



Universidade Federal Rural de Pernambuco
Pró-reitoria de Pesquisa e Pós-graduação
Departamento de Física

Programa de Pós-graduação em Física Aplicada

**Hipertransporte e superdifusão em
caminhadas quânticas de duas partículas
não interagentes com desordem dinâmica**

Larissa Faneco Gonçalves

Dissertação de Mestrado

Recife - PE
25/02/2025

Universidade Federal Rural de Pernambuco
Pró-reitoria de Pesquisa e Pós-graduação
Departamento de Física

Larissa Faneco Gonçalves

Hipertransporte e superdifusão em caminhadas quânticas de duas partículas não interagentes com desordem dinâmica

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-graduação em Física Aplicada do Departamento de Física da Universidade Federal Rural de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Física Aplicada.

Orientador: Prof. Dr. José Ferraz de Moura Nunes Filho

Recife - PE
25/02/2025

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Sistema Integrado de Bibliotecas da UFRPE
Bibliotecário(a): Suely Manzi – CRB-4 809

G635& Gonçalves, Larissa Faneco.

Hipertransporte e superdifusão em caminhadas quânticas de duas partículas não interagentes com desordem dinâmica / Larissa Faneco Gonçalves. - Recife, 2025.

69 f.; il.

Orientador(a): José Ferraz de Moura Nunes Filho.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Programa de Pós-Graduação em Física Aplicada, Recife, BR-PE, 2025.

Inclui referências e apêndice(s).

1. Física quântica. 2. Teorias não-lineares. 3. Algoritmos computacionais. 4. Física - Estudo e ensino 5. Computação quântica. I. Nunes Filho, José Ferraz de Moura, orient. II. Título

CDD 621

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA APLICADA

Hipertransporte e superdifusão em caminhadas quânticas de duas partículas não interagentes com desordem dinâmica

Larissa Faneco Gonçalves

Dissertação julgada adequada para obtenção do título de mestre em Física, defendida e aprovada por unanimidade em 25/02/2025 pela Comissão Examinadora.

Orientador:

Prof. Dr. José Ferraz de Moura Nunes Filho
DF - UFRPE

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Pedro Hugo de Figueirêdo
DF - UFRPE

Profa. Dra. Nadja Kolb Bernardes
DF - UFPE

“Existe um certo milagre nos encontros.”

- Carla Madeira, Tudo é rio.

Dedico à comunidade que sempre me motivou durante essa jornada: Ultrafamily.

Agradecimentos

A conclusão desta dissertação representa não apenas o encerramento de um ciclo acadêmico, mas também a materialização de um esforço coletivo e do apoio inestimável de diversas pessoas.

Primeiramente, agradeço a Deus, pois sem Ele, nem aqui eu estaria.

Expresso minha profunda gratidão à minha mãe, Andreza, que sempre foi meu porto seguro, minha referência de ser humano, a mulher que me fez ser quem sou hoje, que sempre esteve ao meu lado e sempre fez de tudo para cuidar de mim e da minha irmã.

Gostaria de agradecer à minha melhor amiga: Gabriela Faneco, minha caçulinha, que sempre esteve lá por mim, me dando apoio, arrancando risadas em momentos difíceis, sendo minha parceira em tudo, deixando a vida mais colorida.

Agradeço imensamente ao meu melhor amigo e noivo, Luan de Moraes, por guiar os meus passos quando pensei estar perdida, por me ensinar eletromagnetismo no meu primeiro período do mestrado, por sempre me motivar e por nunca soltar minha mão.

Também sou extremamente grata ao meu pai, Flavio, que mesmo longe, sempre tentava se fazer presente e em todas as situações de fragilidade se mostrou forte, independente das circunstâncias, obrigada por todos os sacrifícios que já fez por mim.

Agradeço sinceramente aos meus familiares, especialmente às minhas avós, pelo apoio incondicional e por me inspirarem a persistir mesmo diante dos desafios.

Também gostaria de agradecer aos meus amigos, tanto os que conheci na graduação e no mestrado, cujas discussões e colaborações enriqueceram minha trajetória, quanto aos que fiz na vida, não irei citar todos os nomes para economizar espaço, mas saiba que cada um de vocês foram essenciais durante minha trajetória. Em especial, agradeço à minha *gymbestie*, Dudinha, por tornar a vida mais leve, agradeço a Wagner, por ser meu parceiro de viagem e por ouvir meus desabafos durante a pesquisa e disciplinas, agradeço à Teteh por todos os momentos vividos e à Nata dos Misterys, por me mostrar que a vida nem sempre precisa ser tão séria.

Agradeço ao meu orientador, José Ferraz, por sua orientação, paciência e incentivo durante todas as etapas deste trabalho.

Agradeço aos professores do CEGEN, especialmente a Pedro Hugo, por me ensinar que "a vida é assim", por fazer eu me divertir durante as aulas da graduação e por todas discussões e contribuições enriquecedoras durante minha pesquisa. Agradeço à professora Viviane, que me mostrou o lado bom da Física Estatística. Também agradeço a Ailton, Raúl, Ramón e Thamires por toda a contribuição na minha formação.

Aqui, gostaria de agradecer à duas pessoas, totalmente diferentes, mas que possuem o mesmo nome: Natalia e Natália. Agradeço à Natalia, minha primeira e única orientadora de iniciação científica, obrigada pelos ensinamentos, por me ensinar a amadurecer e por me

inspirar em todos os momentos. À Natália, minha psicóloga, muito obrigada por facilitar o processo, obrigada por me ensinar a lidar comigo mesma.

Agradeço aos meus *Ultramores*, que sempre me incentivaram e torceram por mim.

Aos membros da banca examinadora por aceitar julgar este trabalho.

Por fim, agradeço à Universidade Federal Rural de Pernambuco, Ruralinda para os íntimos, que me abraçou desde a graduação, ao Programa de Pós Graduação em Física Aplicada - PPGFA por todo suporte burocrático e à Fundação Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES pelo suporte financeiro

A todos, meu sincero muito obrigada.

Resumo

Neste trabalho, investigamos teoricamente as caminhadas quânticas (CQ) unidimensionais, considerando sistemas com uma partícula e sistemas com duas partículas. Para o caso de duas partículas, conseguimos implementar estados emaranhados no contexto da CQ. Além disso, utilizando o emaranhamento inicial, foi possível manipular a simetria da função de onda para simular CQs bosônicas, fermiônicas e anyônicas.

Também examinamos as propriedades de transporte das CQs na presença da desordem dinâmica. Nossos resultados mostraram que, ao variar apenas um parâmetro, a intensidade da desordem, todas as regiões associadas à superdifusão foram acessadas, desde o espalhamento balístico, típico de estados quânticos, até a dispersão linear, característica de sistemas clássicos. Em particular, para a CQ fermiônica, identificamos a presença de um regime de hiper-transporte em uma região específica da intensidade da desordem.

Para compreender melhor o impacto da desordem dinâmica nos regimes de propagação, modificamos a distribuição de probabilidade associada à desordem dinâmica, utilizando distribuições Laplaciana, Cauchy-Lorentz e Uniforme, além da Gaussiana. De forma geral, os resultados foram similares: todas as regiões de superdifusão puderam ser acessadas com uma escolha adequada do parâmetro de controle.

Palavras-chave: Caminhadas Quânticas, Hipertransporte, Difusão Anômala.

Abstract

In this work, we theoretically investigated one-dimensional quantum walks (QWs), considering both single-particle and two-particle systems. For the two-particle case, we successfully implemented entangled states within the QW framework. Furthermore, by utilizing the initial entanglement, it was possible to manipulate the symmetry of the wave function to simulate bosonic, fermionic, and anyonic QWs.

We also examined the transport properties of QWs in the presence of dynamic disorder. Our results showed that by varying only one parameter, the disorder intensity, all regions associated with superdiffusion were accessed, ranging from ballistic spreading, typical of quantum states, to linear dispersion, characteristic of classical systems. In particular, for the fermionic QW, we identified the presence of a hyper-transport regime in a specific region of the disorder intensity.

To better understand the impact of dynamic disorder on propagation regimes, we modified the probability distribution associated with the dynamic disorder, using Laplacian, Cauchy-Lorentz, and Uniform distributions, in addition to the Gaussian distribution. Overall, the results were similar: all superdiffusion regions could be accessed with an appropriate choice of the control parameter.

