac{4GM_+}{c^2} \right)^{\frac{1}{3}} \right]^4 \\ &= \frac{27}{160} \frac{\hbar \alpha^3}{\pi c^2} G^2 M_+^2. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Assim, entendendo L como a taxa de variação temporal de energia $L = -\frac{d(c^2 M_+)}{dt}$ vamos calcular a evolução temporal da massa supondo uma massa inicial $M_+(t_0 = 0) = M_0$

$$\begin{aligned} \frac{d(c^2 M_+)}{dt} &= -L = -\frac{27}{160} \frac{\hbar \alpha^3 G^2}{\pi c^2} M_+^2 \\ \frac{dM_+}{dt} &= -\frac{27}{160} \frac{\hbar \alpha^3 G^2}{\pi c^4} M_+^2 \end{aligned}$$

que por ser uma equação diferencial separável de primeira ordem, podemos integrar diretamente

$$\begin{aligned} \int_{M_0}^M \frac{dM'_+}{M'_+{}^2} &= -\frac{27}{160} \frac{\hbar\alpha^3 G^2}{\pi c^4} \int_{t_0=0}^t dt' \\ \frac{1}{M_0} - \frac{1}{M} &= -\frac{27}{160} \frac{\hbar\alpha^3 G^2}{\pi c^4} t \\ \frac{1}{M} &= \frac{27}{160} \frac{\hbar\alpha^3 G^2}{\pi c^4} t + \frac{1}{M_0} \end{aligned}$$

se definirmos $a = \frac{27}{160} \frac{\hbar\alpha^3 G^2}{\pi c^4}$, podemos expressar este resultado como

$$M(t) = \frac{1}{at + \frac{1}{M_0}}. \quad (5.6)$$

Como verificação rápida, vemos que a equação acima retorna M_0 quando $t = t_0 = 0$. Podemos ver também que a “evaporação completa” ($M \rightarrow 0$) levaria um tempo indefinido para ocorrer e este resultado faz sentido quando lembramos que se $M \rightarrow 0$ então, $T \rightarrow 0$, o que não deve acontecer devido a terceira lei da termodinâmica. Estas previsões para o buraco negro cilíndrico são diferentes do que acontece no caso esférico de Schwarzschild no qual existe a previsão de um tempo de vida característico do buraco negro em questão, o qual depende de sua massa inicial.

5.2 Radiação cósmica de fundo como reservatório térmico

Atualmente, sabe-se que a radiação cósmica de fundo¹ irradia como um corpo negro com temperatura $T_{CMB} \approx 2,7255\text{K}$. Se tomamos esta radiação de fundo como o reservatório de energia, a corda negra troca energia com esta radiação cósmica de fundo de forma que podemos associar uma corrente térmica a esse processo. Esta corrente térmica pode ser expressa por meio da lei de Stefan-Boltzmann, mas diferentemente do caso (5.3), aqui não temos a temperatura do espaço vazio $T = 0$, mas sim a temperatura da radiação cósmica de fundo medida como $T_{CMB} = 2,7255\text{K}$:

$$J = \lambda A(T^4 - T_{CMB}^4). \quad (5.7)$$

¹Na sigla em inglês, CMB - Cosmic Microwave Background. Devido à expansão do universo, a temperatura e densidade do mesmo, inicialmente altas, diminuíram e as constantes interações entre fótons e os átomos de hidrogênio também diminuíram. Assim, os fótons que antes eram energéticos o suficiente para arrancar elétrons dos átomos se tornaram menos energéticos e não podiam mais fazê-lo, passando a viajar livremente sem interagir com a matéria. Como conclusão, o modelo do Big Bang prevê que existe um fundo de luz no universo com energia relacionada à energia de ionização do átomo de hidrogênio. Esta radiação foi detectada como radiação de corpo negro em micro-ondas por Arno Penzias e Robert Wilson em 1965.

Como este é o fluxo de energia, seguindo o procedimento anterior, expressamos o mesmo como

$$\begin{aligned} c^2 \frac{dM_+}{dt} &= -J = -\lambda A (T^4 - T_{CMB}^4) \\ &= -\frac{27}{160} \frac{\hbar \alpha^3 G^2}{\pi c^2} M_+^2 + T_{CMB}^4 \frac{\pi^3 k_B^4}{30 \hbar^3 \alpha c^2} \left(\frac{4GM_+}{c^2} \right)^{\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

que pode ser expressa como

$$\frac{dM_+}{dt} = -aM_+^2 + bM_+^{\frac{2}{3}}. \quad (5.8)$$

onde

$$a = \frac{27}{160} \frac{\hbar \alpha^3 G^2}{\pi c^4} \quad (5.9)$$

$$b = T_{CMB}^4 \frac{\pi^3 k_B^4}{30 \hbar^3 \alpha c^4} \left(\frac{4G}{c^2} \right)^{\frac{2}{3}}. \quad (5.10)$$

A equação (5.8) é uma equação separável e pode ser integrada diretamente após a separação das variáveis da seguinte forma

$$\begin{aligned} dt &= \frac{dM_+}{-aM_+^2 + bM_+^{\frac{2}{3}}} \\ \int dt' &= \int \frac{dM'_+}{-aM'_+ + bM'_+^{\frac{2}{3}}}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

A integral do lado direito não é trivial e vamos, dessa vez, usar o software online ‘Wolfram Alpha’ para calcular a integral. Antes, vamos fazer o rearranjo

$$\int \frac{dM'_+}{-aM'_+ + bM'_+^{\frac{2}{3}}} = - \int \frac{dM'_+}{aM'_+ - bM'_+^{\frac{2}{3}}}, \quad (5.12)$$

e a seguinte mudança de variáveis para que o software faça uma boa leitura da expressão

$$\begin{cases} x = M'_+^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow dx = \frac{1}{3} M'_+^{-\frac{2}{3}} dM'_+ \\ x^2 = M'_+^{\frac{2}{3}} \\ x^6 = M'_+{}^2 \end{cases} \quad (5.13)$$

de forma que com essas mudanças possamos escrever

$$\int \frac{dM'_+}{-aM'_+ + bM'^{\frac{2}{3}}_+} = -3 \int \frac{dx}{ax^4 - b}, \quad (5.14)$$

e utilizando a expressão que o software retorna como resultado da integral na equação (5.11), obtemos

$$t = \frac{3}{4a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{3}{4}}} \left\{ 2 \arctan \left[\left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{1}{4}} M^{\frac{1}{3}} \right] + \ln(b^{\frac{1}{4}} + a^{\frac{1}{4}}M^{\frac{1}{3}}) - \ln(b^{\frac{1}{4}} - a^{\frac{1}{4}}M^{\frac{1}{3}}) \right\}, \quad (5.15)$$

somada a uma constante de integração. Vemos que existe uma mudança de comportamento quando os argumentos do logaritmos são nulos. Assim,

$$b^{\frac{1}{4}} - a^{\frac{1}{4}}M^{\frac{1}{3}} = 0 \quad (5.16)$$

$$b^{\frac{1}{4}} + a^{\frac{1}{4}}M^{\frac{1}{3}} = 0. \quad (5.17)$$

A segunda equação entre as duas acima retorna massa negativa e claramente não nos interessa, entretanto, a primeira delas nos fornece uma relação para a massa correspondente da mudança de comportamento da corda negra

$$M_E = \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{3}{4}}. \quad (5.18)$$

Em posse da relação b/a

$$\frac{b}{a} = \frac{16}{81} T_{CMB}^4 \left(\frac{\pi k_B}{\alpha \hbar} \right)^4 \left(\frac{4}{G^2 c^2} \right)^{\frac{2}{3}}, \quad (5.19)$$

com esta expressão, podemos calcular $(b/a)^{\frac{3}{4}}$ necessária para obter M_E . Logo,

$$M_E = \frac{16}{27} \frac{T_{CMB}^3}{Gc} \left(\frac{\pi k_B}{\alpha \hbar} \right)^3,$$

que após um rearranjo fica

$$M_E = \frac{16}{27} \left[\frac{\pi k_B}{\alpha \hbar} \frac{T_{CMB}}{(Gc)^{\frac{1}{3}}} \right]^3. \quad (5.20)$$

É importante fazer um comentário sobre o resultado (5.20). Esta massa de equilíbrio obtida representa o valor de massa no qual existe uma alteração no comportamento do buraco negro cilíndrico no que diz respeito à troca de energia com o reservatório térmico. A alteração que ocorre é que o gradiente de temperatura, que caracteriza a predominante emissão (ou absorção) de energia, entre a corda negra e o reservatório térmico deixa de existir pois a

corda negra atinge a temperatura do reservatório, que é a temperatura da radiação cósmica de fundo $T_{CMB} = 2,7255\text{K}$, sendo assim estabelecido o equilíbrio térmico. A massa do equilíbrio obtida representa a massa da corda negra correspondente para tal temperatura. Este comentário pode ser confirmado calculando qual deve ser a massa M_{CMB} correspondente à temperatura T_{CMB} : primeiro encontramos o valor do raio em termos da temperatura da radiação cósmica de fundo e usando a relação entre M_+ e r_+ , escrevemos a expressão para a massa correspondente. Portanto,

$$\begin{aligned} T_{CMB} &= \frac{\hbar c}{k_B} \frac{3\alpha^2}{4\pi} r_{CMB} \\ \Rightarrow r_{CMB} &= \frac{k_B}{\hbar c} \frac{4\pi}{3\alpha^2} T_{CMB} \end{aligned}$$

e por (4.3), com as devidas constantes fundamentais,

$$\frac{4GM_+}{c^2} = \alpha^3 r_+^3 \quad (4.3 \text{ revisitada})$$

escrevendo esta relação para r_{CMB} e M_{CMB} , obtemos que

$$\begin{aligned} \frac{4GM_{CMB}}{c^2} &= \alpha^3 r_{CMB}^3 \\ \frac{4GM_{CMB}}{c^2} &= \alpha^3 \left(\frac{k_B}{\hbar c} \frac{4\pi}{3\alpha^2} T_{CMB} \right)^3 \\ M_{CMB} &= \frac{\alpha^3 c^2}{4G} \frac{4^3}{3^3 \alpha^6 c^3} \left(\frac{k_B \pi}{\hbar} T_{CMB} \right)^3 \\ M_{CMB} &= \frac{16}{27} \left[\frac{\pi k_B}{\alpha \hbar} \frac{T_{CMB}}{(Gc)^{\frac{1}{3}}} \right]^3 = M_E, \end{aligned} \quad (5.21)$$

o que confirma nosso comentário.

5.3 Radiação cósmica de fundo em evolução como reservatório térmico

Entendemos que a radiação cósmica de fundo evolui de acordo com a evolução temporal do universo a qual pode ser dividida em três eras [23] : era da radiação, era da matéria e era da energia escura que representam as eras nas quais há a predominância de cada um dos fluidos cósmicos considerando-se o big bang como o início dos tempos. Considerando que a temperatura da radiação cósmica de fundo assume comportamentos diferentes para cada era do universo, estudamos a troca de energia entre a mesma, em diferentes eras, e a corda negra. A temperatura para cada era pode ser escrita como²

²Uma demonstração destas expressões pode ser encontrada em [23].

$$T_R = \frac{T_{CMB}}{\left(\frac{32\pi G}{3}\rho_{R_0}\right)^{\frac{1}{4}} t^{\frac{1}{2}}}, \quad 0 < t < 9.3 \cdot 10^{11} \quad (\text{segundos}) \quad (5.22)$$

$$T_M = \frac{T_{CMB}}{(6\pi G\rho_{M_0})^{\frac{1}{3}} t^{\frac{2}{3}}}, \quad 9.3 \cdot 10^{11} < t < 3.7 \cdot 10^{17} \quad (\text{segundos}) \quad (5.23)$$

$$T_\Lambda = T_{CMB} \exp\left[-\left(\frac{8\pi G}{3}\rho_{\Lambda_0}\right)^{\frac{1}{2}} t\right], \quad 3.7 \cdot 10^{17} < t < \infty \quad (\text{segundos}), \quad (5.24)$$

onde $\rho_{R_0}, \rho_{M_0}, \rho_{\Lambda_0}$ representam as densidades atuais de radiação, matéria e energia escura, respectivamente. Entende-se que fótons, radiação cósmica de fundo, neutrinos e grávitons estão associados à era da radiação; na era de predominância de matéria tem-se a matéria hadrônica e matéria (não hadrônica) escura; e por fim, como o nome sugere, a era de predominância da energia escura é caracterizada pela presença de energia escura.

Vamos agora usar novamente a lei de Stefan-Boltzmann para estudar o fluxo de energia entre o buraco negro cilíndrico e a radiação cósmica de fundo, mas agora vamos investigar este fluxo para as diferentes eras utilizando as temperaturas acima. Escrevemos a relação de forma geral como

$$J = \lambda A(T^4 - T_i^4), \quad (5.25)$$

onde $A = 2\alpha\pi r_+^2$, $\lambda = \pi^2 k_B^4 / 60\hbar^3 c^2$ são a área da corda negra por unidade de comprimento, a constante de Stefan-Boltzmann e $i = R, M, \Lambda$ representa radiação, matéria ou energia escura, respectivamente.

Utilizando a relação (5.22), podemos obter uma expressão para a evolução temporal da massa da corda negra. Substituindo esta expressão na equação (5.25) acima, teremos

$$J = -c^2 \frac{dM_+}{dt} = \frac{\pi^2 k_B^4}{60\hbar^3 c^2} 2\alpha\pi \left[\frac{(4GM_+/c^2)^{\frac{1}{3}}}{\alpha} \right]^2 \left\{ \left[\frac{3\hbar\alpha c}{4\pi k_B} \left(\frac{4GM_+}{c^2} \right)^{\frac{1}{3}} \right]^4 - \frac{T_{CMB}^4}{\frac{32\pi G}{3}\rho_{R_0} t^2} \right\}$$

desenvolvendo esta relação, teremos

$$\begin{aligned} -c^2 \frac{dM_+}{dt} &= \frac{\pi^3 k_B^4}{30\hbar\alpha c^2} \left(\frac{4GM_+}{c^2} \right)^{\frac{2}{3}} \left[\frac{3^4 \hbar^4 \alpha^4 c^4}{(4\pi)^4 k_B^4} \left(\frac{4GM_+}{c^2} \right)^{\frac{4}{3}} - \frac{3T_{CMB}^4}{32\pi G\rho_{R_0} t^2} \right] \\ \frac{dM_+}{dt} &= -\frac{27}{160} \frac{\hbar\alpha^3 G^2}{\pi c^4} M_+^2 + \frac{\pi^3 k_B^4}{30\hbar^3 \alpha c^4} \cdot \frac{3T_{CMB}^4}{32\pi G\rho_{R_0}} \left(\frac{4G}{c^2} \right)^{\frac{2}{3}} \frac{M_+^{\frac{2}{3}}}{t^2} \end{aligned}$$

que leva a

$$\frac{dM_+}{dt} = -aM_+^2 + b\delta_R \frac{M_+^{\frac{2}{3}}}{t^2} \quad (5.26)$$

onde $\delta_R = \frac{3}{32\pi G\rho_{R_0}}$ e a e b são dados por (5.9) e (5.10), respectivamente.

Agora seguimos o mesmo procedimento para a era da matéria considerando que T_i na equação (5.25) seja dada pela relação (5.23):

$$J = -c^2 \frac{dM_+}{dt} = \frac{\pi^2 k_B^4}{60\hbar^3 c^2} 2\alpha\pi \left[\frac{(4GM_+/c^2)^{\frac{1}{3}}}{\alpha} \right]^2 \left\{ \left[\frac{3\hbar\alpha c}{4\pi k_B} \left(\frac{4GM_+}{c^2} \right)^{\frac{1}{3}} \right]^4 - \frac{T_{CMB}^4}{(6\pi G\rho_{M_0})^{\frac{4}{3}} t^{\frac{8}{3}}} \right\},$$

logo,

$$\begin{aligned} -c^2 \frac{dM_+}{dt} &= \frac{\pi^3 k_B^4}{30\hbar^3 \alpha c^2} \left[\frac{3^4 \hbar^4 \alpha^4 c^4}{(4\pi)^4 k_B^4} \left(\frac{4GM_+}{c^2} \right)^2 - \frac{T_{CMB}^4}{(6\pi G\rho_{M_0})^{\frac{4}{3}} t^{\frac{8}{3}}} \left(\frac{4GM_+}{c^2} \right)^{\frac{2}{3}} \right] \\ \frac{dM_+}{dt} &= -\frac{27}{160} \frac{\hbar\alpha^3 G^2}{\pi c^4} M_+^2 + \frac{\pi^3 k_B^4}{30\hbar^3 \alpha c^4} \left(\frac{4G}{c^2} \right)^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{T_{CMB}^4}{(6\pi G\rho_{M_0})^{\frac{4}{3}} t^{\frac{8}{3}}} M_+^{\frac{2}{3}}. \end{aligned}$$

Reescrevendo,

$$\frac{dM_+}{dt} = -aM_+^2 + b\delta_M \frac{M_+^{\frac{2}{3}}}{t^{\frac{8}{3}}}, \quad (5.27)$$

com a dado em (5.9), b dado em (5.10) e $\delta_M = \frac{1}{(6\pi G\rho_{M_0})^{\frac{4}{3}}}$.

Voltando nossas atenções agora para a era da energia escura, a relação de temperatura apropriada para ser substituída na lei de Stefan-Boltzmann é (5.24) e isso nos leva a

$$J = -c^2 \frac{dM_+}{dt} = \frac{\alpha\pi^3 k_B^4}{30\hbar^3 c^2} \left[\frac{(4GM_+/c^2)^{\frac{1}{3}}}{\alpha} \right]^2 \left\{ \left[\frac{3\hbar\alpha c}{4\pi k_B} \left(\frac{4GM_+}{c^2} \right)^{\frac{1}{3}} \right]^4 - T_{CMB}^4 \exp \left[-4 \left(\frac{8\pi G}{3} \rho_{\Lambda_0} \right)^{\frac{1}{2}} t \right] \right\}$$

tal relação, se desenvolvida seguindo o mesmo procedimento realizado anteriormente, nos leva a

$$\begin{aligned} -c^2 \frac{dM_+}{dt} &= \frac{27}{160} \frac{\hbar\alpha^3 G^2}{\pi c^2} M_+^2 - \frac{\pi^3 k_B^4}{30\hbar^3 \alpha c^2} \cdot T_{CMB}^4 \exp \left[-4 \left(\frac{8\pi G}{3} \rho_{\Lambda_0} \right)^{\frac{1}{2}} t \right] \left(\frac{4GM_+}{c^2} \right)^{\frac{2}{3}} \\ \frac{dM_+}{dt} &= -\frac{27}{160} \frac{\hbar\alpha^3 G^2}{\pi c^4} M_+^2 + \frac{\pi^3 k_B^4}{30\hbar^3 \alpha c^2} \left(\frac{4G}{c^4} \right)^{\frac{2}{3}} \cdot T_{CMB}^4 \exp \left[-4 \left(\frac{8\pi G}{3} \rho_{\Lambda_0} \right)^{\frac{1}{2}} t \right] M_+^{\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

ou,

$$\frac{dM_+}{dt} = -aM_+^2 + be^{-\delta_{\Lambda} t} M_+^{\frac{2}{3}}, \quad (5.28)$$

com $\delta_\Lambda = 4 \left(\frac{8\pi G}{3} \rho_{\Lambda_0} \right)^{\frac{1}{2}}$. Para resumir, observando as equações (5.26), (5.27) e (5.28) temos as seguintes equações diferenciais não-lineares de primeira ordem que nos fornecem a evolução temporal da massa da corda negra para cada era correspondente a serem resolvidas:

$$\begin{aligned}
 \text{Radiação: } \quad \frac{dM_+}{dt} &= -aM_+^2 + b\delta_R \frac{M_+^{\frac{2}{3}}}{t^2}, & \delta_R &= \frac{3T_{CMB}^4}{32\pi G\rho_{R0}} \\
 \text{Matéria: } \quad \frac{dM_+}{dt} &= -aM_+^2 + b\delta_M \frac{M_+^{\frac{2}{3}}}{t^{\frac{8}{3}}}, & \delta_M &= \frac{T_{CMB}^4}{(6\pi G\rho_{M0})^{\frac{4}{3}}} \\
 \text{Energia escura: } \quad \frac{dM_+}{dt} &= -aM_+^2 + be^{-\delta_\Lambda t} M_+^{\frac{2}{3}}, & \delta_\Lambda &= 4 \left(\frac{8\pi G}{3} \rho_{\Lambda_0} \right)^{\frac{1}{2}}
 \end{aligned} \tag{5.29}$$

onde lembramos de (5.9) e (5.10) que

$$a = \frac{27}{160} \frac{\hbar\alpha^3 G^2}{\pi c^4} \quad \text{e} \quad b = T_{CMB}^4 \frac{\pi^3 k_B^4}{30\hbar^3 \alpha c^4} \left(\frac{4G}{c^2} \right)^{\frac{2}{3}}.$$

5.4 Análise dos resultados

Nos resultados que seguem, as soluções numéricas das equações diferenciais foram realizadas utilizando o método Runge-Kutta a partir da ferramenta computacional *SageMath*³. Esta ferramenta fornece uma variedade de métodos numéricos e o método específico usado em nosso trabalho é chamado de rk4 que representa o método de Runge-Kutta clássico de quarta ordem. Destacamos aqui que salvo algumas exceções que deixamos explícitas no texto, todos os cálculos computacionais foram realizados com o uso de tal ferramenta.

5.4.1 Corda negra e espaço vazio

Vamos agora analisar os resultados obtidos na seção 5.1 para que possamos interpretá-los corretamente. Iniciamos nossa análise no espaço-tempo comutativo começando com a interação do buraco negro cilíndrico e o espaço vazio analisando a equação (5.6)

$$M(t) = \frac{1}{at + \frac{1}{M_0}}, \quad a = \frac{16}{27} \frac{\hbar\alpha^3 G^2}{\pi c^4}.$$

Vemos imediatamente que esta equação naturalmente condiz com a terceira lei da termodinâmica porque prevê a impossibilidade de alcance do zero absoluto de temperatura: para o buraco negro cilíndrico, o raio do horizonte de eventos e a temperatura estão relacionadas de forma diretamente proporcional pela equação (4.13) e como vemos por (4.3), r_+ relaciona-se

³O SageMath é um software de matemática de código aberto baseado na linguagem Python e licenciado sob a GPL. Também conhecido como Sage, ele se baseia em muitos pacotes de código aberto existentes: NumPy, SciPy, matplotlib, Sympy, Maxima, GAP, FLINT, R, entre outros.

com a massa M_+ por meio de $r_+ = \frac{(4M_+)^{\frac{1}{3}}}{\alpha}$, isso tudo significa que se $M \rightarrow 0$, então $T \rightarrow 0$. O resultado (5.6) nos diz que o tempo para $M \rightarrow 0$ tem de ser infinito. Em outras palavras, fisicamente não é possível o buraco negro cilíndrico evaporar completamente. Perceba que este é um resultado natural para a corda negra, não comentamos nada sobre não-comutatividade no aspecto de equilíbrio térmico.

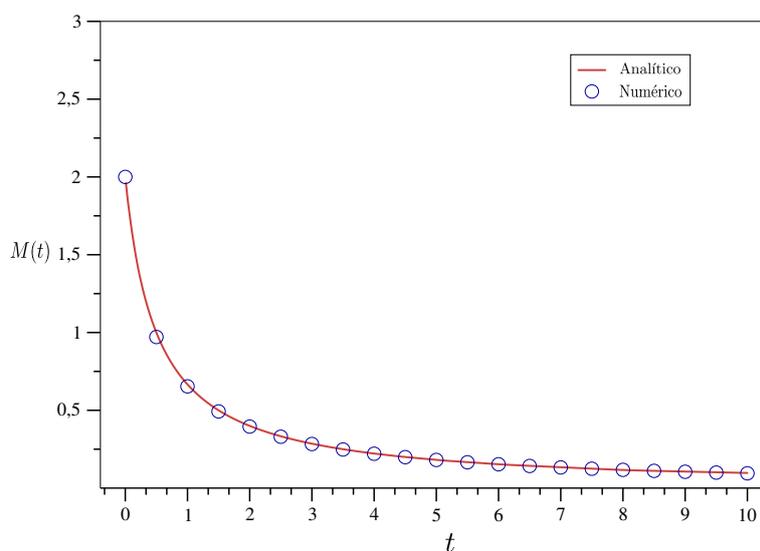


Figura 5.1: Evolução temporal da massa com o espaço vazio como reservatório térmico. Aqui $a = 1$ e $M_0 = 2$ em unidades arbitrárias.

O resultado para a evolução temporal da massa da corda negra, com o espaço vazio como reservatório térmico discutido acima pode ser expresso mais claramente no gráfico ilustrado pela figura 5.1 na qual apresentamos as soluções numérica e analítica para a comparação. Sem perda de generalidade, usamos unidades arbitrárias para facilitar a visualização do gráfico.

Apresentamos também uma plotagem *slope* na figura 5.2 que é um gráfico de inclinação ou um campo de inclinações que mostra a forma da solução de maneira geral. Com este gráfico podemos ter uma ideia sobre como é a forma da solução para vários valores das condições iniciais (massa M_0 e parâmetro a) e vemos que todas elas, a partir do valor de massa inicial, decaem até assintotar o eixo horizontal. O que é esperado uma vez que a temperatura da corda negra é maior que a temperatura do reservatório térmico (espaço vazio), $T > T_R$, e por isso a corda negra emite radiação e evapora continuamente para que a temperatura de equilíbrio seja alcançada.

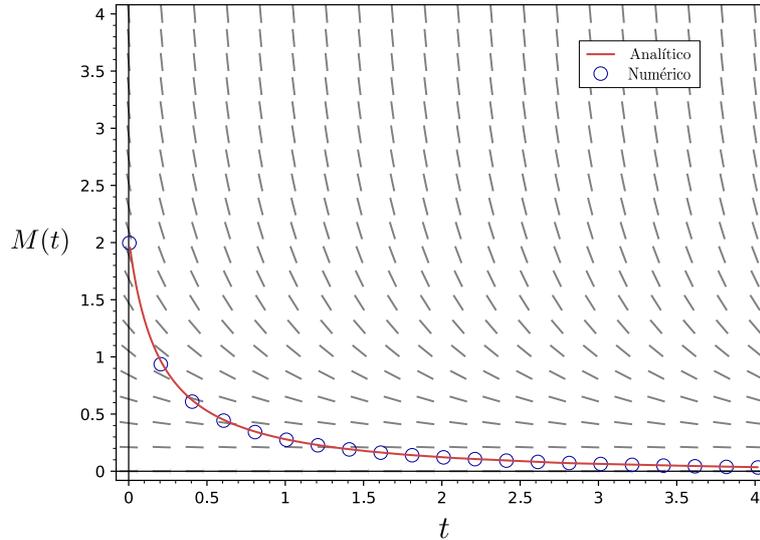


Figura 5.2: Gráfico slope que funciona como um campo de inclinação para as soluções da equação (5.6). Para a solução destacada, $a = 1$ e $M_0 = 2$ em unidades arbitrárias.

5.4.2 Corda negra e radiação cósmica de fundo

Estudando agora o caso em que a radiação cósmica de fundo com temperatura $T_{CMB} = 2,7255\text{K}$ é o reservatório térmico para a corda negra, a equação que governa a evolução temporal da massa devida ao processo de emissão (absorção) de energia é a (5.8)

$$\frac{dM_+}{dt} = -aM_+^2 + bM_+^{\frac{2}{3}}$$

e a sua solução numérica resulta no gráfico ilustrado na figura 5.3. A figura 5.3 mostra que nossos resultados são coerentes com os resultados anteriores quando dissemos que, devido a capacidade calorífica ser sempre positiva (sem back reaction)[equação (4.22)], a corda negra deve sempre evoluir para o equilíbrio térmico. Esta interpretação fica clara quando vemos que mesmo se a massa inicial for maior ou menor que $M = 1$, a massa evolui para este valor, que é o valor de massa de equilíbrio em unidades arbitrárias. Este é o valor da massa de equilíbrio porque para esta plotagem fizemos $a = b$ e como é possível observar a partir de (5.20), $M_E = 1$ para este caso. Este é, portanto, um ponto de equilíbrio estável para o sistema. Um aspecto curioso deste gráfico é perceber que a curva com o valor inicial de massa $M_0 = 2$ decai mais rapidamente no intervalo $0 < t < 1$ que a curva com $M_0 = 0,6$: é possível notar como os pontos azuis que correspondem a $M = 2$ estão mais espaçados verticalmente entre si que os pontos vermelhos correspondentes a $M = 0,6$ mesmo que para os dois casos tenhamos usado passos de mesmo valor 0,1.

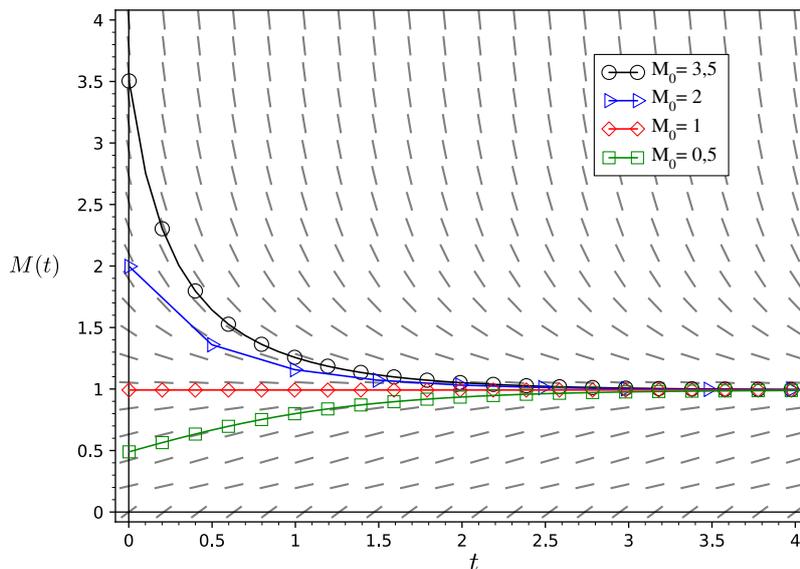


Figura 5.3: Para a solução destacada, $a = b = 1$; $M_0 = 0,5$ (verde); $M_0 = 1$ (vermelho); $M_0 = 2$ (azul) e $M_0 = 3,5$ (preto) em unidades arbitrárias.

5.4.3 Corda negra e evolução da radiação cósmica de fundo

Era da radiação

Nossas atenções agora se voltam para os resultados expressos em (5.26), (5.27) e (5.28). Estas equações nos dizem quais os aspectos de massa da corda negra ao longo das eras do universo. Iniciando pela era da radiação, nos preocupamos com (5.26):

$$\frac{dM_+}{dt} = -aM_+^2 + b\delta_R \frac{M_+^{\frac{2}{3}}}{t^2}, \quad \delta_R = \frac{3T_{CMB}^4}{32\pi G\rho_{R_0}}.$$

Como antes, vamos utilizar unidades arbitrárias e, neste caso, vamos configurar as constantes que aparecem nessa equação como $a = 0,1$ $b = \delta_R = 0,001$. O motivo desta configuração remete somente à melhor apresentação das curvas no gráfico ilustrado na figura 5.4. É importante destacar que as curvas assintotam um eixo horizontal definido pelo valor de M_E , o valor de massa associado ao equilíbrio térmico. Repare que com a escolha para as constantes dadas por $a = 0,1$ e $b = \delta_R = 0,001$, teremos que o comportamento do gráfico 5.4, torna o tempo para que o sistema alcance o equilíbrio maior que $t = 10$ explicitado no gráfico. Este é um ponto de equilíbrio estável do sistema. Perceba que as curvas não se intersectam durante o intervalo temporal considerado o que significa que, dadas as condições iniciais, a evolução da corda negra é única e sabendo os valores dos parâmetros a , b e δ_R , podemos escrever a equação diferencial que governa a evolução do sistema e construir a curva de evolução da mesma.

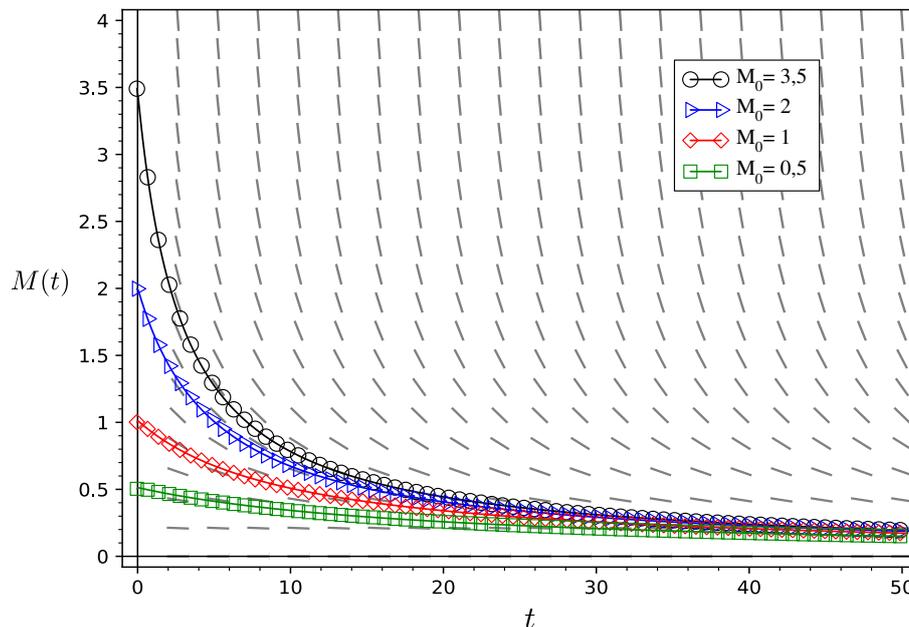


Figura 5.4: Plotagem scope da solução na era da radiação. Aqui, $a = 0,1$; $b = \delta_R = 0,001$ $M_0 = 0,5$ (verde); $M_0 = 1$ (vermelho); $M_0 = 2$ (azul) e $M_0 = 3,5$ (preto) em unidades arbitrárias.

Era da matéria

Analisando agora a era da matéria, nosso estudo é realizado com base na equação (5.27)

$$\frac{dM_+}{dt} = -aM_+^2 + b\delta_M \frac{M_+^{\frac{2}{3}}}{t^{\frac{8}{3}}}, \quad \delta_M = \frac{T_{CMB}^4}{(6\pi G\rho_{M_0})^{\frac{4}{3}}}.$$

A solução numérica para esta equação diferencial ordinária não-linear é apresentada a seguir no gráfico ilustrado na figura 5.5. Inicialmente, podemos destacar o fato de a massa de equilíbrio do sistema é alcançada durante o intervalo considerado e, devido a escolha dos parâmetros, é um valor baixo mas não nulo. Mais uma vez podemos notar que as curvas não se intersectam até o ponto de equilíbrio. Um fato curioso é o pequeno salto no valor de massa próximo a $t = 0$ antes de haver a queda para o valor de equilíbrio do sistema. Este salto é maior para valores iniciais de massa menores e pode se tratar apenas de um problema no cálculo numérico do programa, mas ocorre apenas para esta solução numérica. No gráfico scope 5.5 os parâmetros estão na seguinte configuração: $a = 1,1$, $b = 0,03$, $\delta_M = 0,01$ e $M_0 = 0,5$.