Keywords: Quantum Walks, Hyper-transport, Anomalous Diffusion.

Sumário

1	Introdução	1
2	Caminhadas aleatórias	5
2.1	Caminhadas aleatórias clássicas	6
2.2	Caminhadas quânticas	7
3	Teoria das caminhadas quânticas	9
3.1	Formalismo matemático	9
3.2	Moeda de Hadamard	11
3.3	Caminhada quântica de duas partículas	14
3.3.1	Um olhar geral	14
3.3.2	Caminhadas quânticas bosônica, fermiônica e anyônica	14
4	Metodologia	17
4.1	Descrição do modelo	17
4.2	Caminhadas quânticas desordenadas	23
4.2.1	Desordem dinâmica	23
4.3	Difusão anômala	24
4.4	Geração de fases aleatórias com distribuições truncadas	25
5	Resultados	29
5.1	Distribuição de probabilidade	29
5.2	Regimes de propagação	31
5.3	Hipertransporte em caminhadas quânticas fermiônicas	33
5.4	Distribuição de cauda pesada	34
6	Conclusões e perspectivas	37
A	Divisores de feixe e a moeda de Hadamard	39
A.1	Divisor de Feixe 50:50	39
A.2	Moeda de Hadamard nas Caminhadas Quânticas	40
A.3	Analogias e Interferência	40
B	Cálculo das probabilidades	41
C	Códigos em Python	45

Lista de Figuras

- 1.1 Distribuição de probabilidade de uma CAC (em azul) e da distribuição de probabilidade de uma CQ (em vermelho) após 100 passos. 1
- 2.1 Dentro das Caminhadas Aleatórias, temos as Caminhadas Quânticas e as Caminhadas Aleatórias Clássicas. 5
- 2.2 Representação de uma caminhada aleatória clássica unidimensional de 6 passos com as posições variando de -6 até $+6$. A Figura mostra, em azul, uma das possíveis trajetórias do caminhante. 6
- 2.3 Representação de uma caminhada quântica unidimensional de 6 passos com as posições variando de -6 até $+6$. A Figura mostra, em vermelho, que o caminhante percorre todas as trajetórias. 8
- 3.1 Distribuição de probabilidade de uma CQ cujo estado inicial é $|\Psi(0)\rangle = |0, +\rangle$ e $t = 100$. 12
- 3.2 Distribuição de probabilidade de uma CQ cujo estado inicial é $|\Psi(0)\rangle = |0, -\rangle$ e $t = 100$. 13
- 4.1 Esquema conceitual de uma rede em cascata de BS 50:50 utilizada para implementar uma CQ discreta unidimensional. A desordem temporal é introduzida por moduladores de fase colocados em cada porta de saída do BS, representados pelas esferas coloridas, antes de entrar no próximo. O tempo é mapeado no número de passos da caminhada, deste modo, temos uma CQ discreta. 18
- 4.2 Esquema de uma CQ discreta unidimensional. Cada sítio é representado por um BS (quadrados abertos azuis): um fóton que incide em um BS simétrico possui a mesma probabilidade de emergir por qualquer um de seus dois canais de saída. Essa propriedade possibilita que o BS seja empregado tanto como operador moeda quanto como operador passo da CQ. Ao dispor múltiplos divisores de feixe em uma configuração em cascata, torna-se viável simular um circuito de CQ com t passos, em que cada linha de divisores corresponde a um passo temporal na evolução do sistema. [Fonte: [46]] 19
- 4.3 Representação esquemática para uma partícula dos espaços do caminhante (BSs) e das posições físicas (modos de saída), aqui temos dois BSs da Figura 4.1 vista de cima. 20

- 4.4 Distribuição de probabilidade no espaço das posições físicas para uma partícula que inicia a CQ em um estado de superposição (polarização H e V), evidenciando a interferência quântica e a propagação simultânea dos diferentes modos de polarização ao longo da rede. 21
- 4.5 Representação da distribuição gaussiana que será truncada no intervalo $[-\pi, \pi]$, onde δ representa a intensidade da desordem, que coincide com o desvio padrão da distribuição. 25
- 4.6 Relação do parâmetro de escala (eixo x) com o desvio padrão (eixo y) de cada distribuição, note que eles saturam no mesmo valor ($\pi/\sqrt{3}$). 26
- 5.1 Mapas da densidade de probabilidade para diferentes caminhadas quânticas, em que (a) e (e) são partículas bosônicas; (b) e (f) anyônicas; (c) e (g) fermiônicas; e (d) e (h) apenas uma partícula. Os mapas foram calculados após $t = 100$ passos e são uma média de 100 configurações diferentes de uma distribuição de probabilidade desordenada, na primeira coluna temos uma CQ ordenada, enquanto na segunda, usamos a distribuição Gaussiana truncada para gerar os números aleatórios da fase, considerando uma desordem dinâmica com intensidade $\delta = \pi/2$ rad. Para as CQs de duas partículas, em $t = 0$, as partículas estão posicionadas em dois sítios vizinhos no centro da rede. No caso da CQ de uma única partícula, ela inicia em um estado de superposição. Os mapas representam a probabilidade de encontrar uma partícula na posição x e outra na posição y no último passo de cada caminhada quântica. Ajustando a intensidade da desordem, δ , é possível controlar a dispersão do(s) caminhante(s). 30
- 5.2 Dependência do expoente da variância da posição média (η) com a intensidade da desordem (δ) para uma distribuição de probabilidade de desordem Gaussiana, em uma caminhada quântica de 100 passos, com média calculada a partir de 100 diferentes configurações de desordem. No inset é possível observar os pontos utilizados para realizar a regressão linear, descartamos os pontos anteriores visando obter um resultado do sistema tendendo ao seu estado estacionário. 31
- 5.3 Expoente da variância da posição média (η) em função da intensidade da desordem (δ) para uma CQ bosônica com 100 passos e 100 realizações. Triângulos azuis, quadrados verdes e círculos vermelhos representam as distribuições de probabilidade de desordem Uniforme, Laplaciana e Gaussiana, respectivamente. 32
- 5.4 Expoente da variância da posição média (η) em função da intensidade da desordem (δ) para uma CQ anyônica com 100 passos e 100 realizações. Triângulos azuis, quadrados verdes e círculos vermelhos representam as distribuições de probabilidade de desordem Uniforme, Laplaciana e Gaussiana, respectivamente. 33

- 5.5 Expoente da variância (η) em função da intensidade da desordem (δ) para uma CQ fermiônica com 100 passos, com a média realizada sobre 100 diferentes configurações de desordem. Triângulos azuis, círculos vermelhos e quadrados verdes representam as distribuições de probabilidade de desordem uniformes, laplacianas e gaussianas, respectivamente. No detalhe, é exibido um zoom na região de hipertransporte. Um comportamento semelhante é observado para as três diferentes distribuições de desordem, com a presença de regiões de hipertransporte e superdifusão. 34
- 5.6 Expoente da variância (η) em função da intensidade da desordem (δ) para duas simulações, de uma CQ fermiônica, realizadas com uma distribuição de Cauchy-Lorentz. As barras de erro refletem a alta dispersão dos dados devido à natureza da distribuição de cauda pesada. 35
- 5.7 Dependência do logaritmo da curtose ($\ln(\kappa)$) em relação à intensidade da desordem (δ). As curvas azul, verde e vermelha correspondem, respectivamente, às distribuições de Cauchy-Lorentz, Laplaciana e Gaussiana. Para pequenas larguras de desordem, onde ocorre o hipertransporte, a curtose diverge para a distribuição de Cauchy-Lorentz, indicando a ausência do hipertransporte nesse caso. 36
- A.1 Ilustração esquemática de um cubo divisor de feixe, muito utilizado em experimentos de óptica. O raio 1 corresponde à luz incidente, o 2 está relacionada com a luz transmitida (que em um BS 50:50 é de 50%) e o 3 está relacionado com a luz refletida (que corresponde a 50% da luz incidente). 39
- C.1 QR code para acesso à simulação de uma CQ desordenada. 45

Introdução

As Caminhadas Quânticas (CQs), primeiramente introduzidas por Aharonov, Davidovich, e Zagury [1], emergiram como uma ferramenta poderosa no campo da computação quântica, oferecendo novas perspectivas surpreendentes tanto para o desenvolvimento revolucionário de algoritmos quânticos [2, 3] quanto para a simulação de sistemas físicos complexos [4, 5]. Ao contrário das caminhadas aleatórias clássicas (CACs), que estão limitadas pela natureza previsível da mecânica de corpos macroscópicos, nas CQs, o princípio da superposição quântica permite que o caminhante explore múltiplas trajetórias simultaneamente.

As CQs ocorrem em redes, onde os nós representam as possíveis posições do caminhante e as arestas definem as direções. A evolução dessas caminhadas segue dois modelos: tempo discreto e contínuo. No primeiro, o caminhante realiza saltos entre os nós a cada instante, com a dinâmica regida por um operador de evolução temporal. No caso do modelo de tempo contínuo, a transição entre os nós ocorre gradualmente, com a evolução no tempo sendo caracterizada pela exponenciação de um Hamiltoniano, \hat{H} , que é uma matriz Hermitiana [6–8].

A função distribuição de probabilidade (FDP) do caminhante quântico durante sua propagação é completamente diferente de seu análogo clássico. Em uma CQ, a partícula pode ocupar estados de superposição, o que gera efeitos de interferência que causam uma diferença drástica em relação ao caso clássico, tal diferença pode ser observada na Figura 1.1.

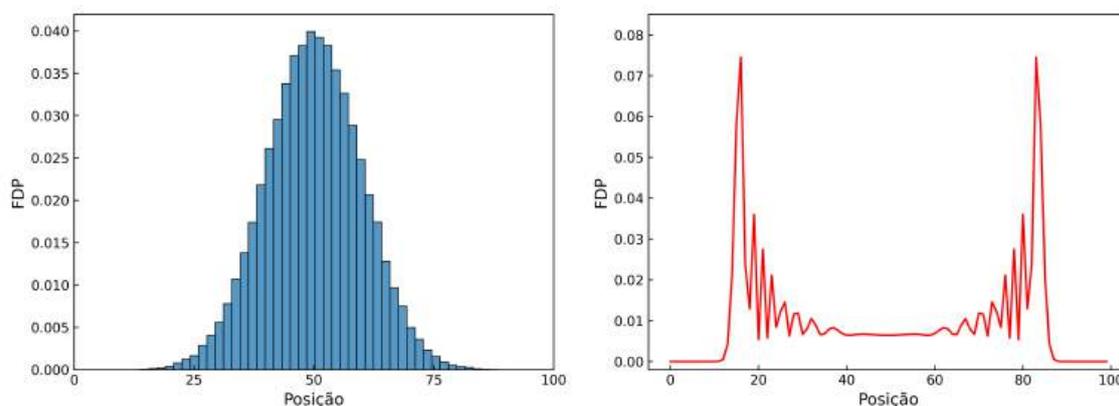


Figura 1.1: Distribuição de probabilidade de uma CAC (em azul) e da distribuição de probabilidade de uma CQ (em vermelho) após 100 passos.

Como resultado dessa distinção fundamental, a distribuição espacial da CQ, quantificada pela evolução do desvio padrão, se espalha de forma linear ao longo do tempo, com um comportamento balístico, em contraste com a difusão regular das CACs, onde o desvio padrão evolui com a raiz quadrada do tempo. Ao explorar as múltiplas trajetórias do caminhante quântico, permitidas pela superposição de estados, obtém-se um paralelismo computacional massivo que serve como base para muitas aplicações em diferentes áreas, como biologia [9–11] física [12–14], química [15, 16], oceanografia [17] e computação quântica [18–20].

Embora o estudo das CQs para uma única partícula já tenha revelado uma série de fenômenos, como a propagação balística, a extensão desse conceito para sistemas de várias partículas traz novas dinâmicas e desafios que ampliam o escopo de suas aplicações, tanto teóricas [21–23], quanto experimentais [24–26].

Nas CQs de várias partículas, a distribuição espacial e a evolução temporal do sistema podem ser drasticamente diferentes em comparação com o caso de uma única partícula, mesmo na ausência de interações diretas entre elas, isso ocorre devido à presença de correlações quânticas no estado inicial, que influenciam a evolução da função de onda. Dependendo da simetria do estado inicial, é possível modelar partículas que obedecem a diferentes estatísticas, incluindo as estatísticas bosônicas e fermiônicas, ou até mesmo estatísticas intermediárias, conhecidas como anyônicas.

Quando as partículas obedecem à estatística bosônica, elas podem ocupar o mesmo estado quântico, o que pode levar ao fenômeno de coalescência, onde as partículas tendem a se agrupar em certas regiões do espaço. Já no caso das partículas que seguem a estatística fermiônica, ou seja, obedecem ao princípio de exclusão de Pauli, duas partículas não podem ocupar o mesmo estado simultaneamente, resultando em distribuições espaciais mais dispersas. Esse comportamento é drasticamente diferente das caminhadas clássicas, onde tais efeitos de repulsão e coalescência não são observados.

Outro aspecto fundamental nas CQs, é o impacto da desordem no sistema, ela pode ser introduzida tanto no tempo quanto no espaço, permitindo modificar os regimes de propagação. Por exemplo, estudos teóricos [27] e experimentais [4, 28, 29] demonstram que é possível controlar a propagação de partículas desde um regime de difusão clássica até o transporte balístico característico dos sistemas quânticos e há o regime intermediário, chamado de superdifusivo, que surge quando a desordem leva a uma propagação mais rápida do que a difusão clássica, mas ainda abaixo da propagação balística.

Além disso, sob certas condições, foi possível observar regimes de subdifusão [5], onde a propagação das partículas ocorre de forma mais lenta que a difusão clássica. Esse fenômeno, conhecido como localização de Anderson, foi observado experimentalmente em CQs fotônicas [12], onde a desordem espacial impede que as partículas se espalhem livremente. Por outro lado, ao introduzir desordem temporal, é possível alcançar um novo regime de propagação conhecido como hipertransporte. Nesse caso, a largura da distribuição da posição das partículas cresce mais rapidamente do que o comportamento balístico tradicional [30].

A sequência desta dissertação está dividida em mais cinco capítulos, que serão brevemente apresentados nos seguintes parágrafos.

No capítulo 2 são apresentados os conceitos fundamentais necessários para compreender o problema abordado nesta dissertação, especificamente as CACs e as CQs. Esses modelos

são amplamente utilizados para descrever dinâmicas de transporte em sistemas físicos, químicos e biológicos, além de servirem como ferramentas matemáticas para o entendimento de fenômenos estocásticos e quânticos.

O capítulo 3, irá exibir o formalismo matemático necessário para a compreensão das CQs, inicialmente serão introduzidos os conceitos fundamentais que formam a base teórica do modelo, incluindo os espaços de Hilbert, estados quânticos e operadores que governam a dinâmica das partículas. Em seguida, será apresentada a teoria física subjacente às CQs, destacando suas diferenças em relação às caminhadas aleatórias clássicas e enfatizando as características intrínsecas da mecânica quântica, como superposição e interferência. Serão discutidas as implicações desses princípios no comportamento das partículas e na evolução de seus estados.

No capítulo 4 serão abordados os conceitos experimentais e conexões com a formulação teórica para implementar as CQs de uma e de duas partículas, com foco na propagação do caminhante quântico ao longo de uma linha unidimensional. Essa implementação é baseada em configurações experimentais que utilizam fótons não interagentes e uma rede de divisores de feixes (também chamados de *beam splitters*, BS) para simular a evolução temporal das CQs.

No capítulo 5, apresentamos os resultados obtidos para uma CQ unidimensional com 100 passos, realizados por meio de simulações computacionais utilizando a linguagem *Python*. Foram consideradas 100 realizações do sistema para garantir a robustez estatística dos resultados. Analisamos dois casos principais: (i) uma CQ com uma partícula, e (ii) uma CQ com duas partículas. Para o caso de duas partículas, foram implementadas três estatísticas distintas: bosônica, fermiônica e anyônica. Adicionalmente, introduzimos desordem dinâmica no sistema e analisamos o impacto dessa desordem na propagação das partículas, estudando o expoente da variância, introduzido no capítulo 4. Em particular, para a estatística fermiônica, encontramos um regime de hipertransporte.