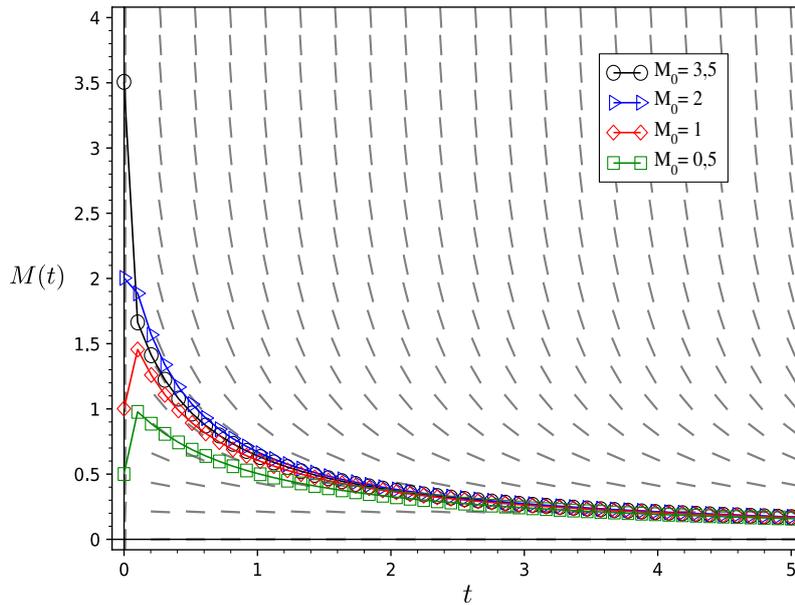


Figura 5.5: Era da matéria. Aqui, $a = 1,1$; $b = 0,03$; $\delta_M = 0,01$ $M_0 = 0,5$ (verde); $M_0 = 1$ (vermelho); $M_0 = 2$ (azul) e $M_0 = 3,5$ (preto) em unidades arbitrárias.

Era da energia escura

Os resultados acerca da era da energia escura são originados a partir da solução numérica da equação (5.28)

$$\frac{dM_+}{dt} = -aM_+^2 + be^{-\delta_\Lambda t} M_+^{\frac{2}{3}}, \quad \delta_\Lambda = 4 \left(\frac{8\pi G}{3} \rho_{\Lambda_0} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

A plotagem encontra-se na figura 5.6

Percebemos que este resultado é semelhante ao resultado do gráfico ilustrado na figura 5.4 que aborda a era da radiação. Entretanto, a diferença mais notável é que o valor de massa para o qual o sistema evolui é maior quando comparado ao caso da era da radiação. Fica claro se repararmos que o valor de equilíbrio era inferior a 0,5 para a era da radiação e no caso da figura 5.6, para a era da energia escura o valor é maior. Claramente pode-se argumentar sobre a diferente escolha de parâmetros, mesmo que a escolha para a plotagem nos dois casos não seja tão diferente, inclusive a escolha para a é a mesma e para b e os respectivos δ_i diferem apenas a partir da segunda casa decimal. Novamente, vemos que não ocorre o salto do valor de massa para pontos próximos a $t = 0$ como acontece na era da matéria. Neste gráfico usamos $a = 0,1$, $b = 0,075$, $\delta_\Lambda = 0,025$.

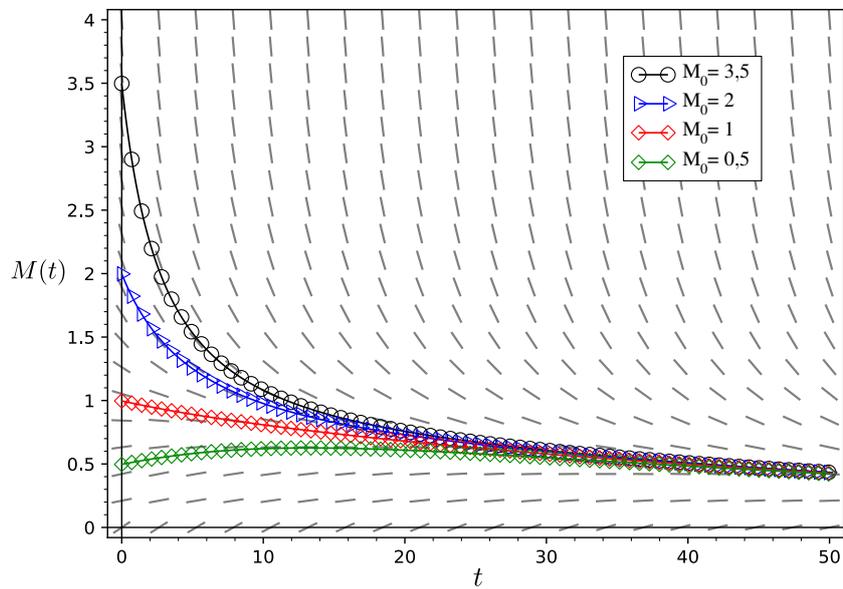


Figura 5.6: Era da energia escura. Aqui, $a = 0,1$; $b = 0,075$; $\delta_\Lambda = 0,025$ com $M_0 = 0,5$ (verde); $M_0 = 1$ (vermelho); $M_0 = 2$ (azul) e $M_0 = 3,5$ (preto) em unidades arbitrárias.

Conclusões e Perspectivas

O universo não tem obrigação de fazer sentido para você

—NEIL DEGRASSE TYSON

Considerando a discussão deste trabalho, destacamos que o estudo do espaço-tempo não-comutativo da corda negra é uma teoria que abarca o comportamento do espaço-tempo quando considera-se a solução de buraco negro cilíndrico em escalas de comprimento da ordem do comprimento de Planck, escala na qual há a previsão de que o sistema sofra a influência da não-comutatividade. A importância de tal estudo reside no fato de tal teoria ter a capacidade de sustentar uma boa descrição do comportamento de sistemas macroscópicos numa escala de comprimento microscópica ainda assegurando previsões da teoria da Relatividade Geral de forma que tal estudo pode ser útil na descrição da fenomenologia gravitacional em curta escala e, e numa caracterização de um universo primordial no início de sua expansão. O estudo da termodinâmica de cordas negras, uma vez que a temperatura associada a buracos negros é bem definida, é realizada de forma semelhante ao que é feito no estudo de termodinâmica de buracos negros com simetria esférica e, uma vez que para o sistema considerado assume-se escalas de comprimento muito curtas, a geometria não-comutativa é levada em conta de forma que na faixa de comprimentos da ordem do comprimento de Planck, aspectos que permeiam a evolução do sistema serão modificados. A proposta do espaço-tempo não-comutativo apresenta-se como uma alternativa para o desenvolvimento de uma teoria gravitacional microscópica que não considera a não-comutatividade e mostra-se, entre outros destaques, bastante útil na descrição de uma teoria clássica como a Relatividade Geral em uma escala de comprimentos cuja fenomenologia é caracterizada por uma descrição puramente quântica. De acordo com o que foi exposto no decorrer deste trabalho, a não-comutatividade exerce sobre a teoria clássica gravitacional o efeito esperado para uma mudança de escala de comprimento de modo semelhante ao que acontece com a relação entre Mecânica Clássica e Mecânica Quântica com a mudança de escala de massa, de forma que entendemos que a adoção do espaço-tempo não-comutativo é uma forma apropriada de compreender a gravidade numa escala governada pela teoria quântica.

Levando em consideração os resultados acerca da termodinâmica da corda negra, percebemos que as modificações sofridas pelas grandezas consideradas podem ser entendidas num contexto termodinâmico e não é necessária uma elaboração extra da teoria para abranger as previsões. No que diz respeito à temperatura, o comportamento para distâncias maiores é o mesmo dado pela teoria comutativa, como esperado, e, na faixa de comprimentos afetada pela não-comutatividade o comportamento de temperaturas mais baixas que a previsão comutativa

destaca uma menor taxa de emissão de partículas¹ o que está de acordo com a previsão de que a corda negra atinja um estado de equilíbrio de troca de matéria com o ambiente à medida que seu horizonte de eventos diminui pois sua densidade de massa não decai à zero nesse processo, mas a um valor constante. Com relação à entropia, entendemos que tal grandeza tem uma descrição mais complexa no espaço-tempo não-comutativo o que leva a lei clássica da área ser recuperada apenas com a consideração de grandes distâncias. O fato de a proposta clássica ser recuperada no limite do comutativo corrobora com tal resultado. A capacidade calorífica discutida nos resultados obtidos apresenta-se de uma maneira semelhante às outras grandezas no que se refere ao comportamento no limite do comutativo: como deveria ser, a descrição fornecida no estudo da influência da não comutatividade remonta ao comportamento previsto pela teoria comutativa quando consideramos distâncias que fogem à escala de não-comutatividade. Em contraponto, a descrição bastante diferente, principalmente quando consideramos distâncias muito curtas merece destaque. Apreciando, por exemplo, o gráfico 4.3, vemos que tomar o raio do horizonte de eventos se aproximando de zero significa aumentar a capacidade calorífica indefinidamente, o que entendemos ser uma forma de expor a verificação da terceira lei da termodinâmica no sistema uma vez que tal previsão significa ser necessária uma quantidade de energia infinita para que seja alcançado o raio do horizonte de eventos nulo, que não é previsto por hipótese, e que seria equivalente a atingir uma temperatura absoluta nula como pode ser visto pelo gráfico 4.2. Dessa forma, a teoria termodinâmica do espaço-tempo não-comutativo da corda negra mostra-se consistente.

A previsão com a consideração de efeitos perturbativos é bastante interessante quando analisamos o sistema sob a ótica de transições de fase. Enquanto que, a complexidade matemática das expressões que expõem os resultados é maior, a fenomenologia é enriquecida quando voltamos as atenções para o comportamento da capacidade calorífica: a descontinuidade matemática que caracteriza a conduta de tal grandeza nos esclarece que a corda negra, na presença de back reaction, sofre transições de fase de ordem que depende do valor do parâmetro diretamente relacionado ao comprimento mínimo característico do espaço-tempo $\sqrt{\theta}$. Como está exposto nas figuras 4.7 e 4.8, a ordem da transição de fase depende do parâmetro $\alpha\sqrt{\theta}$ que como discutimos na seção 4.2.3 envolve a constante cosmológica e o comprimento mínimo. Sendo assim, a ordem de transição de fase depende, numa visão puramente clássica, da relação entre aceleração de expansão e comprimento mínimo do universo, ou, numa visão mais moderna, depende da relação entre a densidade de energia de vácuo e o comprimento mínimo associado ao espaço-tempo. É interessante perceber que tal resultado se mostra importante para análises de (quebra) de simetria conforme em buracos negros.

Em uma análise não relacionada à influência da não-comutatividade, realizada no capítulo 5, conjecturamos a presença da corda negra no universo como conhecemos levando em conta as eras do mesmo. Esta conjectura é interessante para situar a teoria de cordas negras na evolução temporal do universo. Uma vez realizada a narrativa de como tal objeto se comporta em cada era, é possível conjecturar até mesmo sobre a existência de cordas negras em tais períodos de tempo. Em princípio, a corda negra submetida ao universo como entendemos atualmente, no que diz respeito a medidas atuais de temperatura da radiação cósmica de fundo, seria um objeto

¹Lembremos que a taxa de emissão n é descrita pelo espectro de Planck $n = 1/(e^{\frac{k_B}{T_H}} - 1)$ de forma que se o fator de Boltzmann é grande, devido à T_H ser pequeno, o número médio de partículas emitidas será menor.

em equilíbrio térmico com o universo. Todavia, é importante frisar que esta é uma previsão que não leva em conta nenhum efeito de não-comutatividade e/ou efeito back reaction de tal maneira que, como vimos na seção 4.1.2 a capacidade calorífica do buraco negro cilíndrico é sempre positiva e estabilidade termodinâmica é prevista. Considerando a evolução das eras o cenário muda e a investigação com mais detalhes realizada na seção 5.3 torna-se apropriada.

Neste trabalho, caberiam ainda desenvolvimentos acerca da evolução temporal da corda negra no universo levando em consideração a influência da não-comutatividade do espaço-tempo e os efeitos de perturbação que são originados quando leva-se em conta o back reaction na métrica do espaço-tempo. Também entendemos que poderia ser interessante uma análise sobre a relação entre entropia e informação abrangendo o espaço-tempo dado pela presença da corda negra e um desenvolvimento robusto de uma teoria mecânico estatística de tal sistema. Uma vez que este trabalho se apresenta como um trabalho prenunciador em determinados aspectos, como a interação de campos escalares no espaço-tempo não-comutativo de cordas negras, a análise da influência da presença de back reaction no espaço-tempo comutativo e não-comutativo da corda negra, a conjectura da evolução temporal da corda negra ao longo das eras, por assim dizer, tomamos que os desenvolvimentos cabíveis relacionados ao tema são perspectivas de estudo a partir da pequena contribuição para a área fornecida no presente trabalho.

Função gama incompleta inferior

A.1 Definição

A função gama incompleta inferior é definida como

$$\gamma(s, x) = \int_0^x t^{s-1} e^{-t} dt, \quad (\text{A.1})$$

onde claramente a denominação é devida ao fato de a equação (A.1) ser a representação integral da função gama com o limite superior da integral finito. Da mesma maneira define-se a função gama incompleta superior como

$$\Gamma(s, x) = \int_x^\infty t^{s-1} e^{-t} dt \quad (\text{A.2})$$

de forma que claramente

$$\Gamma(s) = \gamma(s, x) + \Gamma(s, x), \quad (\text{A.3})$$

para todos os $s > 0$ e $x \geq 0$. A função (A.2) também é conhecida como função gama incompleta suplementar e, como tais funções foram investigadas primeiramente por Prym em 1877 [71], a função $\Gamma(s, x)$ também é conhecida como função de Prym. Importante destacar que a integral (A.1) converge para $s > 0$ e a extensão para a análise com $s < 0$ pode ser feita, mas não é interessante para nossos propósitos neste trabalho.

Consideramos que tais funções são funções da variável x e de parâmetro s fixo de forma que no limite $x \rightarrow \infty$, o comportamento da função gama incompleta inferior é $\gamma(s, x \rightarrow \infty) \rightarrow \Gamma(s)$ uma vez que

$$\gamma(s, \infty) = \int_0^\infty t^{s-1} e^{-t} dt = \Gamma(s). \quad (\text{A.4})$$

Esta é uma das propriedades mais importantes para nossos propósitos e na próxima seção veremos outras propriedades.

A.2 Algumas propriedades

Destacamos aqui algumas propriedades que podem ser úteis para consulta ao longo dos capítulos deste trabalho.

- **Expansão em série**

$$\begin{aligned}
\gamma(s, x) &= \int_0^x t^{s-1} e^{-t} dt \\
&= \int_0^x t^{s-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^k}{k!} dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^x t^{s+k-1} dt \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{s+k}}{(s+k)k!}. \tag{A.5}
\end{aligned}$$

• **Derivada**

$$\frac{\partial \gamma(s, x)}{\partial x} = -\frac{\partial \Gamma(s, x)}{\partial x} = x^{s-1} e^{-x}. \tag{A.6}$$

Esta relação pode ser verificada fazendo uso da propriedade destacada anteriormente, uma vez que se calculamos a derivada da relação (A.5), vamos ter que

$$\frac{\partial}{\partial x} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{s+k}}{(s+k)k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(s+k)k!} \frac{\partial x^{s+k}}{\partial x} = x^{s-1} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k!} = x^{s-1} e^{-x}. \tag{A.7}$$

• **Expansão assintótica**

Podemos calcular uma expansão em série de Taylor para a função gama incompleta superior se primeiramente fazemos uma substituição $t = u + x$ na integral (A.2) e fazemos

$$\begin{aligned}
\Gamma(n+1, x) &= \int_x^{\infty} t^n e^{-t} dt \\
&= e^{-x} \int_0^{\infty} (u+x)^n e^{-u} du \\
&= e^{-x} \int_0^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{p} u^{n-p} x^p e^{-u} du, \tag{A.8}
\end{aligned}$$

onde $p = n - k$ e usamos o fato de que $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, de tal sorte que

$$\begin{aligned}
\Gamma(n+1, x) &= e^{-x} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{p} x^p \int_0^{\infty} u^{n-p} e^{-u} du \\
&= e^{-x} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{p} x^p \Gamma(n-p+1) \\
&= e^{-x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n!}{p!(n-p)!} x^p (n-p)! \\
&= e^{-x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-k+1)} x^{n-k}. \tag{A.9}
\end{aligned}$$

Usando o fato de que $\gamma(n+1, x) + \Gamma(n+1, x) = \Gamma(n+1)$, pela equação (A.3), podemos isolar a função gama inferior nessa relação e usar a expansão da função gama incompleta superior dada em (A.9) de forma que podemos escrever

$$\begin{aligned}\gamma(n+1, x) &= \Gamma(n+1) - \Gamma(n+1, x) \\ &= \Gamma(n+1) - e^{-x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-k)} x^{n-k},\end{aligned}\quad (\text{A.10})$$

de tal maneira que para nossos propósitos no capítulo 4, utilizamos $n+1 = s = 3/2$ e para valores grandes de x , a aproximação assintótica da função gama incompleta inferior se torna

$$\begin{aligned}\gamma\left(\frac{3}{2}, x\right) &= \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) - \Gamma\left(\frac{3}{2}, x\right) \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left[1 - e^{-x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{(1-2k)/2}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}-k\right)} \right] \\ &\approx \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \sqrt{x}e^{-x} - \dots\end{aligned}\quad (\text{A.11})$$

onde utilizamos a primeira iteração $k = 0$. A equação (A.11) nos mostra formalmente o resultado (A.4) uma vez que quando x é grande, a primeira correção em (A.11) vai a zero e retomamos o valor correspondente à função gama total $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

- **Expressões úteis**

$$\gamma(1, x) = 1 - e^{-x} \quad (\text{A.12})$$

$$\gamma\left(\frac{1}{2}, x\right) = \sqrt{\pi} \operatorname{erf}(\sqrt{x}) \quad (\text{A.13})$$

$$\gamma\left(\frac{3}{2}, x\right) = -\sqrt{x}e^{-x} + \frac{1}{2}\gamma\left(\frac{1}{2}, x\right) \quad (\text{A.14})$$

onde

$$\operatorname{erf}(z) = \int_0^z \frac{2e^{-t^2}}{\sqrt{\pi}} dt \quad (\text{A.15})$$

é a função erro de Gauss. As propriedades A.12 verificam-se facilmente com a substituição do valor de s correspondente na integral que define a função gama incompleta inferior (A.1).