Por fim, o capítulo 6 conclui a dissertação, apresentando um resumo dos principais resultados obtidos e as respectivas conclusões. Ressaltamos a relevância do estudo realizado, destacando as contribuições teóricas e os avanços alcançados. Por fim, discutimos perspectivas para trabalhos futuros que possam ampliar e aprofundar as descobertas do presente trabalho.

Caminhadas aleatórias

As CACs são descritas como um modelo matemático que aborda trajetórias formadas por passos sucessivos e aleatórios. Exemplos que ilustram este conceito incluem o trajeto errático de um animal em busca de alimento [31] ou o caminho irregular de uma pessoa após um bloco de carnaval [32]. Em tais casos, o tamanho do passo e a direção do deslocamento são determinados por variáveis aleatórias, caracterizando um processo estocástico. [33].

Essas caminhadas possuem inúmeras aplicações científicas, na Física, são utilizadas para descrever processos de difusão térmica e transporte de partículas [34], na Biologia, modelam dinâmicas de migração celular e dispersão de populações [35], em Economia, auxiliam na formulação de modelos estocásticos para flutuações dos mercados financeiros [36]. Essa abrangência de aplicações ilustra a versatilidade e relevância das caminhadas aleatórias como ferramenta analítica em diferentes áreas do conhecimento.

Por outro lado, as CQs emergem do contexto da mecânica quântica, incorporando propriedades como superposição e interferência. Essas características conferem às caminhadas quânticas comportamentos significativamente distintos dos modelos clássicos, especialmente em relação à propagação e à distribuição de probabilidade do caminhante [6]. Como consequência, as CQs têm ganhado atenção como potenciais ferramentas para algoritmos de computação quântica e simulações físicas avançadas [37].

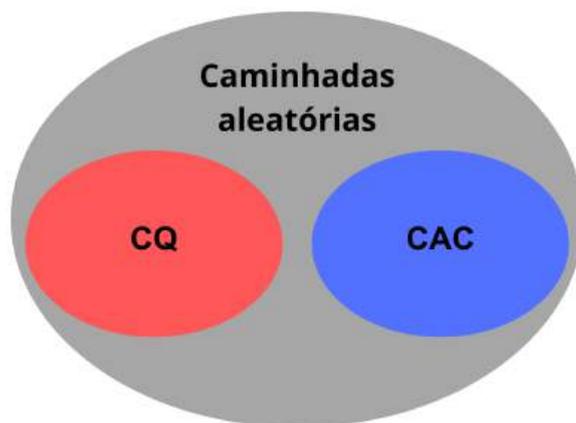


Figura 2.1: Dentro das Caminhadas Aleatórias, temos as Caminhadas Quânticas e as Caminhadas Aleatórias Clássicas.

No presente trabalho, abordaremos o formalismo matemático por trás das CACs e CQs, com foco em seus comportamentos dinâmicos e na propagação do(s) caminhante(s). Inicialmente, será introduzido o modelo de CAC unidimensional, com passos discretos e tamanho fixo. Posteriormente, expandiremos essa discussão para as CQs, evidenciando as diferenças fundamentais entre os dois tipos de dinâmica.

As seções seguintes deste capítulo irão detalhar os aspectos formais de cada modelo, enfatizando como as CQs se diferenciam em relação às CACs, especialmente na presença de desordem e correlações entre partículas. Essa análise será essencial para a compreensão dos resultados apresentados ao longo desta dissertação.

2.1 Caminhadas aleatórias clássicas

As caminhadas aleatórias clássicas são processos estocásticos amplamente utilizados para modelar sistemas dinâmicos em espaços discretos ou contínuos, em que um caminhante realiza movimentos baseados em probabilidades definidas. Em sua forma mais simples, o modelo considera uma partícula que se desloca em uma linha unidimensional, com cada passo determinado por um evento aleatório, como o lançamento de uma moeda. Esse mecanismo gera uma distribuição de probabilidade para a posição da partícula ao longo do tempo, permitindo descrever sua evolução estatística, como pode-se observar na Figura 2.2.

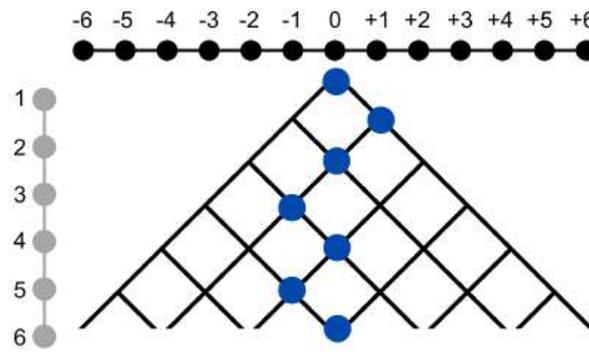


Figura 2.2: Representação de uma caminhada aleatória clássica unidimensional de 6 passos com as posições variando de -6 até $+6$. A Figura mostra, em azul, uma das possíveis trajetórias do caminhante.

Desde a concepção das CACs, esses modelos têm desempenhado um papel essencial no entendimento de processos aleatórios e suas propriedades estatísticas, servindo como base para teorias mais avançadas, como as CQs. A CAC é definida como um processo estocástico em que uma partícula (ou caminhante) realiza deslocamentos sucessivos em uma rede discreta ou contínua, escolhendo sua direção de movimento com base em probabilidades pré-definidas. [38]

A principal característica das caminhadas aleatórias é sua natureza estatística, que pode ser descrita por métricas como a posição média e a variância da posição [39]. Para caminhadas simétricas, temos que a posição média é dada por:

$$\langle x(t) \rangle = 0. \quad (2.1)$$

A CAC pode ser descrita matematicamente por meio da distribuição binomial, que modela a probabilidade de uma partícula se mover para a direita ou para a esquerda ao longo de uma

sequência de n passos discretos. Em cada passo, a partícula tem uma probabilidade p de se deslocar para a direita (+1) e uma probabilidade complementar $q = 1 - p$ de se deslocar para a esquerda (-1). A probabilidade do caminhante se encontrar na k -ésima posição após um certo número de passos n é dada por:

$$P(n, k, p) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, \quad (2.2)$$

em que:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \quad (2.3)$$

A Figura 2.2 mostra uma caminhada aleatória na linha dos números inteiros, \mathbf{Z} , que começa em zero e a cada passo o caminhante se move +1 ou -1 com a mesma probabilidade de ir para ambos os lados.

2.2 Caminhadas quânticas

Desde a descoberta da mecânica quântica, as leis da natureza têm desafiado nossa intuição, introduzindo efeitos inimagináveis no contexto clássico newtoniano. Tecnologias modernas, como os lasers e a bomba atômica, exploram esses efeitos com benefícios e riscos. Nos últimos anos, o interesse pela teoria da informação quântica cresceu devido ao potencial de dispositivos com capacidades surpreendentes, como a criptografia quântica e a computação quântica. Em 1994, o algoritmo quântico de Shor [40] para fatoração de números inteiros teve um impacto notável, pois sua eficiência ameaça a segurança dos sistemas criptográficos tradicionais, como o RSA (Rivest–Shamir–Adleman), cuja robustez se fundamenta na dificuldade de fatorar números grandes.

As CQs representam uma versão quântica das, já bem estabelecidas, CACs, sua natureza leva a diferentes distribuições para a posição do caminhante, visto que agora torna-se possível os efeitos de superposição e interferência. Enquanto na CAC o caminhante segue apenas uma trajetória, como mostra a Figura 2.2, em uma CQ ele pode seguir todos os caminhos possíveis, como indica a Figura 2.3.

As CQs possuem dois principais modelos de evolução temporal: o modelo contínuo e o modelo discreto. A distinção entre esses modelos está na forma como o tempo é tratado na dinâmica do sistema. No modelo da CQ contínua, o tempo é representado como uma variável contínua, permitindo que a probabilidade do caminhante estar em uma determinada posição seja descrita como uma função contínua do tempo. Nesse caso, a evolução do sistema é regida por um Hamiltoniano, representado pelo operador \hat{H} que descreve as propriedades energéticas e as interações do sistema durante a caminhada. A dinâmica é então expressa pelo operador unitário de evolução temporal:

$$\hat{U}(t) = e^{-i\hat{H}t}, \quad (2.4)$$

onde t é o tempo contínuo e tomamos $\hbar = 1$.

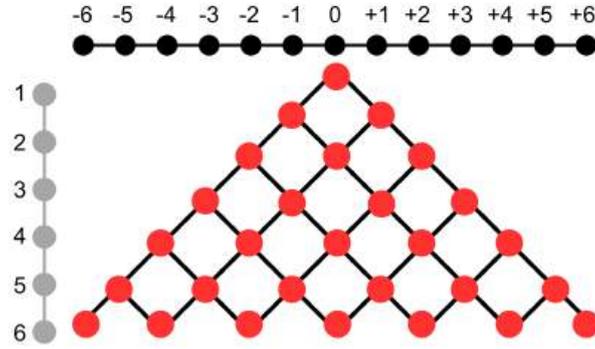


Figura 2.3: Representação de uma caminhada quântica unidimensional de 6 passos com as posições variando de -6 até $+6$. A Figura mostra, em vermelho, que o caminhante percorre todas as trajetórias.

Por outro lado, no modelo da CQ discreta, o tempo é tratado em unidades discretas, ou seja, como uma sequência de passos temporais. Cada passo corresponde a uma operação unitária que combina uma rotação no espaço do caminhante (ou grau de liberdade associado, como spin ou polarização) e uma translação no espaço da rede. Essa evolução pode ser descrita por um operador unitário definido pelo produto de outros dois operadores:

$$\hat{U} = \hat{S} \cdot (\hat{C} \otimes \mathbb{1}), \quad (2.5)$$

onde \hat{C} é o Operador Moeda (do inglês, *Coin Operator*), responsável por criar superposições quânticas, e \hat{S} é o operador de translação, que move o caminhante de acordo com o estado da moeda, chamado de Operador Passo (do inglês, *Step Operator*) e serão abordados mais detalhadamente no Capítulo 3.

A escolha entre os modelos contínuo e discreto depende da aplicação específica e da natureza do problema físico a ser modelado. Ambos os modelos compartilham características essenciais das CQs, como a interferência e a superposição de estados, mas apresentam diferentes regimes de propagação. Nesta dissertação, serão mostrados os resultados obtidos a partir de simulações de uma CQ discreta unidimensional de uma e de duas partículas.

Teoria das caminhadas quânticas

3.1 Formalismo matemático

Para descrever o modelo das CQs, é essencial considerar a interação de dois sistemas quânticos distintos. O primeiro sistema é representado por um vetor que atua no espaço de Hilbert das posições, denotado por \mathcal{H}_p , nesse espaço, os estados quânticos da partícula são denotados por $|x\rangle$, com $x \in \mathbb{Z}$, em que \mathbb{Z} é o conjunto dos números inteiros e o índice x refere-se à posição da partícula em uma rede discreta, formando uma base ortonormal para \mathcal{H}_p .

Enquanto o segundo sistema está associado a um grau de liberdade adicional e é descrito pelo espaço de Hilbert da moeda, denotado por \mathcal{H}_c . Esse espaço é bidimensional, refletindo o fato de que, em cada posição x , há dois estados possíveis associados à partícula: $|+\rangle$ e $|-\rangle$, esses estados representam, respectivamente, os spins up e down da partícula, que, em sistemas de spin-1/2, podem ser representados por:

$$|+\rangle \doteq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

$$|-\rangle \doteq \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

No contexto quântico, as operações realizadas em \mathcal{H}_c , como veremos em breve, introduzem combinações lineares dos estados $|+\rangle$ e $|-\rangle$, essas combinações representam uma superposição quântica, permitindo que a partícula se mova simultaneamente em ambas as direções — uma característica que distingue as CQs das CACs.

Em contraste com o caso clássico, onde a direção do movimento (esquerda ou direita) é determinada por um evento discreto e mutuamente exclusivo, no modelo quântico, a direção da partícula não é fixa, mas sim uma superposição dos dois estados. Isso é realizado por uma rotação no espaço de Hilbert da moeda, que pode ser interpretada como o análogo quântico do lançamento de uma moeda no modelo clássico, essa rotação cria um estado que combina as possibilidades de movimento para a direita e para a esquerda, refletindo a natureza probabilística e simultânea do deslocamento quântico.

Portanto, o modelo da CQs integra esses dois espaços de Hilbert, \mathcal{H}_p e \mathcal{H}_c , em um produto tensorial, formando o espaço total:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_p \otimes \mathcal{H}_c. \quad (3.3)$$

Essa descrição captura a dinâmica combinada da posição e do spin da partícula, destacando a singularidade das CQs em relação às suas contrapartes clássicas. Desse modo, ao considerarmos uma rede unidimensional, o estado da partícula $|\Psi\rangle$ será dado por:

$$|\Psi\rangle = \sum_x |\psi(x,t)\rangle \otimes |x\rangle, \quad (3.4)$$

onde $|\psi(x,t)\rangle$ é dado por:

$$|\psi(x,t)\rangle = \alpha(x,t)|+\rangle + \beta(x,t)|-\rangle, \quad (3.5)$$

onde $\alpha(x)$ e $\beta(x)$ são as amplitudes das probabilidades de encontrar a partícula em uma posição x , com spin up e down, respectivamente. Após t passos, o estado inicial $|\Psi\rangle$ da partícula irá evoluir para:

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_x |\psi(x,t)\rangle \otimes |x\rangle = (\hat{U})^t |\Psi\rangle, \quad (3.6)$$

em que \hat{U} é o operador unitário responsável pela evolução temporal, explicitado na equação (2.5). O operador moeda \hat{C} , de modo geral, é representado por:

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad (3.7)$$

onde $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, em que \mathbb{C} representa o conjunto dos números complexos. Observe que também é possível escrever \hat{C} como:

$$\hat{C}|+\rangle = a|+\rangle + c|-\rangle, \quad (3.8)$$

$$\hat{C}|-\rangle = b|+\rangle + d|-\rangle. \quad (3.9)$$

O operador passo \hat{S} , que opera no espaço das posições, é definido como um operador dependente do estado da moeda da partícula. Em outras palavras, a ação de \hat{S} varia de acordo com o estado da moeda em uma posição específica, de modo que podemos representá-lo matematicamente da seguinte maneira:

$$\hat{S} = \sum_x |x+1\rangle\langle x| \otimes |+\rangle\langle +| + \sum_x |x-1\rangle\langle x| \otimes |-\rangle\langle -|. \quad (3.10)$$

De modo que \hat{S} opera da seguinte forma:

$$\hat{S}|x\rangle \otimes |+\rangle = |x+1\rangle \otimes |+\rangle, \quad (3.11)$$

$$\hat{S}|x\rangle \otimes |-\rangle = |x-1\rangle \otimes |-\rangle. \quad (3.12)$$

A partir da equação (2.5), é possível notar que em cada instante da evolução temporal é necessário aplicar o operador moeda e em seguida o operador passo, seguindo essa ordem. Assim, a evolução temporal, para a CQ com uma moeda genérica, que foi mostrada na equação (3.7), é dada por:

$$\hat{U}|x\rangle \otimes |+\rangle = a|x+1\rangle \otimes |+\rangle + c|x-1\rangle \otimes |-\rangle, \quad (3.13)$$

$$\hat{U}|x\rangle \otimes |-\rangle = b|x+1\rangle \otimes |+\rangle + d|x-1\rangle \otimes |-\rangle. \quad (3.14)$$

É deste modo que a evolução temporal do sistema segue a equação (3.6).

Para uma única partícula inicialmente localizada no centro da rede, na posição x , com o estado da moeda sendo $|-\rangle$ ou $|+\rangle$, o resultado da interferência quântica entre os múltiplos caminhos que surgem após t passos da evolução temporal, pode ser determinado ao analisarmos a distribuição de probabilidade da CQ ao longo da posição unidimensional da partícula. Essa análise é feita calculando a probabilidade $P(x, t)$, dada por:

$$P(x, t) = |\langle x | \Psi(x, t) \rangle|^2 = |\alpha(x, t)|^2 + |\beta(x, t)|^2, \quad (3.15)$$

onde $P(x, t)$ representa a probabilidade de encontrar a partícula na posição x após t passos. É importante ressaltar que essa distribuição é totalmente independente dos graus de liberdade internos da partícula, ou seja, não é influenciada diretamente pelo estado da moeda $|-\rangle$ ou $|+\rangle$, mas apenas pelos efeitos globais da evolução quântica e da interferência resultante. Essa expressão captura como os efeitos de superposição e interferência, característicos das CQs, moldam a probabilidade de localização da partícula na rede.