Desenvolvimento matemático da entropia na presença de back reaction

B.1 Entropia no espaço-tempo comutativo

Na seção 4.2.2 iniciamos o cálculo da entropia e apresentamos o resultado do desenvolvimento sem muitos detalhes para que a sequência da discussão apresentada em tal seção não fosse interferida pelo desenvolvimento operacional matemático necessário. Na seção atual pretendemos detalhar o processo de obtenção de tal grandeza. Iniciando com a relação para a parte imaginária da ação apresentada na seção 4.2.2

$$\begin{aligned} \text{ImS} &= \frac{2^{1/3}}{3} \frac{\pi}{\alpha} \int_0^\omega \frac{d\omega'}{(M_+ - \omega')^{1/3} \left[1 + \frac{\sigma}{(M_+ - \omega')^2} \right]} \\ &= \frac{2^{1/3}}{3} \frac{\pi}{\alpha} \int_0^\omega \frac{(M_+ - \omega')^2}{[(M_+ - \omega')^{7/3} + \sigma(M_+ - \omega')^{1/3}]} d\omega' \end{aligned}$$

e agora fazemos a substituição

$$\begin{cases} u = (M_+ - \omega')^{1/3} \\ du = -\frac{1}{3}(M_+ - \omega')^{-2/3} d\omega' \Rightarrow d\omega' = -3u^2 du \end{cases}$$

que leva a

$$\begin{aligned} \text{ImS} &= -2^{1/3} \frac{\pi}{\alpha} \int \frac{u^6}{(u^7 + \sigma u)} u^2 du \\ &= -2^{1/3} \frac{\pi}{\alpha} \int \frac{u^8}{(u^7 + \sigma u)} du \\ &= -2^{1/3} \frac{\pi}{\alpha} \int \frac{u^7}{u^6 + \sigma} du. \end{aligned} \tag{B.1}$$

Agora efetuamos a divisão dos polinômios no integrando para obter

$$\frac{u^7}{(u^6 + \sigma)} = \frac{u(u^6 + \sigma) - \sigma u}{(u^6 + \sigma)} = \frac{\cancel{(u^6 + \sigma)}u}{(u^6 + \sigma)} - \sigma \frac{u}{(u^6 + \sigma)}.$$

Então,

$$\begin{aligned}
 \text{ImS} &= -2^{1/3} \frac{\pi}{\alpha} \int \left[u - \sigma \frac{u}{(u^6 + \sigma)} \right] du \\
 &= -2^{1/3} \frac{\pi}{\alpha} \left[\int u du - \sigma \int \frac{u}{(u^6 + \sigma)} du \right] \\
 &= -2^{1/3} \frac{\pi}{\alpha} \left[\frac{u^2}{2} - \sigma \int \frac{u}{(u^6 + \sigma)} du \right] \tag{B.2}
 \end{aligned}$$

Portanto, temos que resolver a integral acima. Para isso, fazemos a seguinte mudança de variáveis

$$\begin{cases} z = u^2 & \Rightarrow & z^3 = u^6 \\ dz = 2udu & \Rightarrow & udu = \frac{1}{2} dz \end{cases}$$

então, teremos

$$\begin{aligned}
 B = \int \frac{u}{(u^6 + \sigma)} du &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{z^3 + \sigma} dz \\
 &= \frac{1}{2} \int \frac{dz}{(z + \sigma^{1/3})(z^2 - \sigma^{1/3}z + \sigma^{2/3})} \quad \text{onde fatoramos o denominador} \\
 &= \frac{1}{2} \int \left[\frac{1}{3\sigma^{2/3}(z + \sigma^{1/3})} - \frac{z - 2\sigma^{1/3}}{3\sigma^{2/3}(z^2 - \sigma^{1/3}z + \sigma^{2/3})} \right] dz,
 \end{aligned}$$

onde no último passo nós calculamos as frações parciais do integrando e o reescrevemos. A primeira integral resulta em

$$\int \frac{1}{3\sigma^{2/3}(z + \sigma^{1/3})} dz = \frac{1}{3\sigma^{2/3}} \int \frac{dz}{(z + \sigma^{1/3})} = \frac{1}{3\sigma^{1/3}} \ln(z + \sigma^{1/3}). \tag{B.3}$$

Para a segunda integral, vendo que pode aparecer a antiderivada do logaritmo, usamos o truque

$$z - 2\sigma^{1/3} = \frac{1}{2}(2z - \sigma^{1/3}) - \frac{3}{2}\sigma^{1/3},$$

e assim,

$$\int \frac{z - 2\sigma^{1/3}}{3\sigma^{2/3}(z^2 - \sigma^{1/3}z + \sigma^{2/3})} dz = \frac{1}{2} \int \frac{2z - \sigma^{1/3}}{z^2 - \sigma^{1/3}z + \sigma^{2/3}} dz - \frac{3\sigma^{1/3}}{2} \int \frac{dz}{z^2 - \sigma^{1/3}z + \sigma^{2/3}}. \tag{B.4}$$

Para a primeira integral acima fazemos

$$\begin{cases} v = z^2 - \sigma^{1/3}z + \sigma^{2/3} \\ dv = 2z - \sigma^{1/3} dz, \end{cases}$$

de tal sorte que

$$\int \frac{2z - \sigma^{1/3}}{z^2 - \sigma^{1/3}z + \sigma^{2/3}} dz = \ln(z^2 - \sigma^{1/3}z + \sigma^{2/3}). \quad (\text{B.5})$$

Para a segunda integral em (B.4), completamos o quadrado no denominador

$$\int \frac{dz}{z^2 - \sigma^{1/3}z + \sigma^{2/3}} = \int \frac{dz}{\left(z - \frac{\sigma^{1/3}}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\sigma^{2/3}}.$$

Agora fazemos a substituição

$$\begin{cases} p = \frac{2z - \sigma^{1/3}}{\sqrt{3}\sigma^{1/3}} \\ dp = \frac{2}{\sqrt{3}\sigma^{1/3}} dz, \end{cases}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} \int \frac{dz}{\left(z - \frac{\sigma^{1/3}}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\sigma^{2/3}} &= \int \frac{2\sqrt{3}\sigma^{1/3}}{3\sigma^{2/3}p^2 + 3\sigma^{2/3}} dp \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}\sigma^{1/3}} \int \frac{dp}{p^2 + 1} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}\sigma^{1/3}} \arctan(p). \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Portanto, usando os resultados das integrais acima, finalmente podemos escrever o resultado da integral B como

$$B = -\frac{1}{6}\sqrt{3}\sigma^{1/3} \arctan \left[\frac{\sqrt{3}}{3\sigma^{1/3}}(2u^2 - \sigma^{1/3}) \right] + \frac{1}{12}\sigma^{1/3} \ln(u^4 - \sigma^{1/3}) - \frac{1}{6}\sigma^{1/3} \ln(u^2 + \sigma^{1/3}) \quad (\text{B.7})$$

então, a parte imaginária da ação (B.2) se torna

$$\begin{aligned} \text{ImS} &= -\frac{2^{1/3}\pi}{\alpha} \left\{ \frac{u^2}{2} - \left[-\frac{\sqrt{3}\sigma^{1/3}}{6} \arctan \left[\frac{\sqrt{3}}{3\sigma^{1/3}}(2u^2 - \sigma^{1/3}) \right] + \frac{1}{12}\sigma^{1/3} \ln(u^4 - \sigma^{1/3}u^2 + \sigma^{2/3}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\sigma^{1/3}}{6} \ln(u^2 + \sigma^{1/3}) \right] \right\} \\ &= -\frac{1}{2^{1/3}} \frac{\pi}{\alpha} \left\{ u^2 + \frac{\sqrt{3}\sigma^{1/3}}{3} \arctan \left[\frac{\sqrt{3}}{3} \left(\frac{2u^2}{\sigma^{1/3}} - 1 \right) \right] + \frac{\sigma^{1/3}}{3} \ln(u^2 + \sigma^{1/3}) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\sigma^{1/3}}{6} \ln(u^4 - \sigma^{1/3}u^2 + \sigma^{1/3}) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

O próximo passo agora é voltar com a variável de integração original $u = (M_+ - \omega')^{1/3}$

$$\begin{aligned}
\text{Im S} &= -\frac{1}{2^{1/3}} \frac{\pi}{\alpha} \left\{ (M_+ - \omega')^{2/3} + \frac{\sqrt{3}\sigma^{1/3}}{3} \arctan \left[\frac{\sqrt{3}}{3} \left(\frac{2(M_+ - \omega')^{2/3}}{\sigma^{1/3}} - 1 \right) \right] \right. \\
&+ \frac{\sigma^{1/3}}{3} \ln \left[(M_+ - \omega')^{2/3} + \sigma^{1/3} \right] \\
&- \left. \frac{\sigma^{1/3}}{6} \ln \left[(M_+ - \omega')^{4/3} - \sigma^{1/3}(M_+ - \omega')^{2/3} + \sigma^{1/3} \right] \right\} \Bigg|_0^\omega \\
&= -\frac{1}{2^{1/3}} \frac{\pi}{\alpha} \left\{ (M_+ - \omega)^{2/3} - \sigma^{1/3} \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \arctan \left[\frac{\sqrt{3}}{3} \left(\frac{2(M_+ - \omega)^{2/3}}{\sigma^{1/3}} - 1 \right) \right] \right) \right. \\
&+ \frac{1}{3} \ln \left[(M_+ - \omega)^{2/3} + \sigma^{1/3} \right] - \frac{1}{6} \ln \left[(M_+ - \omega)^{4/3} - \sigma^{1/3}(M_+ - \omega)^{2/3} + \sigma^{1/3} \right] \Bigg) \\
&- M_+^{2/3} + \sigma^{1/3} \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \arctan \left[\frac{\sqrt{3}}{3} \left(\frac{2M_+^{2/3}}{\sigma^{1/3}} - 1 \right) \right] \right) + \frac{1}{3} \ln(M_+^{2/3} + \sigma^{1/3}) \\
&- \left. \frac{1}{6} \ln(M_+^{4/3} - \sigma^{1/3}M_+^{2/3} + \sigma^{1/3}) \right\}. \tag{B.9}
\end{aligned}$$

Usando que a variação de entropia é $\Delta S^{(c)} = -2 \text{Im S}$, o resultado é a equação (4.104):

$$\begin{aligned}
\Delta S^{(c)} &= 2^{1/3} \frac{\pi}{\alpha} \left\{ (M_+ - \omega)^{2/3} - \sigma^{1/3} \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \arctan \left[\frac{\sqrt{3}}{3} \left(\frac{2(M_+ - \omega)^{2/3}}{\sigma^{1/3}} - 1 \right) \right] \right) \right. \\
&+ \frac{1}{3} \ln \left[(M_+ - \omega)^{2/3} + \sigma^{1/3} \right] - \frac{1}{6} \ln \left[(M_+ - \omega)^{4/3} - \sigma^{1/3}(M_+ - \omega)^{2/3} + \sigma^{1/3} \right] \Bigg) \\
&- M_+^{2/3} + \sigma^{1/3} \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \arctan \left[\frac{\sqrt{3}}{3} \left(\frac{2M_+^{2/3}}{\sigma^{1/3}} - 1 \right) \right] \right) + \frac{1}{3} \ln(M_+^{2/3} + \sigma^{1/3}) \\
&- \left. \frac{1}{6} \ln(M_+^{4/3} - \sigma^{1/3}M_+^{2/3} + \sigma^{1/3}) \right\}.
\end{aligned}$$

B.2 Entropia no espaço-tempo não-comutativo

Vamos agora calcular a entropia do sistema. Antes de mais nada, para calcular a entropia com o auxílio de (4.71) e (4.76) precisamos escrever a gravidade superficial em (4.127) em termos da massa M_+ . Essa é uma tarefa impossível com o uso direto da relação entre r_+ e M_+ em (4.6)

$$r_+^3 = \frac{8M_+}{\alpha^3 \sqrt{\pi}} \gamma \left(\frac{3}{2}, \frac{r_+^2}{4\theta} \right).$$

Entretanto, se usamos a expansão assintótica da função gama incompleta inferior dada na equação (A.11)

$$\begin{aligned} \gamma\left(\frac{3}{2}, x\right) &= \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) - \Gamma\left(\frac{3}{2}, x\right) \\ &\approx \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left[1 - e^{-x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{(1-2k)/2}}{\Gamma\left(\frac{3}{2} - k\right)} \right], \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

no regime $x \gg 1$, vemos que a relação (4.6) se torna

$$\begin{aligned} r_+^3 &= \frac{8M_+}{\alpha^3 \sqrt{\pi}} \gamma\left(\frac{3}{2}, x\right) \\ r_+^3 &= \frac{8M_+}{\alpha^3 \sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{4M_+}{\alpha^3} \\ r_+ &= \frac{(4M_+)^{\frac{1}{3}}}{\alpha}. \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

Se usarmos a relação acima na expansão assintótica anterior (com $x = r_+^2/4\theta$) e substituirmos o resultado em (4.6), vamos encontrar

$$\begin{aligned} r_+^3 &\approx \frac{8M_+}{\alpha^3 \sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left[1 - \exp\left(-\frac{M_+^{\frac{2}{3}}}{4^{\frac{1}{3}} \alpha^2 \theta}\right) \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\left[\frac{M_+^{\frac{2}{3}}}{4^{\frac{1}{3}} \alpha^2 \theta}\right]^{(1-2p)/2}}{\Gamma\left(\frac{3}{2} - p\right)} \right] \\ &= \frac{4M_+}{\alpha^3} \left[1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{M_+^{\frac{2}{3}}}{4^{\frac{1}{3}} \alpha^2 \theta}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{M_+^{\frac{2}{3}}}{4^{\frac{1}{3}} \alpha^2 \theta}\right) \right], \end{aligned}$$

onde fizemos a primeira iteração $p = 0$. Logo,

$$\begin{aligned}
r_+^3 &\approx \frac{4M_+}{\alpha^3} \left[1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{M_+^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{3}} \alpha \sqrt{\theta}} \exp\left(-\frac{M_+^{\frac{2}{3}}}{4^{\frac{1}{3}} \alpha^2 \theta}\right) \right] \\
&= \frac{4M_+}{\alpha^3} \left[1 - \frac{4^{\frac{1}{3}}}{\alpha \sqrt{\pi \theta}} M_+^{\frac{1}{3}} \exp\left(-\frac{M_+^{\frac{2}{3}}}{4^{\frac{1}{3}} \alpha^2 \theta}\right) \right] \\
\Rightarrow r_+ &\approx \frac{(4M_+)^{\frac{1}{3}}}{\alpha} \left[1 - \frac{(4M_+)^{\frac{1}{3}}}{\alpha} \frac{\exp\left(-\frac{M_+^{\frac{2}{3}}}{4^{\frac{1}{3}} \alpha^2 \theta}\right)}{\sqrt{\pi \theta}} \right]^{\frac{1}{3}}. \tag{B.12}
\end{aligned}$$

Com a equação (B.12) somos capazes de escrever aproximadamente a gravidade superficial \mathcal{K} em (4.127) em termos da massa M_+ . Antes, vamos usar (4.6) e (B.12) para escrever uma expressão para $\gamma\left(\frac{3}{2}, x\right)$ necessária. Temos

$$\begin{aligned}
\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r_+^2}{4\theta}\right) &= \frac{\sqrt{\pi}}{8M_+} \alpha^3 r_+^3 \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{8M_+} \alpha^3 \frac{4M_+}{\alpha^3} \left[1 - \frac{(4M_+)^{\frac{1}{3}}}{\alpha} \frac{\exp\left(-\frac{M_+^{\frac{2}{3}}}{4^{\frac{1}{3}} \alpha^2 \theta}\right)}{\sqrt{\pi \theta}} \right] \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left[1 - \frac{(4M_+)^{\frac{1}{3}}}{\alpha} \frac{\exp\left(-\frac{M_+^{\frac{2}{3}}}{4^{\frac{1}{3}} \alpha^2 \theta}\right)}{\sqrt{\pi \theta}} \right]. \tag{B.13}
\end{aligned}$$