3.2 Moeda de Hadamard

Dentre os operadores moedas existentes, um dos mais utilizados em CQs é o operador Moeda de Hadamard, pois se trata de uma moeda não tendenciosa, que define igual probabilidade da partícula se deslocar para direita ou para a esquerda. A moeda de Hadamard é definida da seguinte forma:

$$\hat{C}_H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.16)$$

Para mostrar como a moeda de Hadamard atua, vamos considerar o seguinte estado inicial:

$$|\Psi(0)\rangle = |0\rangle \otimes |+\rangle. \quad (3.17)$$

De agora em diante, para simplificar, será utilizada a seguinte notação:

$$|0\rangle \otimes |+\rangle = |0, +\rangle. \quad (3.18)$$

Das equações (3.13) e (3.14), obtemos o seguinte:

- Para $t = 1$, o estado após o primeiro passo é dado por:

$$|\Psi(1)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1, +\rangle + |-1, -\rangle). \quad (3.19)$$

- Para $t = 2$, o estado após o segundo passo é dado por:

$$|\Psi(2)\rangle = \frac{1}{\sqrt{4}}(|2, +\rangle + |0, -\rangle + |0, +\rangle - |-2, -\rangle). \quad (3.20)$$

- Para $t = 3$, o estado após o terceiro passo será calculado, primeiro aplicando-se a moeda de Hadamard:

$$|\Psi(3)\rangle = \frac{1}{\sqrt{8}} \left[\hat{S}(|2, +\rangle + |2, -\rangle + |0, +\rangle - |0, -\rangle + |0, +\rangle + |0, -\rangle - |-2, +\rangle + |-2, -\rangle) \right], \quad (3.21)$$

$$|\Psi(3)\rangle = \frac{1}{\sqrt{8}} \left[\hat{S}(|2, +\rangle + |2, -\rangle + 2|0, +\rangle - |-2, +\rangle + |-2, -\rangle) \right]. \quad (3.22)$$

Agora, aplicando o operador passo, obtemos:

$$|\Psi(3)\rangle = \frac{1}{\sqrt{8}} \left[(|3, +\rangle + |1, -\rangle + 2|1, +\rangle - |-1, +\rangle + |-3, -\rangle) \right]. \quad (3.23)$$

Quando o operador moeda de Hadamard atua no terceiro passo, observamos na equação (3.21) que, no caso do estado $|0, +\rangle$, destacado de azul, ocorre uma interferência construtiva, enquanto que, para o estado $|0, -\rangle$, destacado em vermelho, ocorre uma interferência destrutiva. Comparando a CQ com a CAC, em termos das probabilidades associadas a cada posição, percebemos que as diferenças começam a surgir a partir de $t = 3$, resultado dessas interferências.

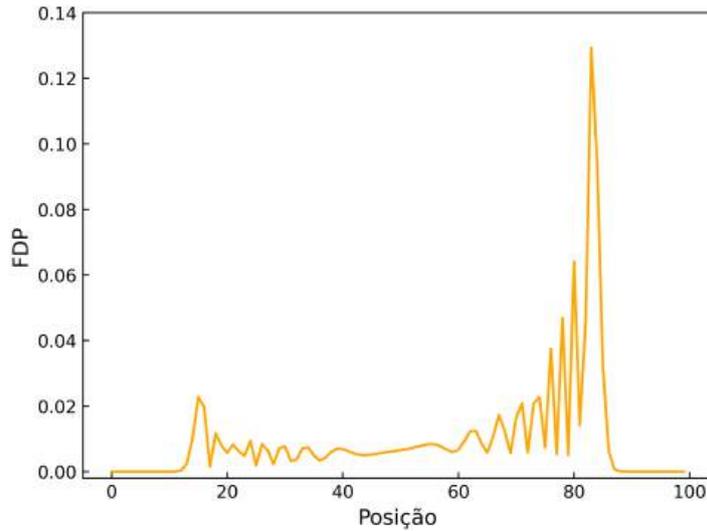


Figura 3.1: Distribuição de probabilidade de uma CQ cujo estado inicial é $|\Psi(0)\rangle = |0, +\rangle$ e $t = 100$.

Na Figura 3.1 notamos uma maior probabilidade de encontrar a partícula deslocada para a direita devido à escolha de um estado inicial assimétrico, nesse caso, a partícula começa com spin up. No caso em que a partícula começa a CQ com spin down, onde temos o seguinte estado inicial:

$$|\Psi(0)\rangle = |0, -\rangle. \quad (3.24)$$

A distribuição de probabilidade resulta em:

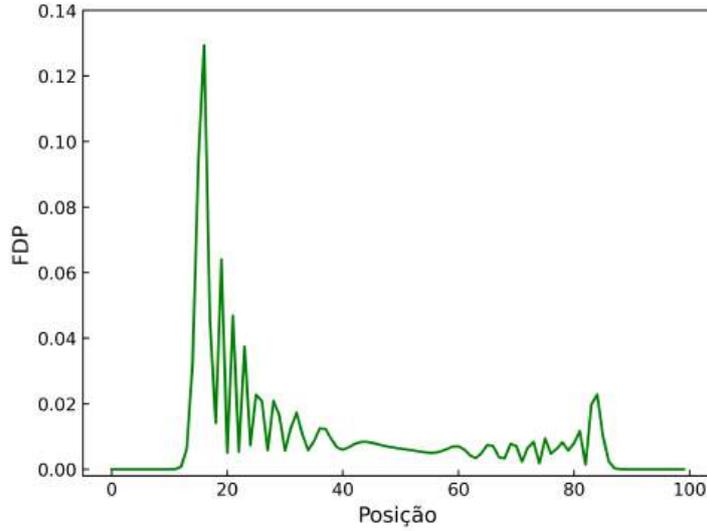


Figura 3.2: Distribuição de probabilidade de uma CQ cujo estado inicial é $|\Psi(0)\rangle = |0, -\rangle$ e $t = 100$.

A partir das Figuras 3.1 e 3.2, é possível observar que a CQ é extremamente sensível às condições iniciais. Também é possível obter uma distribuição de probabilidade simétrica, ao escolhermos um estado inicial de superposição:

$$|\Psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0, +\rangle + i|0, -\rangle). \quad (3.25)$$

O que nos dá a distribuição mostrada, em vermelho, na Figura (1.1).

Também é possível implementar a refletividade [41] no operador moeda, de modo que:

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} \sqrt{R} & \sqrt{1-R} \\ \sqrt{1-R} & \sqrt{R} \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

onde R representa a porcentagem de fótons refletidos, ou refletividade dos BSs. É importante destacar que a moeda utilizada nas simulações da presente Dissertação possui $R = 0.5$.

3.3 Caminhada quântica de duas partículas

As CQs envolvendo dois caminhantes, consideram a evolução simultânea destes em um espaço discreto ou contínuo, regida por princípios de superposição e interferência e, nesse sistema, as partículas podem exibir simetrias estatísticas distintas, como a bosônica, fermiônica ou anyônica, que serão melhores abordadas ao longo da presente Dissertação.

3.3.1 Um olhar geral

As CQs de duas partículas são uma extensão das CQs de uma única partícula, onde o sistema evolui em um espaço de Hilbert composto por dois subsistemas: um para cada partícula. Nesse contexto, cada partícula possui um estado quântico de posição associado a um espaço de Hilbert \mathcal{H}_p e um estado de moeda associado a um espaço de Hilbert \mathcal{H}_c . Assim, o espaço total do sistema é dado pelo produto tensorial:

$$\mathcal{H} = (\mathcal{H}_{p_1} \otimes \mathcal{H}_{c_1}) \otimes (\mathcal{H}_{p_2} \otimes \mathcal{H}_{c_2}), \quad (3.27)$$

que considera tanto as posições quanto os spins de ambas as partículas.

Uma diferença em relação à caminhada quântica de uma única partícula é que, no caso de duas partículas, a dinâmica do sistema pode incluir interações entre elas e essas interações podem ser de diversos tipos, como potenciais dependentes da distância entre as partículas ou condições específicas de troca quântica, como nos casos de partículas indistinguíveis. No caso de partículas bosônicas ou fermiônicas, por exemplo, a simetria do estado total deve ser, respectivamente, simétrica ou antissimétrica sob a troca das partículas.