Assim, teremos que usar (B.12) e (B.13) em (4.127). Perceba que em nossa aproximação assintótica $x = \frac{r_+^2}{4\theta} \gg 1$ equivale a fazer uma aproximação ao limite do comutativo, pois ao usar (B.12) estamos usando a primeira correção não-comutativa do espaço-tempo não-comutativo e exploramos esse limite ao fazer $x \gg 1$ porque se $\frac{r_+^2}{4\theta} \gg 1$, $\frac{M_+}{\alpha^3} \gg 1$ também, como pode ser visto de (4.6) (já que $\gamma\left(\frac{3}{2}, x\right) \rightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ nesse limite). Nesse sentido, vemos que o termo negativo entre colchetes na expressão anterior é muito menor que 1 e será desprezado no cálculo de \mathcal{K} que segue

$$\begin{aligned}
\mathcal{K} &= \frac{\alpha^2}{2} \left[\frac{(4M_+)^{\frac{1}{3}}}{\alpha} \right] \left\{ 3 - \frac{1}{4\theta^{\frac{3}{2}}} \left[\frac{(4M_+)^{\frac{1}{3}}}{\alpha} \right]^3 \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{M_+^{\frac{2}{3}}}{4^{\frac{1}{3}}\alpha^2\theta}\right) \right\} \left\{ 1 + \frac{16\sigma}{\alpha^6 \left[\frac{(4M_+)^{\frac{1}{3}}}{\alpha} \right]^6} \right\} \\
&= \frac{\alpha(4M_+)^{\frac{1}{3}}}{2} \left[3 - \frac{1}{4\theta^{\frac{3}{2}}} \frac{4M_+}{\alpha^3} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{M_+^{\frac{2}{3}}}{4^{\frac{1}{3}}\alpha^2\theta}\right) \right] \left[1 + \frac{16\sigma}{16M_+^2} \right] \\
&= \frac{\alpha(4M_+)^{\frac{1}{3}}}{2} \left[3 - \frac{2M_+}{\alpha^3\theta\sqrt{\pi\theta}} \exp\left(-\frac{M_+^{\frac{2}{3}}}{4^{\frac{1}{3}}\alpha^2\theta}\right) \right] \left(1 + \frac{\sigma}{M_+^2} \right) \\
&= \frac{\alpha(4M_+)^{\frac{1}{3}}}{2} \left[3 + \frac{3\sigma}{M_+^2} - \frac{2M_+}{\alpha^3\theta\sqrt{\pi\theta}} \exp\left(-\frac{M_+^{\frac{2}{3}}}{4^{\frac{1}{3}}\alpha^2\theta}\right) - \frac{2\sigma}{\alpha^3\theta\sqrt{\pi\theta}} \frac{\exp\left(-\frac{M_+^{\frac{2}{3}}}{4^{\frac{1}{3}}\alpha^2\theta}\right)}{M_+} \right] \\
&= \frac{\alpha(4M_+)^{\frac{1}{3}}}{2} \left[3 \frac{(M_+^2 + \sigma)}{M_+^2} - \frac{2}{\alpha^3\theta\sqrt{\pi\theta}} \frac{(M_+^2 + \sigma)}{M_+} \exp\left(-\frac{M_+^{\frac{2}{3}}}{4^{\frac{1}{3}}\alpha^2\theta}\right) \right] \\
&= \frac{\alpha}{2} (4M_+)^{\frac{1}{3}} \left[3 \frac{(M_+^2 + \sigma)}{M_+^2} - \frac{2}{\alpha^3\theta\sqrt{\pi\theta}} \frac{(M_+^2 + \sigma)}{M_+} \exp\left(-\frac{M_+^{\frac{2}{3}}}{4^{\frac{1}{3}}\alpha^2\theta}\right) \right] \\
&= \frac{\alpha}{2} \frac{(4M_+)^{\frac{1}{3}} (M_+^2 + \sigma)}{M_+^2} \left[3 - \frac{2M_+}{\alpha^3\theta\sqrt{\pi\theta}} \exp\left(-\frac{M_+^{\frac{2}{3}}}{4^{\frac{1}{3}}\alpha^2\theta}\right) \right] \\
&= \frac{\alpha}{2} 4^{\frac{1}{3}} \frac{(M_+^2 + \sigma)}{M_+^{\frac{5}{3}}} \left[3 - \frac{2M_+}{\alpha^3\theta\sqrt{\pi\theta}} \exp\left(-\frac{M_+^{\frac{2}{3}}}{4^{\frac{1}{3}}\alpha^2\theta}\right) \right] \\
&= \frac{\alpha}{2^{\frac{1}{3}}} \frac{(M_+^2 + \sigma)}{M_+^{\frac{5}{3}}} \left[3 - \frac{2M_+}{\alpha^3\theta\sqrt{\pi\theta}} \exp\left(-\frac{M_+^{\frac{2}{3}}}{4^{\frac{1}{3}}\alpha^2\theta}\right) \right] \\
&= \frac{3\alpha}{2^{\frac{1}{3}}} \frac{(M_+^2 + \sigma)}{M_+^{\frac{5}{3}}} \left[1 - \frac{2M_+}{3\alpha^3\theta\sqrt{\pi\theta}} \exp\left(-\frac{M_+^{\frac{2}{3}}}{4^{\frac{1}{3}}\alpha^2\theta}\right) \right]. \tag{B.14}
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\text{ImS} &= \pi \int_0^\omega \frac{d\omega'}{\mathcal{K}(M_+ - \omega')} \\
&= \frac{2^{\frac{1}{3}}\pi}{3\alpha} \int_0^\omega \frac{(M_+ - \omega')^{\frac{5}{3}} d\omega'}{[(M_+ - \omega')^2 + \sigma] \left[1 - \frac{2(M_+ - \omega')}{3\alpha^3\theta\sqrt{\pi\theta}} \exp\left(-\frac{(M_+ - \omega')^{\frac{2}{3}}}{4^{\frac{1}{3}}\alpha^2\theta}\right) \right]}. \quad (\text{B.15})
\end{aligned}$$

Então, fazendo

$$\begin{cases} x = M_+ - \omega' \\ dx = -d\omega' \end{cases} \quad (\text{B.16})$$

vemos que $\omega' = 0 \Rightarrow x = M_+$ e que $\omega' = \omega \Rightarrow x = M_+ - \omega$. Logo,

$$\text{ImS} = \frac{2^{\frac{1}{3}}\pi}{3\alpha} \int_{(M_+ - \omega)}^{M_+} \frac{x^{\frac{5}{3}} dx}{(x^2 + \sigma) \left[1 - \frac{2x}{3\alpha^3\theta\sqrt{\pi\theta}} \exp\left(-\frac{x^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{2}{3}}\alpha^2\theta}\right) \right]}.$$

Expandindo o termo

$$\left[1 - \frac{2x}{3\alpha^3\theta\sqrt{\pi\theta}} \exp\left(-\frac{x^{\frac{2}{3}}}{4^{\frac{1}{3}}\alpha^2\theta}\right) \right]^{-1} = 1 + \frac{2x}{3\alpha^3\theta\sqrt{\pi\theta}} \exp\left(-\frac{x^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{2}{3}}\alpha^2\theta}\right) + \dots$$

chegamos a

$$\begin{aligned}
\text{ImS} &= \frac{2^{\frac{1}{3}}\pi}{3\alpha} \int_{(M_+ - \omega)}^{M_+} \frac{x^{\frac{5}{3}}}{(x^2 + \sigma)} \left[1 + \frac{2x}{3\alpha^3\theta\sqrt{\pi\theta}} \exp\left(-\frac{x^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{2}{3}}\alpha^2\theta}\right) + \dots \right] dx \\
&= \frac{2^{\frac{1}{3}}\pi}{3\alpha} \int_{(M_+ - \omega)}^{M_+} \left[\frac{x^{\frac{5}{3}}}{(x^2 + \sigma)} + \frac{2x^{\frac{8}{3}}}{3\alpha^3\theta\sqrt{\pi\theta}(x^2 + \sigma)} \exp\left(-\frac{x^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{2}{3}}\alpha^2\theta}\right) \right] dx. \quad (\text{B.17})
\end{aligned}$$

Portanto, temos duas integrais em (B.17) acima. Atacando a primeira:

$$B_1 = \int \frac{x^{\frac{5}{3}}}{(x^2 + \sigma)} dx$$

vamos fazer a substituição

$$\begin{cases} u = x^{\frac{2}{3}} \Rightarrow u^3 = x^2 \\ du = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} dx \end{cases}$$

repare também que podemos escrever $x^{\frac{5}{3}} = x^2 x^{-\frac{1}{3}}$. Assim, teremos

$$B_1 = \frac{3}{2} \int \frac{u^3}{u^3 + \sigma} du,$$

se usarmos o truque $u^3 = u^3 + \sigma - \sigma$, teremos

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{3}{2} \int \frac{u^3 + \sigma - \sigma}{u^3 + \sigma} du \\ &= \frac{3}{2} \int \left(\frac{u^3 + \sigma}{u^3 + \sigma} - \frac{\sigma}{u^3 + \sigma} \right) du \\ &= \frac{3}{2} \int \left(1 - \frac{\sigma}{u^3 + \sigma} \right) du \\ &= \frac{3}{2} \left[u - \sigma \int \frac{1}{u^3 + \sigma} du \right], \end{aligned}$$

fatorando o denominador na integral como $u^3 + \sigma = (u + \sigma^{\frac{1}{3}})(u^2 - \sigma^{\frac{1}{3}}u + \sigma^{\frac{2}{3}})$, B_1 tomará a forma

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{3}{2}u - \frac{3}{2}\sigma \int \frac{1}{u^3 + \sigma} du \\ &= \frac{3}{2}u - \frac{3}{2}\sigma \int \frac{du}{(u + \sigma^{\frac{1}{3}})(u^2 - \sigma^{\frac{1}{3}}u + \sigma^{\frac{2}{3}})}. \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

Calculando agora as frações parciais, vamos ter

$$\frac{1}{(u + \sigma^{\frac{1}{3}})(u^2 - \sigma^{\frac{1}{3}}u + \sigma^{\frac{2}{3}})} = \frac{G}{(u + \sigma^{\frac{1}{3}})} + \frac{Hu + K}{(u^2 - \sigma^{\frac{1}{3}}u + \sigma^{\frac{2}{3}})} \quad (\text{B.19})$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} 1 &= G(u^2 - \sigma^{\frac{1}{3}}u + \sigma^{\frac{2}{3}}) + (Hu + K)(u + \sigma^{\frac{1}{3}}) \\ 1 &= Gu^2 - G\sigma^{\frac{1}{3}}u + G\sigma^{\frac{2}{3}} + Hu^2 + H\sigma^{\frac{1}{3}}u + Ku + K\sigma^{\frac{1}{3}} \\ 1 &= (G + H)u^2 + (H\sigma^{\frac{1}{3}} - G\sigma^{\frac{1}{3}} + K)u + G\sigma^{\frac{2}{3}} + K\sigma^{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

que nos leva aos sistemas:

$$\begin{cases} G + H = 0 \\ (H - G)\sigma^{\frac{1}{3}} + K = 0 \\ G\sigma^{\frac{2}{3}} + K\sigma^{\frac{1}{3}} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H = -G \\ (-G - G)\sigma^{\frac{1}{3}} + K = 0 \\ K = 2\sigma^{\frac{1}{3}}G \end{cases}$$

e substituindo K em $G\sigma^{\frac{2}{3}} + K\sigma^{\frac{1}{3}} = 1$, teremos

$$\begin{aligned}
G\sigma^{\frac{2}{3}} + 2\sigma^{\frac{1}{3}}G\sigma^{\frac{1}{3}} = 1 &\Rightarrow G = \frac{1}{3\sigma^{\frac{2}{3}}} \\
&\Rightarrow H = -\frac{1}{3\sigma^{\frac{2}{3}}} \\
&\Rightarrow K = \frac{2}{3}\frac{\sigma^{\frac{1}{3}}}{\sigma^{\frac{2}{3}}}.
\end{aligned}$$

Usando tudo isso e substituindo na integral, vamos ter

$$\begin{aligned}
B_1 &= \frac{3}{2}u - \frac{3}{2}\sigma \int \left(\frac{1}{3\sigma^{\frac{2}{3}}} - \frac{u - 2\sigma^{\frac{1}{3}}}{3\sigma^{\frac{2}{3}}(u^2 - \sigma^{\frac{1}{3}}u + \sigma^{\frac{2}{3}})} \right) du \\
&= \frac{3}{2}u - \frac{\sigma^{\frac{1}{3}}}{2} \int \frac{du}{u + \sigma^{\frac{1}{3}}} + \frac{\sigma^{\frac{1}{3}}}{2} \int \frac{u - 2\sigma^{\frac{1}{3}}}{(u^2 - \sigma^{\frac{1}{3}}u + \sigma^{\frac{2}{3}})} du \\
&= \frac{3}{2}u - \frac{\sigma^{\frac{1}{3}}}{2} \ln(u + \sigma^{\frac{1}{3}}) + \frac{\sigma^{\frac{1}{3}}}{2} \int \frac{u - 2\sigma^{\frac{1}{3}}}{(u^2 - \sigma^{\frac{1}{3}}u + \sigma^{\frac{2}{3}})} du \tag{B.20}
\end{aligned}$$

usando agora o truque $u - 2\sigma^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}(2u - \sigma^{\frac{1}{3}}) - \frac{3}{2}\sigma^{\frac{1}{3}}$, podemos escrever

$$B_1 = \frac{3}{2}u - \frac{\sigma^{\frac{1}{3}}}{2} \ln(u + \sigma^{\frac{1}{3}}) + \frac{\sigma^{\frac{1}{3}}}{2} \int \left[\frac{2u - \sigma^{\frac{1}{3}}}{2(u^2 - \sigma^{\frac{1}{3}}u + \sigma^{\frac{2}{3}})} - \frac{3\sigma^{\frac{1}{3}}}{2(u^2 - \sigma^{\frac{1}{3}}u + \sigma^{\frac{2}{3}})} \right] du \tag{B.21}$$

se definimos a integral acima como C_1 de forma que

$$C_1 = \frac{1}{2} \int \frac{2u - \sigma^{\frac{1}{3}}}{(u^2 - \sigma^{\frac{1}{3}}u + \sigma^{\frac{2}{3}})} du - \frac{3\sigma^{\frac{1}{3}}}{2} \int \frac{du}{u^2 - \sigma^{\frac{1}{3}}u + \sigma^{\frac{2}{3}}}.$$

Para a primeira integral em C_1 acima podemos proceder fazendo

$$\begin{cases} y = u^2 - \sigma^{\frac{1}{3}}u + \sigma^{\frac{2}{3}} \\ dy = (2u - \sigma^{\frac{1}{3}})du \end{cases}$$

de forma que

$$\int \frac{2u - \sigma^{\frac{1}{3}}}{(u^2 - \sigma^{\frac{1}{3}}u + \sigma^{\frac{2}{3}})} du = \int \frac{dy}{y} = \ln(y) = \ln(u^2 - \sigma^{\frac{1}{3}}u + \sigma^{\frac{2}{3}}).$$

Para a segunda integral em C_1 teremos

$$\int \frac{du}{u^2 - \sigma^{\frac{1}{3}}u + \sigma^{\frac{2}{3}}} = \int \frac{du}{\left(u - \frac{\sigma^{\frac{1}{3}}}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\sigma^{\frac{2}{3}}},$$

onde completamos o quadrado no denominador. Fazendo agora

$$\begin{cases} y = \frac{2u - \sigma^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{3}\sigma^{\frac{1}{3}}} \\ dy = \frac{2}{\sqrt{3}\sigma^{\frac{1}{3}}} du \end{cases}$$

chegamos a

$$\begin{aligned} \int \frac{du}{\left(u - \frac{\sigma^{\frac{1}{3}}}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\sigma^{\frac{2}{3}}} &= \int \frac{1}{\left[\frac{(2u - \sigma^{\frac{1}{3}})^2}{4} + \frac{3}{4}\sigma^{\frac{2}{3}}\right]} \left(\frac{\sqrt{3}\sigma^{\frac{1}{3}}}{2} dy\right) \\ &= \int \frac{2\sqrt{3}\sigma^{\frac{1}{3}}}{(2u - \sigma^{\frac{1}{3}})^2 + 3\sigma^{\frac{2}{3}}} dy \\ &= \int \frac{2\sqrt{3}\sigma^{\frac{1}{3}}}{(\sqrt{3}\sigma^{\frac{1}{3}})^2 y^2 + 3\sigma^{\frac{2}{3}}} dy \\ &= \frac{2\sqrt{3}\sigma^{\frac{1}{3}}}{3\sigma^{\frac{2}{3}}} \int \frac{dv}{y^2 + 1} = \frac{2\sqrt{3}\sigma^{\frac{1}{3}}}{3\sigma^{\frac{2}{3}}} \arctan(y) \\ &= \frac{2\sqrt{3}\sigma^{\frac{1}{3}}}{3\sigma^{\frac{2}{3}}} \arctan\left(\frac{2u - \sigma^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{3}\sigma^{\frac{1}{3}}}\right). \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

Reescrevendo C_1 :

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{2} \ln(u^2 - \sigma^{\frac{1}{3}}u + \sigma^{\frac{2}{3}}) - \frac{3\sigma^{\frac{1}{3}}}{2} \frac{2}{\sqrt{3}\sigma^{\frac{1}{3}}} \arctan\left(\frac{2u - \sigma^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{3}\sigma^{\frac{1}{3}}}\right) \\ &= \frac{1}{2} \ln(u^2 - \sigma^{\frac{1}{3}}u + \sigma^{\frac{2}{3}}) - \sqrt{3} \arctan\left(\frac{2u - \sigma^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{3}\sigma^{\frac{1}{3}}}\right). \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

Reescrevendo agora B_1

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{3}{2}u - \frac{\sigma^{\frac{1}{3}}}{2} \ln(u + \sigma^{\frac{1}{3}}) + \frac{\sigma^{\frac{1}{3}}}{2} \left[\frac{1}{2} \ln(u^2 - \sigma^{\frac{1}{3}}u + \sigma^{\frac{2}{3}}) - \sqrt{3} \arctan\left(\frac{2u - \sigma^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{3}\sigma^{\frac{1}{3}}}\right) \right] \\ B_1 &= \frac{3}{2}u - \frac{\sigma^{\frac{1}{3}}}{2} \left[\frac{1}{2} \ln(u^2 - \sigma^{\frac{1}{3}}u + \sigma^{\frac{2}{3}}) - \ln(u + \sigma^{\frac{1}{3}}) - \sqrt{3} \arctan\left(\frac{2u - \sigma^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{3}\sigma^{\frac{1}{3}}}\right) \right] \\ B_1 &= \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} - \frac{\sigma^{\frac{1}{3}}}{2} \left[\frac{1}{2} \ln(x^{\frac{4}{3}} - \sigma^{\frac{1}{3}}x^{\frac{2}{3}} + \sigma^{\frac{2}{3}}) - \ln(x^{\frac{2}{3}} + \sigma^{\frac{1}{3}}) - \sqrt{3} \arctan\left(\frac{2x^{\frac{2}{3}} - \sigma^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{3}\sigma^{\frac{1}{3}}}\right) \right] \Bigg|_{(M_+ - \omega)}^{M_+} \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

Agora, vamos atacar a segunda integral em (B.17). Vamos proceder removendo a constante multiplicativa $\frac{2}{3\alpha^3\theta\sqrt{\pi\theta}}$ do sinal de integração, para diminuir a escrita. Fazendo

$$\begin{cases} u = x^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow u^6 = x^2 \\ du = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}dx \\ \Rightarrow 3du = x^{-\frac{2}{3}}dx \quad \text{ou} \quad 3u^2 du = dx \end{cases}$$

$$\begin{aligned} B_2 &= \int \frac{x^{\frac{8}{3}}}{(x^2 + \sigma)} \exp\left(-\frac{x^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{2}{3}}\alpha^2\theta}\right) dx \\ &= \int dx \frac{x^3 x^{-\frac{1}{3}}}{(x^2 + \sigma)} \exp\left(-\frac{x^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{2}{3}}\alpha^2\theta}\right) \\ &= 3 \int du \frac{u^2 u^9 u^{-1}}{u^6 + \sigma} \exp\left(-\frac{u^2}{2^{\frac{2}{3}}\alpha^2\theta}\right) \\ &= 3 \int du \frac{u^{10}}{u^6 + \sigma} \exp\left(-\frac{u^2}{2^{\frac{2}{3}}\alpha^2\theta}\right). \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