É possível exemplificar considerando uma CQ de duas partículas inicialmente localizadas em posições distintas em uma rede discreta, com estados de moeda diferentes, à medida que a evolução ocorre, cada partícula pode se mover independentemente para a direita ou para a esquerda, com suas trajetórias interferindo entre si [42]. A interferência resulta em padrões de distribuição de probabilidade que dependem da natureza quântica do sistema, das condições iniciais, e das interações entre as partículas.

3.3.2 Caminhadas quânticas bosônica, fermiônica e anyônica

No presente trabalho, estudamos CQs de duas partículas em um sistema de partículas não interagentes. Deste modo, a dinâmica do sistema é influenciada exclusivamente pela estatística quântica, ou seja, pela simetria da função de onda, que determina o comportamento estatístico das partículas. Assim, nosso estudo abrange os casos de estatísticas bosônicas, fermiônicas e anyônicas [13, 21, 43].

Para partículas idênticas, a mecânica quântica impõe restrições fundamentais sobre a forma da função de onda total. No caso de partículas bosônicas, a função de onda deve ser simétrica em relação à troca das partículas, enquanto para partículas fermiônicas, a função de onda deve ser antissimétrica. Já no caso anyônico, que ocorre em sistemas de baixa dimensionalidade — como em $2D$ [44], a função de onda adquire uma fase não trivial ao trocar as partículas, interpolando entre as simetrias bosônica e fermiônica.

Devido à simetrização ou antissimetrização da função de onda, surge o que é conhecido como interação de troca. Essa interação, no entanto, não é uma interação física no sentido clássico, mas sim uma consequência geométrica e puramente quântica da natureza do estado coletivo das partículas. Conforme descrito por David J. Griffiths em seu livro de Mecânica Quântica [45]:

“O caso interessante ocorre quando há uma sobreposição das funções de onda. O sistema se comporta como se houvesse uma ‘força de atração’ entre bósons idênticos, atraindo uns aos outros, e uma ‘força de repulsão’ entre férmions idênticos, separando uns dos outros [...]. Chamamos isso de força de troca, embora não seja realmente uma força, pois nenhum agente físico está empurrando as partículas; pelo contrário, o que ocorre é uma consequência puramente geométrica da necessidade de simetrização. E também um fenômeno estritamente mecânico quântico, sem nenhum equivalente clássico.”

No contexto das CQs, a força de troca citada no trecho acima, se manifesta nos padrões de interferência das partículas ao longo de sua evolução temporal. Para partículas bosônicas, a simetrização da função de onda leva a uma maior probabilidade de encontrá-las próximas uma da outra, o que resulta em padrões de interferência com concentração de probabilidade em regiões de sobreposição. Já para partículas fermiônicas, a antissimetrização implica a ausência de probabilidade em posições coincidentes, gerando uma repulsão entre as partículas.

Matematicamente, o estado quântico inicial das duas partículas pode ser representado por:

$$|\psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle, \quad (3.28)$$

onde $|\psi_1\rangle$ e $|\psi_2\rangle$ são os estados individuais de cada partícula. Para partículas bosônicas, a função de onda total é simetrizada, de modo que o estado combinado é dado por:

$$|\psi\rangle_{BOS} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle + |\psi_2\rangle \otimes |\psi_1\rangle), \quad (3.29)$$

enquanto que para partículas fermiônicas, a função de onda total é antissimetrizada:

$$|\psi\rangle_{FER} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle - |\psi_2\rangle \otimes |\psi_1\rangle) \quad (3.30)$$

No caso dos ânyons, a função de onda incorpora uma fase adicional dependente do ângulo de troca entre as partículas. Matematicamente, o estado quântico é expresso como:

$$|\psi\rangle_{ANY} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle + e^{i\theta} |\psi_2\rangle \otimes |\psi_1\rangle), \quad (3.31)$$

onde θ é o ângulo de troca característico dos ânyons.

Note que, para $\theta = 0$, recuperamos o comportamento bosônico, e para $\theta = \pi$, o comportamento fermiônico. O estudo dessas estatísticas nas CQs permite explorar propriedades fundamentais, como a distribuição de probabilidade das partículas ao longo do tempo e padrões de interferência associados às estatísticas de troca, que serão exibidos no Capítulo 5.

Metodologia

4.1 Descrição do modelo

A CQ em uma linha unidimensional pode ser implementada experimentalmente por meio de um único fóton que, ao atravessar uma rede em cascata de divisores de feixe (*Beam Splitter*, do inglês, cuja sigla é BS) simétricos, sofre múltiplos espalhamentos, conforme ilustrado na Figura 4.1. Esses divisores possuem a propriedade de transmitir o fóton incidente com igual probabilidade por ambas as saídas, razão pela qual são denominados BS 50:50, para uma discussão mais detalhada acerca do assunto, veja o Apêndice A. Na representação adotada, cada linha tracejada composta por BSs corresponde a um passo temporal da caminhada, enquanto as linhas pretas indicam os trajetos possíveis para o caminhante.

Para explorar o comportamento do caminhante quântico, realizamos simulações computacionais em *Python* que reproduzem a configuração experimental proposta. O modelo adotado considera a incidência simultânea de duas partículas em um mesmo BS, provenientes das portas A e B, conforme Figura 4.1, que possuem polarizações ortogonais. Após incidir no BS, o fóton sofrerá uma rotação e uma translação, descritas pelos operadores moeda e passo, respectivamente, de modo que nas simulações realizamos o produto tensorial t vezes, como foi definido na Equação (3.6).

É fundamental destacar que a CQ pode ser descrita tanto no espaço do caminhante quântico quanto no espaço das posições físicas. No espaço do caminhante quântico, as medições são realizadas diretamente nos BSs, de modo que, para uma CQ de t passos, obtém-se um conjunto de t posições distintas para o caminhante, conforme mostram as distribuições das Figuras 3.1 e 3.2. Por outro lado, no espaço das posições físicas, cada BS apresenta dois modos de saída, implicando que, em uma CQ de t passos, existem $2t$ posições físicas possíveis para o caminhante quântico, como pode-se observar na Figura 4.2.

Uma representação gráfica das amplitudes extraídas no espaço das posições físicas é exibida na Figura 4.3. Enquanto que em cada BS é possível encontrar, após uma medição, o caminhante com spin up ou down, no espaço das posições físicas o caminhante só pode ser encontrado apenas com spin up (down) se for para à direita (esquerda), note que X se refere à posição dos BSs e x se refere às posições no espaço físico.

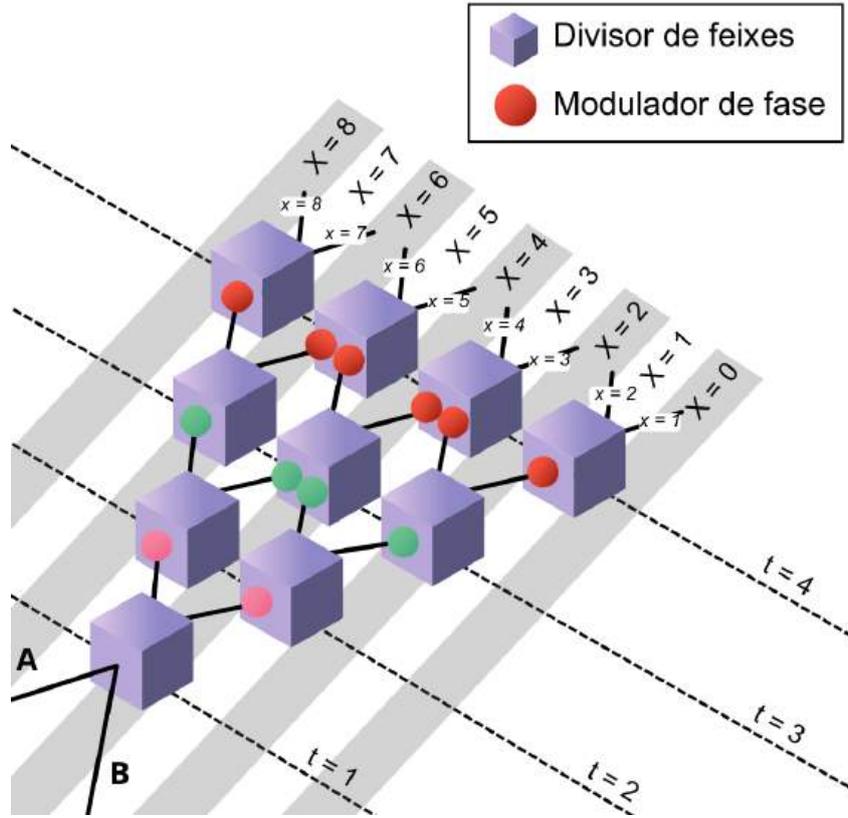


Figura 4.1: Esquema conceitual de uma rede em cascata de BS 50:50 utilizada para implementar uma CQ discreta unidimensional. A desordem temporal é introduzida por moduladores de fase colocados em cada porta de saída do BS, representados pelas esferas coloridas, antes de entrar no próximo. O tempo é mapeado no número de passos da caminhada, deste modo, temos uma CQ discreta.