Note que por divisão de polinômios podemos reescrever o integrando acima como

$$\frac{u^{10}}{u^6 + \sigma} = u^4 - \frac{\sigma u^4}{u^6 + \sigma} \quad (\text{B.26})$$

e assim,

$$\begin{aligned} B_2 &= 3 \int du \left[u^4 \exp\left(-\frac{u^2}{2^{\frac{2}{3}}\alpha^2\theta}\right) - \frac{\sigma u^4}{(u^6 + \sigma)} \exp\left(-\frac{u^2}{2^{\frac{2}{3}}\alpha^2\theta}\right) \right] \\ &= 3 \underbrace{\int u^4 \exp\left(-\frac{u^2}{2^{\frac{2}{3}}\alpha^2\theta}\right) du}_{D_1} - 3\sigma \underbrace{\int \frac{u^4}{(u^6 + \sigma)} \exp\left(-\frac{u^2}{2^{\frac{2}{3}}\alpha^2\theta}\right) du}_{D_2}. \end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

Para resolver D_1 adotemos $v = 2^{\frac{2}{3}}\alpha^2\theta$ e executemos uma integração por partes na forma

$$\begin{cases} f = u^3 & df = 3u^2 \\ dg = ue^{-\frac{u^2}{v}} du & g = -\frac{ve^{-\frac{u^2}{v}}}{2} \end{cases}$$

que nos leva a

$$\begin{aligned}
D_1 &= \int u^4 e^{-\frac{u^2}{v}} du \\
&= -\frac{v}{2} u^3 e^{-\frac{u^2}{v}} - \int -\frac{3v}{2} u^2 e^{-\frac{u^2}{v}} du \\
&= -\frac{v}{2} u^3 e^{-\frac{u^2}{v}} + \frac{3v}{2} \int u^2 e^{-\frac{u^2}{v}} du \\
&\quad \left\{ \begin{array}{l} f = u \quad df = du \\ dg = u e^{-\frac{u^2}{v}} du \quad g = -\frac{v e^{-\frac{u^2}{v}}}{2} \end{array} \right. \\
&= -\frac{v}{2} u^3 e^{-\frac{u^2}{v}} + \frac{3v}{2} \left[-\frac{v}{2} u e^{-\frac{u^2}{v}} - \int -\frac{v}{2} e^{-\frac{u^2}{v}} du \right] \\
&= -\frac{v}{2} u^3 e^{-\frac{u^2}{v}} - \frac{3v^2}{4} u e^{-\frac{u^2}{v}} + \frac{3v^2}{4} \int e^{-\frac{u^2}{v}} du,
\end{aligned}$$

resolvendo a integral remanescente com $w = \frac{u}{\sqrt{v}}$, e por isso $dw = \frac{du}{\sqrt{v}}$, teremos

$$\int e^{-\frac{u^2}{v}} du = \sqrt{v} \int e^{-w^2} dw = \frac{\sqrt{v\pi}}{2} \int \frac{2e^{-w^2}}{\sqrt{\pi}} dy \quad (\text{B.28})$$

onde multiplicamos o integrando por $1 = \frac{2\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\pi}}$ para chegar à equação anterior. A integral acima é conhecida como função erro de Gauss $\text{erf}(w)$. Portanto,

$$\int e^{-\frac{u^2}{v}} du = \frac{\sqrt{v\pi}}{2} \text{erf}(w) = \frac{\sqrt{v\pi}}{2} \text{erf}\left(\frac{u}{\sqrt{v}}\right). \quad (\text{B.29})$$

Portanto, D_1 é

$$\begin{aligned}
D_1 &= \frac{3v^2\sqrt{v\pi}}{8} \text{erf}\left(\frac{u}{\sqrt{v}}\right) - \frac{v}{2} u^3 e^{-\frac{u^2}{v}} - \frac{3v^2}{4} u e^{-\frac{u^2}{v}} \\
&= \frac{3\sqrt{\pi}}{8} v^{\frac{5}{2}} \text{erf}\left(\frac{x^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{v}}\right) - \frac{v}{2} x e^{-\frac{x^{\frac{2}{3}}}{v}} - \frac{3v^2}{4} x^{\frac{1}{3}} e^{-\frac{x^{\frac{2}{3}}}{v}}. \quad (\text{B.30})
\end{aligned}$$

Vamos agora dar atenção à D_2 . Vamos reescrever o denominador do integrando e depois expandir em série:

$$\begin{aligned}
D_2 &= \int \frac{u^4}{u^6 + \sigma} e^{-\frac{u^2}{v}} du \\
&= \int du \frac{u^4}{u^6 \left(1 + \frac{\sigma}{u^6}\right)} e^{-\frac{u^2}{v}} \\
&= \int du \frac{\left[1 - \left(-\frac{\sigma}{u^6}\right)\right]^{-1}}{u^2} e^{-\frac{u^2}{v}} \\
&= \int du \frac{1}{u^2} \left[1 + \left(-\frac{\sigma}{u^6}\right) + \left(-\frac{\sigma}{u^6}\right)^2 + \dots\right] e^{-\frac{u^2}{v}} \\
&= \underbrace{\int \frac{e^{-\frac{u^2}{v}}}{u^2} du}_{I_1} - \sigma \underbrace{\int \frac{e^{-\frac{u^2}{v}}}{u^8} du}_{I_2}, \tag{B.31}
\end{aligned}$$

onde mantivemos apenas os termos de maior ordem da expansão. Trabalhando com a primeira integral vamos fazer uma integração por partes por meio de

$$\begin{cases} f = e^{-\frac{u^2}{v}} & df = -\frac{2ue^{-\frac{u^2}{v}}}{v} du \\ dg = \frac{1}{u^2} du & g = -\frac{1}{u} \end{cases}$$

que nos deixa com

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int \frac{e^{-\frac{u^2}{v}}}{u^2} \\
&= -\frac{e^{-\frac{u^2}{v}}}{u} - \int \frac{2}{v} e^{-\frac{u^2}{v}} du,
\end{aligned}$$

mas se fazemos $w = \frac{u}{\sqrt{v}} \Rightarrow dw = \frac{du}{\sqrt{v}}$ a integral se torna

$$\begin{aligned}
I_1 &= -\frac{e^{-\frac{u^2}{v}}}{u} - \frac{\sqrt{v}}{v} \sqrt{\pi} \int \frac{2e^{-w^2}}{\sqrt{\pi}} dw \\
&= -\frac{e^{-\frac{u^2}{v}}}{u} - \sqrt{\frac{\pi}{v}} \operatorname{erf}(w) \\
&= -\frac{e^{-\frac{u^2}{v}}}{u} - \sqrt{\frac{\pi}{v}} \operatorname{erf}\left(\frac{u}{\sqrt{v}}\right) \\
I_1 &= -\frac{e^{-\frac{x^{\frac{2}{3}}}{v}}}{x^{\frac{1}{3}}} - \sqrt{\frac{\pi}{v}} \operatorname{erf}\left(\frac{x^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{v}}\right). \tag{B.32}
\end{aligned}$$

Agora atacamos I_2 com a integração por partes dada por

$$\begin{cases} f = \frac{e^{-\frac{u^2}{v}}}{u^6} & df = - \left(\frac{2e^{-\frac{u^2}{v}}}{vu^5} + \frac{6e^{-\frac{u^2}{v}}}{u^7} \right) du \\ dg = \frac{1}{u^2} du & g = -\frac{1}{u} \end{cases}$$

de modo que I_2 é

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \frac{e^{-\frac{u^2}{v}}}{u^8} \\ &= -\frac{e^{-\frac{u^2}{v}}}{u^7} - \int \left[\frac{2e^{-\frac{u^2}{v}}}{vu^6} + \frac{6e^{-\frac{u^2}{v}}}{u^8} \right] du \\ &= -\frac{e^{-\frac{u^2}{v}}}{u^7} - \left[\frac{2}{v} \int \frac{e^{-\frac{u^2}{v}}}{u^6} du + 6 \int \frac{e^{-\frac{u^2}{v}}}{u^8} du \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.33})$$

Note que a integral que define $I_2 = \int \frac{e^{-\frac{u^2}{v}}}{u^8} du$ aparece novamente no lado direito da equação anterior. Isso nos permite resolver para I_2 como segue

$$\begin{aligned} I_2 &= -\frac{e^{-\frac{u^2}{v}}}{u^7} - \frac{2}{v} \int \frac{e^{-\frac{u^2}{v}}}{u^6} du - 6I_2 \\ I_2 &= -\frac{e^{-\frac{u^2}{v}}}{7u^7} - \frac{2}{7v} \underbrace{\int \frac{e^{-\frac{u^2}{v}}}{u^6} du}_{I_3}. \end{aligned} \quad (\text{B.34})$$

Precisamos agora resolver I_3 :

$$\begin{cases} f = \frac{e^{-\frac{u^2}{v}}}{u^4} & df = - \left(\frac{2e^{-\frac{u^2}{v}}}{vu^3} + \frac{4e^{-\frac{u^2}{v}}}{u^5} \right) du \\ dg = \frac{1}{u^2} du & g = -\frac{1}{u} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
I_3 &= \int \frac{e^{-\frac{u^2}{v}}}{u^6} \\
&= -\frac{e^{-\frac{u^2}{v}}}{u^5} - \int \left[\frac{2e^{-\frac{u^2}{v}}}{vu^4} + \frac{4e^{-\frac{u^2}{v}}}{u^6} \right] du \\
I_3 &= -\frac{e^{-\frac{u^2}{v}}}{u^5} - \frac{2}{v} \int \frac{e^{-\frac{u^2}{v}}}{u^4} du - 4I_3 \\
I_3 &= -\frac{e^{-\frac{u^2}{v}}}{5u^5} - \frac{2}{5v} \underbrace{\int \frac{e^{-\frac{u^2}{v}}}{u^4} du}_{I_4}
\end{aligned} \tag{B.35}$$

e seguindo o mesmo procedimento:

$$\begin{cases} f = \frac{e^{-\frac{u^2}{v}}}{u^2} & df = -\left(\frac{2e^{-\frac{u^2}{v}}}{vu} + \frac{2e^{-\frac{u^2}{v}}}{u^3} \right) du \\ dg = \frac{1}{u^2} du & g = -\frac{1}{u} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
I_4 &= \int \frac{e^{-\frac{u^2}{v}}}{u^4} du \\
I_4 &= -\frac{e^{-\frac{u^2}{v}}}{u^3} - \int \left[\frac{2e^{-\frac{u^2}{v}}}{vu^2} + \frac{2e^{-\frac{u^2}{v}}}{u^4} \right] du \\
I_4 &= -\frac{e^{-\frac{u^2}{v}}}{u^3} - \frac{2}{v} \int \frac{e^{-\frac{u^2}{v}}}{u^2} du - 2I_4 \\
I_4 &= -\frac{e^{-\frac{u^2}{v}}}{3u^3} - \frac{2}{3v} \int \frac{e^{-\frac{u^2}{v}}}{u^2} du \\
I_4 &= -\frac{e^{-\frac{u^2}{v}}}{3u^3} - \frac{2}{3v} I_1.
\end{aligned} \tag{B.36}$$

Logo,

$$I_4 = -\frac{e^{-\frac{u^2}{v}}}{3u^3} - \frac{2}{3v} \left[-\frac{e^{-\frac{u^2}{v}}}{u} - \sqrt{\frac{\pi}{v}} \operatorname{erf} \left(\frac{u}{\sqrt{v}} \right) \right]. \tag{B.37}$$

Onde nós substituímos I_1 em termos de u . Agora, substituímos I_4 em (B.35) para obter I_3 :

$$\begin{aligned}
I_3 &= -\frac{e^{-\frac{u^2}{v}}}{5u^5} - \frac{2}{5v} \left[-\frac{e^{-\frac{u^2}{v}}}{3u^3} - \frac{2}{3v} \left(-\frac{e^{-\frac{u^2}{v}}}{u} - \sqrt{\frac{\pi}{v}} \operatorname{erf} \left(\frac{u}{\sqrt{v}} \right) \right) \right] \\
I_3 &= -\frac{e^{-\frac{u^2}{v}}}{5u^5} + \left[\frac{2e^{-\frac{u^2}{v}}}{15vu^3} + \frac{4}{15v^2} \left(-\frac{e^{-\frac{u^2}{v}}}{u} - \sqrt{\frac{\pi}{v}} \operatorname{erf} \left(\frac{u}{\sqrt{v}} \right) \right) \right]. \quad (\text{B.38})
\end{aligned}$$

Substituindo agora a equação para I_3 anterior na equação (B.34), teremos

$$\begin{aligned}
I_2 &= -\frac{e^{-\frac{u^2}{v}}}{7u^7} - \frac{2}{7v} \left\{ -\frac{e^{-\frac{u^2}{v}}}{5u^5} + \left[\frac{2e^{-\frac{u^2}{v}}}{15vu^3} + \frac{4}{15v^2} \left(-\frac{e^{-\frac{u^2}{v}}}{u} - \sqrt{\frac{\pi}{v}} \operatorname{erf} \left(\frac{u}{\sqrt{v}} \right) \right) \right] \right\} \\
&= -\frac{e^{-\frac{u^2}{v}}}{7u^7} + \frac{2e^{-\frac{u^2}{v}}}{35vu^5} - \frac{4e^{-\frac{u^2}{v}}}{105v^2u^3} - \frac{8}{105v^3} \left[-\frac{e^{-\frac{u^2}{v}}}{u} - \sqrt{\frac{\pi}{v}} \operatorname{erf} \left(\frac{u}{\sqrt{v}} \right) \right] \\
&= \frac{8}{105v^7} \sqrt{\frac{\pi}{v}} \operatorname{erf} \left(\frac{u}{\sqrt{v}} \right) + \frac{(8u^6 - 4vu^4 + 6v^2u^2 - 15v^3)}{105v^3u^7} e^{-\frac{u^2}{v}} \\
I_2 &= \frac{8}{105v^7} \sqrt{\frac{\pi}{v}} \operatorname{erf} \left(\frac{x^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{v}} \right) + \frac{(8x^2 - 4vx^{\frac{4}{3}} + v^2x^{\frac{2}{3}} - 15v^3)}{105v^3x^{\frac{7}{3}}} e^{-\frac{x^{\frac{2}{3}}}{v}}. \quad (\text{B.39})
\end{aligned}$$

Temos I_1 em (B.32) e I_2 no resultado anterior necessárias para determinar D_2 em (B.31). Com D_2 seremos capazes de determinar B_2 em (B.27) e aliando este resultado a B_1 em (B.24) podemos determinar $\operatorname{Im}S$ em (B.17) e com isso a variação de entropia. Então,

$$\begin{aligned}
D_2 &= I_1 - \sigma I_2 \\
&= \frac{e^{-\frac{x^{\frac{2}{3}}}{v}}}{x^{\frac{1}{3}}} - \sqrt{\frac{\pi}{v}} \operatorname{erf} \left(\frac{x^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{v}} \right) - \sigma \left[\frac{8}{105v^7} \sqrt{\frac{\pi}{v}} \operatorname{erf} \left(\frac{x^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{v}} \right) + \frac{(8x^2 - 4vx^{\frac{4}{3}} + v^2x^{\frac{2}{3}} - 15v^3)}{105v^3x^{\frac{7}{3}}} e^{-\frac{x^{\frac{2}{3}}}{v}} \right]. \quad (\text{B.40})
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
B_2 &= 3D_1 - 3\sigma D_2 \\
&= 3(D_1 - \sigma D_2) \\
&= 3 \left\{ \frac{3\sqrt{\pi}}{8} v^{\frac{5}{2}} \operatorname{erf} \left(\frac{x^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{v}} \right) - \frac{v}{2} x e^{-\frac{x^{\frac{2}{3}}}{v}} - \frac{3v^2}{4} x^{\frac{1}{3}} e^{-\frac{x^{\frac{2}{3}}}{v}} - \sigma \left[-\frac{e^{-\frac{x^{\frac{2}{3}}}{v}}}{x^{\frac{1}{3}}} - \sqrt{\frac{\pi}{v}} \operatorname{erf} \left(\frac{x^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{v}} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \sigma \left(\frac{8}{105v^7} \sqrt{\frac{\pi}{v}} \operatorname{erf} \left(\frac{x^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{v}} \right) + \frac{(8x^2 - 4vx^{\frac{4}{3}} + v^2x^{\frac{2}{3}} - 15v^3)}{105v^3x^{\frac{7}{3}}} e^{-\frac{x^{\frac{2}{3}}}{v}} \right) \right] \right\} \Bigg|_{(M_+ - \omega)}^{M_+} \quad (\text{B.41})
\end{aligned}$$

Agora, com B_1 de (B.24) e B_2 acima temos que (B.17) fica

$$\begin{aligned}
\text{Im}S &= \frac{2^{\frac{1}{3}}\pi}{3\alpha} \left(B_1 + \frac{2}{3\alpha^3\theta\sqrt{\pi\theta}} B_2 \right) \\
&= \frac{2^{\frac{1}{3}}\pi}{3\alpha} \left(\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} - \frac{\sigma^{\frac{1}{3}}}{2} \left[\frac{1}{2} \ln(x^{\frac{4}{3}} - \sigma^{\frac{1}{3}}x^{\frac{2}{3}} + \sigma^{\frac{2}{3}}) - \ln(x^{\frac{2}{3}} + \sigma^{\frac{1}{3}}) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \sqrt{3} \arctan \left(\frac{2x^{\frac{2}{3}} - \sigma^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{3}\sigma^{\frac{1}{3}}} \right) \right] \right) \Big|_{(M_+-\omega)}^{M_+} \\
&\quad + \frac{2^{\frac{4}{3}}\pi}{9\alpha^4\theta\sqrt{\pi\theta}} \left(\frac{9\nu^3}{8} \sqrt{\frac{\pi}{\nu}} \text{erf} \left(\frac{x^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{\nu}} \right) - \frac{3\nu}{2} x e^{-\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\nu}} - \frac{9\nu^2}{4} x^{\frac{1}{3}} e^{-\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\nu}} \right. \\
&\quad + 3\sigma \left[\frac{e^{-\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\nu}}}{x^{\frac{1}{3}}} + \sqrt{\frac{\pi}{\nu}} \text{erf} \left(\frac{x^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{\nu}} \right) \right. \\
&\quad \left. \left. + \sigma \left(\frac{8}{105\nu^7} \sqrt{\frac{\pi}{\nu}} \text{erf} \left(\frac{x^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{\nu}} \right) + \frac{(8x^2 - 4\nu x^{\frac{4}{3}} + \nu^2 x^{\frac{2}{3}} - 15\nu^3)}{105\nu^3 x^{\frac{7}{3}}} e^{-\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\nu}} \right) \right] \right) \Big|_{(M_+-\omega)}^{M_+} \quad (\text{B.42})
\end{aligned}$$

Avaliando:

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \text{ImS} \\
&= \frac{2^{\frac{1}{3}}\pi}{3\alpha} \left\{ \frac{3}{2}M_+^{\frac{2}{3}} - \frac{\sigma^{\frac{1}{3}}}{2} \left[\frac{1}{2} \ln(M_+^{\frac{4}{3}} - \sigma^{\frac{1}{3}}M_+^{\frac{2}{3}} + \sigma^{\frac{2}{3}}) - \ln(M_+^{\frac{2}{3}} + \sigma^{\frac{1}{3}}) - \sqrt{3} \arctan \left(\frac{2M_+^{\frac{2}{3}} - \sigma^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{3}\sigma^{\frac{1}{3}}} \right) \right] \right. \\
&- \frac{3}{2}(M_+ - \omega)^{\frac{2}{3}} + \frac{\sigma^{\frac{1}{3}}}{2} \left[\frac{1}{2} \ln[(M_+ - \omega)^{\frac{4}{3}} - \sigma^{\frac{1}{3}}(M_+ - \omega)^{\frac{2}{3}} + \sigma^{\frac{2}{3}}] - \ln[(M_+ - \omega)^{\frac{2}{3}} + \sigma^{\frac{1}{3}}] \right. \\
&- \left. \left. \sqrt{3} \arctan \left(\frac{2(M_+ - \omega)^{\frac{2}{3}} - \sigma^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{3}\sigma^{\frac{1}{3}}} \right) \right] \right\} \\
&+ \frac{2^{\frac{4}{3}}\pi}{9\alpha^4\theta\sqrt{\pi\theta}} \left\{ \frac{9v^3}{8} \sqrt{\frac{\pi}{v}} \text{erf} \left(\frac{M_+^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{v}} \right) - \frac{3v}{2} M_+ e^{-\frac{M_+^{\frac{2}{3}}}{v}} - \frac{9v^2}{4} M_+^{\frac{1}{3}} e^{-\frac{M_+^{\frac{2}{3}}}{v}} + 3\sigma \left[\frac{e^{-\frac{M_+^{\frac{2}{3}}}{v}}}{M_+^{\frac{1}{3}}} \right. \right. \\
&+ \left. \left. \sqrt{\frac{\pi}{v}} \text{erf} \left(\frac{M_+^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{v}} \right) + \sigma \left(\frac{8}{105v^7} \sqrt{\frac{\pi}{v}} \text{erf} \left(\frac{M_+^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{v}} \right) + \frac{(8M_+^2 - 4vM_+^{\frac{4}{3}} + v^2M_+^{\frac{2}{3}} - 15v^3)}{105v^3M_+^{\frac{7}{3}}} e^{-\frac{M_+^{\frac{2}{3}}}{v}} \right) \right] \right. \\
&- \frac{9v^3}{8} \sqrt{\frac{\pi}{v}} \text{erf} \left[\frac{(M_+ - \omega)^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{v}} \right] + \frac{3v}{2} (M_+ - \omega) e^{-\frac{(M_+ - \omega)^{\frac{2}{3}}}{v}} + \frac{9v^2}{4} (M_+ - \omega)^{\frac{1}{3}} e^{-\frac{(M_+ - \omega)^{\frac{2}{3}}}{v}} \\
&- 3\sigma \left[\frac{e^{-\frac{(M_+ - \omega)^{\frac{2}{3}}}{v}}}{(M_+ - \omega)^{\frac{1}{3}}} + \sqrt{\frac{\pi}{v}} \text{erf} \left[\frac{(M_+ - \omega)^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{v}} \right] + \sigma \left(\frac{8}{105v^7} \sqrt{\frac{\pi}{v}} \text{erf} \left(\frac{(M_+ - \omega)^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{v}} \right) \right. \right. \\
&+ \left. \left. \frac{[8(M_+ - \omega)^2 - 4v(M_+ - \omega)^{\frac{4}{3}} + v^2(M_+ - \omega)^{\frac{2}{3}} - 15v^3]}{105v^3(M_+ - \omega)^{\frac{7}{3}}} e^{-\frac{(M_+ - \omega)^{\frac{2}{3}}}{v}} \right] \right] \right\}. \tag{B.43}
\end{aligned}$$

Agora usamos a relação $\Delta S = -2\text{ImS}$ para encontrar a expressão para a entropia do sistema na presença de back reaction. Portanto, após multiplicar a expressão acima por -2 e fazer determinados ajustes a expressão final para a entropia é dada por

$$\begin{aligned}
\Delta S = & 2^{\frac{1}{3}} \frac{\pi}{\alpha} \left\{ (M_+ - \omega)^{\frac{2}{3}} + \sigma^{\frac{1}{3}} \left[\frac{\sqrt{3}}{3} \arctan \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \left[\frac{2(M_+ - \omega)^{\frac{2}{3}}}{\sigma^{\frac{1}{3}}} - 1 \right] \right) + \frac{1}{3} \ln[(M_+ - \omega)^{\frac{2}{3}} + \sigma^{\frac{1}{3}}] \right. \right. \\
& - \frac{1}{6} \ln[(M_+ - \omega)^{\frac{4}{3}} - \sigma^{\frac{1}{3}}(M_+ - \omega)^{\frac{2}{3}} + \sigma^{\frac{2}{3}}] - M_+^{\frac{2}{3}} - \sigma^{\frac{1}{3}} \left[\frac{\sqrt{3}}{3} \arctan \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \left[\frac{2M_+^{\frac{2}{3}}}{\sigma^{\frac{1}{3}}} - 1 \right] \right) \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{3} \ln(M_+^{\frac{2}{3}} + \sigma^{\frac{1}{3}}) - \frac{1}{6} \ln(M_+^{\frac{4}{3}} - \sigma^{\frac{1}{3}}M_+^{\frac{2}{3}} + \sigma^{\frac{2}{3}}) \right] \right\} \\
& + \frac{2^{\frac{4}{3}}}{\alpha^4 \theta} \sqrt{\frac{\pi}{\theta}} \left\{ \frac{v^3}{4} \sqrt{\frac{\pi}{v}} \operatorname{erf} \left[\frac{(M_+ - \omega)^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{v}} \right] - \frac{v}{3} (M_+ - \omega) e^{-\frac{(M_+ - \omega)^{\frac{2}{3}}}{v}} - \frac{v^2}{2} (M_+ - \omega)^{\frac{1}{3}} e^{-\frac{(M_+ - \omega)^{\frac{2}{3}}}{v}} \right. \\
& + \frac{2}{3} \sigma \left[\frac{e^{-\frac{(M_+ - \omega)^{\frac{2}{3}}}{v}}}{(M_+ - \omega)^{\frac{1}{3}}} + \sqrt{\frac{\pi}{v}} \operatorname{erf} \left[\frac{(M_+ - \omega)^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{v}} \right] + \frac{\sigma}{9} \left(\frac{8}{105v^7} \sqrt{\frac{\pi}{v}} \operatorname{erf} \left[\frac{(M_+ - \omega)^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{v}} \right] \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{[8(M_+ - \omega)^2 - 4v(M_+ - \omega)^{\frac{4}{3}} + v^2(M_+ - \omega)^{\frac{2}{3}} - 15v^3]}{105v^3(M_+ - \omega)^{\frac{7}{3}}} e^{-\frac{(M_+ - \omega)^{\frac{2}{3}}}{v}} \right] \right. \\
& - \frac{v^3}{4} \sqrt{\frac{\pi}{v}} \operatorname{erf} \left(\frac{M_+^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{v}} \right) + \frac{v}{3} M_+ e^{-\frac{M_+^{\frac{2}{3}}}{v}} - \frac{v^2}{2} M_+^{\frac{1}{3}} e^{-\frac{M_+^{\frac{2}{3}}}{v}} - \frac{2\sigma}{3} \left[\frac{e^{-\frac{M_+^{\frac{2}{3}}}{v}}}{M_+^{\frac{1}{3}}} + \sqrt{\frac{\pi}{v}} \operatorname{erf} \left(\frac{M_+^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{v}} \right) \right. \\
& \left. \left. + \frac{\sigma}{9} \left(\frac{8}{105v^7} \sqrt{\frac{\pi}{v}} \operatorname{erf} \left(\frac{M_+^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{v}} \right) + \frac{(8M_+^2 - 4vM_+^{\frac{4}{3}} + v^2M_+^{\frac{2}{3}} - 15v^3)}{105v^3M_+^{\frac{7}{3}}} e^{-\frac{M_+^{\frac{2}{3}}}{v}} \right) \right] \right\}, \quad (\text{B.44})
\end{aligned}$$

com $v = 2^{\frac{2}{3}} \alpha^2 \theta$. A grande questão agora é saber se a equação (B.44) acima reproduz, como casos limite, os resultados obtidos anteriormente sem o efeito de back reaction e para averiguar isso, fazemos $\sigma = 0$ de forma que sobra

$$\begin{aligned}
\Delta S|_{\sigma=0} = & 2^{\frac{1}{3}} \frac{\pi}{\alpha} \left[(M_+ - \omega)^{\frac{2}{3}} - M_+^{\frac{2}{3}} \right] + \frac{2^{\frac{4}{3}}}{\alpha^4 \theta} \sqrt{\frac{\pi}{\theta}} \left\{ \frac{v^3}{4} \sqrt{\frac{\pi}{v}} \left[\operatorname{erf} \left[\frac{(M_+ - \omega)^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{v}} \right] - \operatorname{erf} \left(\frac{M_+^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{v}} \right) \right] \right. \\
& \left. + \frac{v^2}{2} \left[M_+^{\frac{1}{3}} e^{-\frac{M_+^{\frac{2}{3}}}{v}} - (M_+ - \omega)^{\frac{1}{3}} e^{-\frac{(M_+ - \omega)^{\frac{2}{3}}}{v}} \right] + \frac{v}{3} \left[M_+ e^{-\frac{M_+^{\frac{2}{3}}}{v}} - (M_+ - \omega) e^{-\frac{(M_+ - \omega)^{\frac{2}{3}}}{v}} \right] \right\}, \quad (\text{B.45})
\end{aligned}$$

lembrando que $v = 2^{\frac{2}{3}} \alpha^2 \theta$. Note que (B.45) se reduz ao caso comutativo da equação (4.105) se tomamos o limite $\frac{r_+}{\sqrt{\theta}} \rightarrow \infty$ que no caso acima pode ser entendido como $M_+ \gg v^{\frac{3}{2}}$, já que M_+ se relaciona com r_+ pela aproximação $M_+ \simeq r_+^3$ e v é linear com θ , o que leva a

$\left(\frac{r_+}{\sqrt{\theta}}\right)^3 \simeq \left(\frac{M_+}{\theta^{\frac{3}{2}}}\right)$ ou $M_+/v^{\frac{3}{2}}$, ou $M_+^{\frac{2}{3}}/v$, ou $M_+^{\frac{1}{3}}/\sqrt{v}$. Se tomamos esse limite, vemos que

$$\Delta S|_{M_+ \gg v^{\frac{3}{2}}; \sigma=0} = 2^{\frac{1}{3}} \frac{\pi}{\alpha} \left[(M_+ - \omega)^{\frac{2}{3}} - M_+^{\frac{2}{3}} \right] = \Delta S_+^{(c)}, \quad (\text{B.46})$$

porque a função erro de Gauss tende a 1 se seu argumento tende ao infinito e com isso os termos entre chaves em (B.45) zeram. Também é importante perceber que a equação (4.104) também é recuperada, pois quando fazemos $M_+ \gg v^{\frac{3}{2}}$, ou seus limites equivalentes, todos os termos que contêm a função erro não vão a zero, mas a função erro vai a tende a 1 nesse limite e os termos cancelam-se aos pares. Com essas considerações, vemos que obtemos todos os resultados anteriores se manipulamos a equação (B.44).

Mesmo com esse resultado precisamos confirmar que (B.45) é a expressão correta para a entropia no espaço-tempo não comutativo quando desconsideramos o efeito de back reaction. Para tanto, podemos usar a primeira lei da termodinâmica para calcular a entropia:

$$S_+ = \int \frac{dM_+}{T_H}$$

com T_H dada por meio da relação $\mathcal{K}/2\pi$ expressa em termos da massa M_+ na equação (B.14) com a condição $\sigma = 0$. Essas considerações nos mostram que

$$T_H(M_+) = \frac{\mathcal{K}(M_+)}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \frac{3\alpha}{2^{\frac{1}{3}}} M_+^{\frac{1}{3}} \left[1 - \frac{2M_+}{3\alpha^3 \theta \sqrt{\pi\theta}} e^{-\frac{M_+^{\frac{2}{3}}}{v}} \right], \quad (\text{B.47})$$

este resultado na relação da primeira lei fornece

$$\begin{aligned} \Delta S_+ &= 2^{\frac{1}{3}} \frac{2\pi}{3\alpha} \int_{M_+}^{(M'_+ - \omega)} \frac{1}{M_+^{\frac{1}{3}}} \left[1 - \frac{2M'_+}{3\alpha^3 \theta \sqrt{\pi\theta}} e^{-\frac{M_+^{\frac{2}{3}}}{v}} \right]^{-1} dM'_+ \\ &= \frac{2^{\frac{4}{3}}}{3} \frac{\pi}{\alpha} \int_{M_+}^{(M'_+ - \omega)} \frac{1}{M_+^{\frac{1}{3}}} \left[1 + \frac{2M'_+}{3\alpha^3 \theta \sqrt{\pi\theta}} e^{-\frac{M_+^{\frac{2}{3}}}{v}} + \dots \right] dM'_+ \\ &\approx \frac{2^{\frac{4}{3}}}{3} \frac{\pi}{\alpha} \int_{M_+}^{(M'_+ - \omega)} \frac{1}{M_+^{\frac{1}{3}}} \left[1 + \frac{2M'_+}{3\alpha^3 \theta \sqrt{\pi\theta}} e^{-\frac{M_+^{\frac{2}{3}}}{v}} \right] dM'_+ \\ &= \frac{2^{\frac{4}{3}}}{3} \frac{\pi}{\alpha} \left[\int_{M_+}^{(M'_+ - \omega)} \frac{1}{M_+^{\frac{1}{3}}} dM'_+ + \frac{2}{3\alpha^3 \theta \sqrt{\pi\theta}} \int_{M_+}^{(M'_+ - \omega)} M_+^{\frac{2}{3}} e^{-\frac{M_+^{\frac{2}{3}}}{v}} dM'_+ \right] \\ &= \frac{2^{\frac{4}{3}}}{3} \frac{\pi}{\alpha} \left[\frac{3}{2} M_+^{\frac{2}{3}} \Big|_{M_+}^{M_+ - \omega} + \frac{2}{3\alpha^3 \theta \sqrt{\pi\theta}} \int_{M_+}^{(M'_+ - \omega)} M_+^{\frac{2}{3}} e^{-\frac{M_+^{\frac{2}{3}}}{v}} dM'_+ \right]. \quad (\text{B.48}) \end{aligned}$$

Mais uma vez nosso trabalho é resolver a integral. Neste caso, a integral anterior deverá ter o resultado já conhecido de (B.45) e para resolvê-la começamos com a substituição

$$\begin{cases} x = M'_+{}^{\frac{1}{3}} \\ dx = \frac{1}{3M'_+{}^{\frac{2}{3}}} dM'_+ \end{cases} \quad \begin{cases} M'_+{}^{\frac{4}{3}} = x^4 \\ M'_+{}^{\frac{2}{3}} = x^2 \end{cases}$$

denotando a integral por A , teremos

$$A = \int M'_+{}^{\frac{2}{3}} e^{-\frac{M'_+{}^{\frac{2}{3}}}{v}} dM'_+ = 3 \int x^4 e^{-\frac{x^2}{v}}, \quad (\text{B.49})$$

e integrando por partes

$$\begin{cases} f = x^3 & df = 3x^2 dx \\ dg = x e^{-\frac{x^2}{v}} dx & g = -\frac{v e^{-\frac{x^2}{v}}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} A &= -\frac{v}{2} x^3 e^{-\frac{x^2}{v}} - \int -\frac{3}{2} v x^2 e^{-\frac{x^2}{v}} dx \\ &= -\frac{v}{2} x^3 e^{-\frac{x^2}{v}} + \underbrace{\frac{3v}{2} \int x^2 e^{-\frac{x^2}{v}} dx}_V. \end{aligned} \quad (\text{B.50})$$

Utilizando mais uma vez a integração por partes,

$$\begin{cases} f = x & df = dx \\ dg = x e^{-\frac{x^2}{v}} dx & g = -\frac{v e^{-\frac{x^2}{v}}}{2} \end{cases}$$

teremos que a integral V se torna

$$\begin{aligned} V &= -\frac{v}{2} x e^{-\frac{x^2}{v}} - \int -\frac{v}{2} e^{-\frac{x^2}{v}} dx \\ &= -\frac{v}{2} x e^{-\frac{x^2}{v}} + \frac{v}{2} \int e^{-\frac{x^2}{v}} dx, \end{aligned}$$

fazendo agora $u = \frac{x}{\sqrt{v}} \Rightarrow du = \frac{dx}{\sqrt{v}}$, encontramos

$$\begin{aligned} V &= -\frac{v}{2} x e^{-\frac{x^2}{v}} + \frac{v\sqrt{v}}{2} \int e^{-u^2} du \\ &= -\frac{v}{2} x e^{-\frac{x^2}{v}} + \frac{v\sqrt{v\pi}}{4} \int \frac{2e^{-u^2}}{\sqrt{\pi}} du \\ &= -\frac{v}{2} x e^{-\frac{x^2}{v}} + \frac{v\sqrt{v\pi}}{4} \operatorname{erf}(u) \\ &= -\frac{v}{2} x e^{-\frac{x^2}{v}} + \frac{v\sqrt{v\pi}}{4} \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{v}}\right). \end{aligned} \quad (\text{B.51})$$

Logo, A fica

$$\begin{aligned} A &= -\frac{v}{2}x^3e^{-\frac{x^2}{v}} + \frac{3v}{2} \left[-\frac{v}{2}xe^{-\frac{x^2}{v}} + \frac{v\sqrt{v\pi}}{4} \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{v}}\right) \right] \\ &= -\frac{3v^2}{4}xe^{-\frac{x^2}{v}} + \frac{3v^2\sqrt{v\pi}}{8} \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{v}}\right) - \frac{v}{2}x^3e^{-\frac{x^2}{v}} \end{aligned} \quad (\text{B.52})$$

e substituindo isso em (B.49), obtemos

$$A = \frac{9v^2\sqrt{v\pi}}{8} \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{v}}\right) - \frac{9v^2}{4}xe^{-\frac{x^2}{v}} - \frac{3v}{2}x^3e^{-\frac{x^2}{v}}. \quad (\text{B.53})$$

Este é o ingrediente que faltava para a relação (B.48). Logo,

$$\begin{aligned} \Delta S_+ &= 2^{\frac{1}{3}} \frac{\pi}{\alpha} \left[(M_+ - \omega)^{\frac{2}{3}} - M_+^{\frac{2}{3}} \right] + \frac{\pi}{\alpha} \frac{2 \cdot 2^{\frac{4}{3}}}{9\alpha^3\theta\sqrt{\pi\theta}} \left[\frac{9v^2\sqrt{v\pi}}{8} \operatorname{erf}\left(\frac{M_+^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{v}}\right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{9v^2}{4}M_+^{\frac{1}{3}}e^{-\frac{M_+^{\frac{2}{3}}}{v}} - \frac{3v}{2}M_+^{\frac{2}{3}}e^{-\frac{M_+^{\frac{2}{3}}}{v}} \right] \Big|_{M_+}^{(M_+ - \omega)} \end{aligned}$$

que nos leva finalmente a

$$\begin{aligned} \Delta S_+ &= 2^{\frac{1}{3}} \frac{\pi}{\alpha} \left[(M_+ - \omega)^{\frac{2}{3}} - M_+^{\frac{2}{3}} \right] + \frac{2^{\frac{4}{3}}}{\alpha^4\theta} \sqrt{\frac{\pi}{\theta}} \left\{ \frac{v^3}{4} \sqrt{\frac{\pi}{v}} \left[\operatorname{erf}\left[\frac{(M_+ - \omega)^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{v}}\right] - \operatorname{erf}\left(\frac{M_+^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{v}}\right) \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{v^2}{2} \left[M_+^{\frac{1}{3}}e^{-\frac{M_+^{\frac{2}{3}}}{v}} - (M_+ - \omega)^{\frac{1}{3}}e^{-\frac{(M_+ - \omega)^{\frac{2}{3}}}{v}} \right] + \frac{v}{3} \left[M_+e^{-\frac{M_+^{\frac{2}{3}}}{v}} - (M_+ - \omega)e^{-\frac{(M_+ - \omega)^{\frac{2}{3}}}{v}} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{B.54})$$

que confirma (B.45).

Para resumir, temos a entropia na presença de back reaction dada em (B.44), os casos limite sem back reaction: no espaço-tempo não-comutativo em (B.45) e no espaço-tempo comutativo em (B.46); e o limite do comutativo na presença de back reaction em (4.104). Com essas considerações, vemos que recuperamos todos os resultados anteriores se manipulamos a equação (B.44), como esperávamos que acontecesse.

Referências Bibliográficas

- [1] Diego Trancanelli. Grandezas físicas e análise dimensional: da mecânica à gravidade quântica. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 38, 00 2016. (document), 2.2.1
- [2] Benjamin P Abbott, Richard Abbott, TD Abbott, F Acernese, K Ackley, C Adams, T Adams, P Addesso, Rana X Adhikari, VB Adya, et al. Gw170814: a three-detector observation of gravitational waves from a binary black hole coalescence. *Physical review letters*, 119(14):141101, 2017. 1
- [3] Kazunori Akiyama, Antxon Alberdi, Walter Alef, Keiichi Asada, Rebecca Azulay, Anne-Kathrin Baczko, David Ball, Mislav Baloković, John Barrett, Dan Bintley, et al. First m87 event horizon telescope results. iv. imaging the central supermassive black hole. *The Astrophysical Journal Letters*, 875(1):L4, 2019. 1
- [4] A. M. Ghez, S. Salim, N. N. Weinberg, J. R. Lu, T. Do, J. K. Dunn, K. Matthews, M. R. Morris, S. Yelda, E. E. Becklin, T. Kremenek, M. Milosavljevic, and J. Naiman. Measuring distance and properties of the milky way’s central supermassive black hole with stellar orbits. *The Astrophysical Journal*, 689(2):1044–1062, dec 2008. 1
- [5] S W Hawking. Particle creation by black holes. *Communications in mathematical physics*, 43(3):199–220, 1975. 1, 2.2.1
- [6] Máximo Bañados, Claudio Teitelboim, and Jorge Zanelli. Black hole in three-dimensional spacetime. *Physical Review Letters*, 69(13):1849–1851, Sep 1992. 1, 2.2.1, 2.2.1
- [7] James M Bardeen, Brandon Carter, and Stephen W Hawking. The four laws of black hole mechanics. *Communications in mathematical physics*, 31(2):161–170, 1973. 1
- [8] Piero Nicolini. Noncommutative black holes, the final appeal to quantum gravity: a review. *International Journal of Modern Physics A*, 24(07):1229–1308, 2009. 1, 3.2, 4.1.1
- [9] José P S Lemos. Three dimensional black holes and cylindrical general relativity. *Physics Letters B*, 353(1):46–51, 1995. 1, 4.1.1, 4.1.1
- [10] Jose PS Lemos and Vilson T Zanchin. Rotating charged black strings and three-dimensional black holes. *Physical Review D*, 54(6):3840, 1996. 1, 4.1.1, 4.1.1
- [11] José PS Lemos and Vilson T Zanchin. Three-dimensional btz black hole as a cylindrical system in four-dimensional general relativity. *Physical Review D*, 53(8):4684, 1996. 1, 4.1.1

- [12] Sean M Carroll. *Spacetime and geometry*. Cambridge University Press, 2019. 2.1.1, 2.1.1, 2.1.1, 2.1.1, 2.1.2, 2.2.1, 2.2.1, 2.2.2
- [13] Mateus Reinke Pelicer. Cálculo tensorial e relatividade geral. 2016. 2.1.1, 2.1.1
- [14] Steven Weinberg. *Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity*, volume 1. Wiley New York, 1972. 2.1.1
- [15] Jeremiah P Ostriker and Paul J Steinhardt. The observational case for a low-density universe with a non-zero cosmological constant. *Nature*, 377(6550):600–602, 1995. 2.1.1
- [16] Marina von Steinkirch. Uma análise sobre a constante cosmológica. 2.1.1
- [17] RR Machado and AC Tort. Michell, laplace e as estrelas negras: uma abordagem para professores do ensino médio. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 38(2), 2016. 2.1.2
- [18] CH Coimbra-Araújo. Diagramas de carter-penrose em relatividade geral: buracos negros e outros exemplos explícitos. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 38(3), 2016. 2.1.2, 2.1.2
- [19] Alberto Saa. Cem anos de buracos negros: o centenário da solução de schwarzschild. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 38(4), 2016. 2.1.2
- [20] Martin D Kruskal. Maximal extension of schwarzschild metric. *Physical review*, 119(5):1743, 1960. 2.1.2
- [21] György Szekeres. On the singularities of a riemannian manifold. *Publicationes Mathematicae Debrecen* 7, 7:285, 1960. 2.1.2
- [22] Jacob D Bekenstein. Black holes and entropy. *Physical Review D*, 7(8):2333, 1973. 2.1.3
- [23] N S M D Santi. Termodinâmica de buracos negros de schwarzschild. Master's thesis, 2018. 2.1.3, 2.2.1, 5.3, 2
- [24] Maulik K Parikh and Frank Wilczek. Hawking radiation as tunneling. *Physical Review Letters*, 85(24):5042, 2000. 2.2.1, 2.2.1
- [25] K Srinivasan and T Padmanabhan. Particle production and complex path analysis. *Physical Review D*, 60(2):024007, 1999. 2.2.1, 3, 2.2.1
- [26] H Gohar and K Saifullah. Emission of scalar particles from cylindrical black holes. *Astrophysics and Space Science*, 343(1):181–185, 2013. 2.2.1, 2.2.1, 2.2.1, 2.2.1
- [27] H Gohar and K Saifullah. Quantum tunneling from scalar fields in rotating black strings. *Astroparticle Physics*, 48:82–85, 2013. 2.2.1, 2.2.1, 2.2.1
- [28] CAS Silva and FA Brito. Quantum tunneling radiation from self-dual black holes. *Physics Letters B*, 725(4-5):456–462, 2013. 2.2.1

- [29] K Srinivasan and T Padmanabhan. Particle production and complex path analysis. *Physical Review D*, 60(2):024007, 1999. 2.2.1
- [30] Tom Lancaster and Stephen J Blundell. *Quantum field theory for the gifted amateur*. OUP Oxford, 2014. 2
- [31] Nicholas David Birrell, Nicholas David Birrell, and PCW Davies. *Quantum fields in curved space*. Number 7. Cambridge university press, 1984. 2
- [32] Leonard Parker and David Toms. *Quantum field theory in curved spacetime: quantized fields and gravity*. Cambridge university press, 2009. 2.2.1
- [33] Eugene Butkov. *Física matemática*. Livros Técnicos e Científicos, 1988. 2.2.1, 2.2.1
- [34] Larry H Ford. D3: Quantum field theory in curved spacetime. In *General Relativity and Gravitation*, pages 490–493. World Scientific, 2002. 2.2.2
- [35] Robert M Wald. *General relativity*. University of Chicago Press (Chicago, 1984), 2007. 2.2.2, 2.2.2
- [36] CO Lousto and N Sanchez. Back reaction effects in black hole spacetimes. *Physics Letters B*, 212(4):411–414, 1988. 2.2.2
- [37] Rabin Banerjee, Bibhas Ranjan Majhi, and Saurav Samanta. Noncommutative black hole thermodynamics. *Physical Review D*, 77(12):124035, 2008. 2.2.2, 2.2.2, 4.1.1, 4.2, 4.2.1, 4.2.1
- [38] Dmitri V Fursaev. Temperature and entropy of a quantum black hole and conformal anomaly. *Physical Review D*, 51(10):R5352, 1995. 2.2.2
- [39] Arlene Cristina Aguilar. Diagramas de feynman: O poder de uma imagem. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 40(4), 2018. 2.2.2
- [40] Hartland S Snyder. Quantized space-time. *Physical Review*, 71(1):38, 1947. 3.1
- [41] Sergio Doplicher, Klaus Fredenhagen, and John E Roberts. The quantum structure of spacetime at the planck scale and quantum fields. *Communications in Mathematical Physics*, 172(1):187–220, 1995. 3.1, 3.3
- [42] Daniel Guimaraes Tedesco. Um estudo sobre a teoria de campos no espaço-tempo nao comutativo. 3.1, 3.3, 3.3, 3.3
- [43] Richard J Szabo. Quantum field theory on noncommutative spaces. *Physics Reports*, 378(4):207–299, 2003. 3.1, 3.3, 3.3, 3.3
- [44] Sean M Carroll, Jeffrey A Harvey, V Alan Kostelecký, Charles D Lane, and Takemi Okamoto. Noncommutative field theory and lorentz violation. *Physical Review Letters*, 87(14):141601, 2001. 3.1, 4

- [45] Piero Nicolini, Anais Smailagic, and Euro Spallucci. Noncommutative geometry inspired schwarzschild black hole. *Physics Letters B*, 632(4):547–551, 2006. 3.2, 3.2
- [46] Masud Chaichian, A Demichev, P Prešnajder, and A Tureanu. Space-time noncommutativity, discreteness of time and unitarity. *The European Physical Journal C-Particles and Fields*, 20(4):767–772, 2001. 3.3, 3.3
- [47] Ian Hinchliffe, N Kersting, and YL Ma. Review of the phenomenology of noncommutative geometry. *International Journal of Modern Physics A*, 19(02):179–204, 2004. 3.3, 3.3, 3.3, 3.3
- [48] Tr A Osborn, Molzahn, and FH. Moyal quantum mechanics: the semiclassical heisenberg dynamics. *Annals of Physics*, 241(1):79–127, 1995. 3.3
- [49] Hermann Weyl. *The theory of groups and quantum mechanics*. Courier Corporation, 1950. 3.3
- [50] Ronni Geraldo Gomes de Amorim, Marco César Barbosa Fernandes, Allyson Rivelli de Queiroz, Ademir Eugênio Santana, and JDM Viana. Wigner function at 80 years and the origins of noncommutative geometry. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 35(3):1–14, 2013. 3.3
- [51] Hilbrand Johannes Groenewold. On the principles of elementary quantum mechanics. In *On the Principles of Elementary Quantum Mechanics*, pages 1–56. Springer, 1946. 3.3
- [52] Gabrielle Magro. Noncommuting coordinates in the landau problem. *arXiv preprint quant-ph/0302001*, 2003. 3.3, 3.3
- [53] Nathan Seiberg and Edward Witten. String theory and noncommutative geometry. *Journal of High Energy Physics*, 1999(09):032, 1999. 3.3
- [54] Jun-ichi Kamoshita. Probing noncommutative space-time in the laboratory frame. *The European Physical Journal C*, 52(2):451–457, 2007. 3.3
- [55] Jun John Sakurai and Eugene D Commins. *Modern quantum mechanics*, revised edition, 1995. 5
- [56] M Chaichian, M M Sheikh-Jabbari, and A Tureanu. Hydrogen atom spectrum and the lamb shift in noncommutative qed. *Physical Review Letters*, 86(13):2716, 2001. 3.3
- [57] M Chaichian, M M Sheikh-Jabbari, and A Tureanu. Comments on the hydrogen atom spectrum in the noncommutative space. *arXiv preprint hep-th/0212259*, 2002. 3.3
- [58] M Haghghat and F Loran. Helium atom spectrum in non-commutative space. Technical report, 2002. 3.3
- [59] H Falomir, J Gamboa, M Loewe, F Mendez, and JC Rojas. Testing spatial noncommutativity via the aharonov-bohm effect. *Physical Review D*, 66(4):045018, 2002. 3.3

- [60] Z Guralnik, R Jackiw, SY Pi, and AP Polychronakos. Testing non-commutative qed, constructing non-commutative mhd. *Physics Letters B*, 517(3-4):450–456, 2001. 3.3
- [61] J Preskill, P Schwarz, A Shapere, S Trivedi, and F Wilczek. Limitations on the statistical description of black holes. *Modern Physics Letters A*, 6(26):2353–2361. 4.1.1
- [62] Andrew Strominger. Black hole statistics. *Phys. Rev. Lett.*, 71:3397–3400, Nov 1993. 4.1.1
- [63] Kip S Thorne. Magic without magic: John archibald wheeler. *Freeman, San Francisco*, 1972. 4.1.1
- [64] J Brown and J W York Jr. Quasilocal energy and conserved charges derived from the gravitational action. *Physical Review D*, 47(4):1407. 4.1.1
- [65] Dharm Veer Singh, Md Sabir Ali, and Sushant G Ghosh. Noncommutative geometry inspired rotating black string. *International Journal of Modern Physics D*, 27(12):1850108, 2018. 4.1.1, 4.1.1, 4.1.2, 4.1.2, 4.1.2
- [66] Aeeman Fatima and Khalid Saifullah. Thermodynamics of charged and rotating black strings. *Astrophysics and Space Science*, 341(2):437–443, 2012. 4.1.2
- [67] Rong-Gen Cai and Yuan-Zhong Zhang. Black plane solutions in four-dimensional spacetimes. *Physical Review D*, 54(8):4891, 1996. 4.1.2
- [68] Wontae Kim, Edwin J Son, and Myungseok Yoon. Thermodynamic similarity between the noncommutative schwarzschild black hole and the reissner-nordström black hole. *Journal of High Energy Physics*, 2008(04):042, 2008. 4.1.2, 4.1.2
- [69] J David Brown, J Creighton, and Robert B Mann. Temperature, energy, and heat capacity of asymptotically anti-de sitter black holes. *Physical Review D*, 50(10):6394, 1994. 4.1.2
- [70] Mário José de Oliveira. *Termodinâmica*. Editora Livraria da Física, 2005. 4.1.2
- [71] GJO Jameson. The incomplete gamma functions. *The Mathematical Gazette*, 100(548):298–306, 2016. A.1
- [72] Milton Abramowitz and Irene A Stegun. Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical table. In *US Department of Commerce*. National Bureau of Standards Applied Mathematics series 55, 1965.
- [73] Walter Greiner, Ludwig Neise, and Horst Stöcker. *Thermodynamics and statistical mechanics*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [74] S Schweber. *QED and the Men who Made it: Dyson, Feynman, Schwinger, and Tomonaga*, Princeton U. Press, Princeton, 1994.
- [75] Joao Chakrian and Antonio de Padua Santos. Black string thermodynamics in noncommutative spacetime: Anomaly and phase transition, 2020.