Para manter a consistência com as medições experimentais apresentadas na Figura 4.1 e em consonância com os trabalhos [24, 46], adotaremos, a partir deste ponto, a descrição das funções de onda do caminhante quântico no espaço das posições físicas. Assim, introduziremos o estado $|\psi\rangle$ correspondente a esse espaço. É importante atentar-se para não confundir esse estado com o $|\psi(x)\rangle$ (que contém dependência em x no ket), previamente definido na Equação (3.5).

O estado $|\psi\rangle$ representa a função de onda associada às posições físicas do caminhante quântico, tal que:

$$\langle x|\psi\rangle \equiv \psi(x) = \begin{cases} \alpha(x/2) & \text{se } x \text{ é par,} \\ \beta(x/2) & \text{se } x \text{ é ímpar.} \end{cases} \quad (4.1)$$

onde $\alpha(x)$ e $\beta(x)$ já foram definidos na equação (3.5). Denotaremos $|\psi_C(t)\rangle$ como sendo a evolução temporal do estado $|\psi_C\rangle$, onde as amplitudes α e β da equação (4.1) evoluem da mesma forma descrita pela equação (3.6).

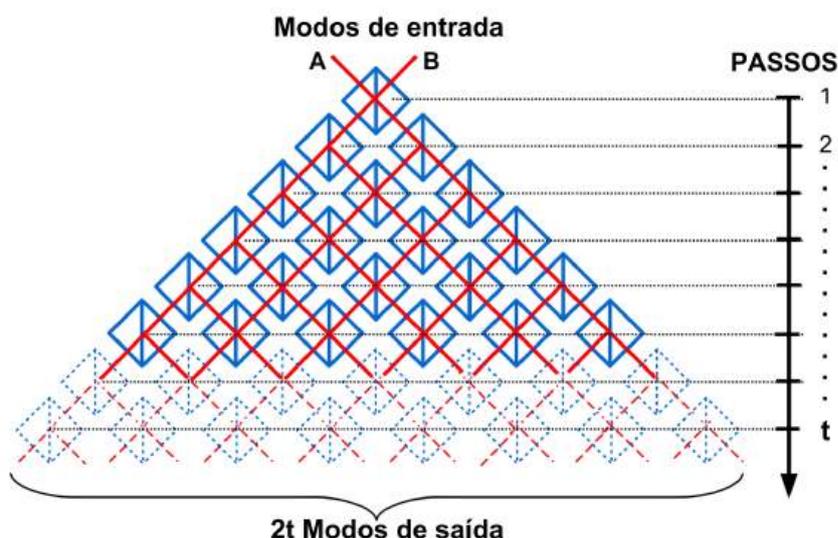


Figura 4.2: Esquema de uma CQ discreta unidimensional. Cada sítio é representado por um BS (quadrados abertos azuis): um fóton que incide em um BS simétrico possui a mesma probabilidade de emergir por qualquer um de seus dois canais de saída. Essa propriedade possibilita que o BS seja empregado tanto como operador moeda quanto como operador passo da CQ. Ao dispor múltiplos divisores de feixe em uma configuração em cascata, torna-se viável simular um circuito de CQ com t passos, em que cada linha de divisores corresponde a um passo temporal na evolução do sistema. [Fonte: [46]]

A Figura 4.4 apresenta uma visualização de $\psi(x)$ para uma caminhada quântica com uma partícula, evidenciando a diferença entre os gráficos obtidos no espaço das posições físicas e aqueles representados no espaço do caminhante, conforme ilustrado nas Figuras 3.1 e 3.2.

Quando duas partículas com spins opostos são injetadas no mesmo sítio de uma CQ, podem emergir distribuições de probabilidade significativamente mais complexas. Denotaremos essas partículas utilizando a notação $|\psi_C\rangle$, onde $C = A, B$, representando partículas que iniciam a caminhada quântica pelas portas A ou B do arranjo experimental ilustrado na Figura 4.1.

Particularmente, no caso de partículas emaranhadas, torna-se possível manipular o estado inicial das mesmas, de maneira a reproduzir estatísticas bosônicas, fermiônicas [13, 21, 43] ou até mesmo anyônicas [47]. Esse comportamento emerge devido ao papel crucial dos efeitos de troca na dinâmica da CQ, característicos de partículas indistinguíveis.

No caso de partículas bosônicas, observa-se a coalescência das partículas, enquanto para partículas fermiônicas, ocorre a repulsão mútua [13]. Para simulações consistentes, pode-se codificar estados iniciais simétricos, antissimétricos ou intermediários, utilizando o grau de liberdade associado à polarização, como demonstrado por experimentos que empregam fontes de Conversão Paramétrica Descendente Espontânea (do inglês, *Spontaneous Parametric Down-Conversion*, SPDC) [13, 24].

A SPDC é um processo óptico não linear no qual um fóton de alta energia, proveniente de um laser de bombeamento, interage com um cristal não linear para se dividir espontaneamente em dois fótons de menor energia, conhecidos como fóton sinal e fóton idler. Esse processo

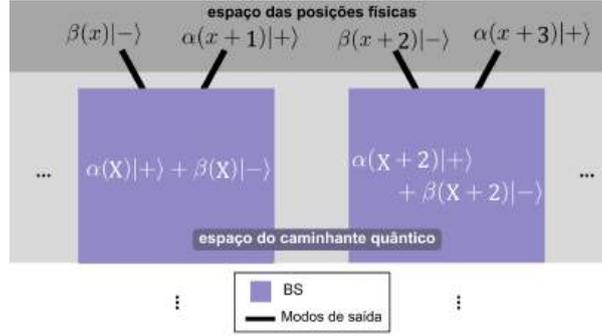


Figura 4.3: Representação esquemática para uma partícula dos espaços do caminhante (BSs) e das posições físicas (modos de saída), aqui temos dois BSs da Figura 4.1 vista de cima.

ocorre de maneira probabilística e obedece às leis de conservação de energia e momento, isto é,

$$\omega_p = \omega_s + \omega_i \quad \text{e} \quad \mathbf{k}_p = \mathbf{k}_s + \mathbf{k}_i, \quad (4.2)$$

onde ω e \mathbf{k} representam, respectivamente, a frequência e o vetor de onda dos fótons. A espontaneidade do processo se deve ao fato de que não há necessidade de um estímulo externo para que a conversão ocorra, tornando-o um fenômeno intrínseco ao meio não linear.

A SPDC é uma técnica fundamental em experimentos de óptica quântica, sendo amplamente utilizado para gerar pares de fótons emaranhados, os quais são essenciais para investigações em criptografia quântica, computação quântica e testes de não-localidade, como os experimentos de desigualdades de Bell. Além disso, o processo pode ser configurado em diferentes regimes de fase, conhecidos como SPDC Tipo I e Tipo II, permitindo o controle sobre as propriedades de polarização dos fótons gerados. Essa versatilidade faz da SPDC uma ferramenta indispensável para a exploração e aplicação dos princípios da mecânica quântica em sistemas experimentais avançados.

O estado inicial geral das duas partículas emaranhadas pode ser descrito como [46]:

$$|\Psi^{(\theta)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|\psi_A, H\rangle |\psi_B, V\rangle + e^{i\theta} |\psi_B, H\rangle |\psi_A, V\rangle], \quad (4.3)$$

em que

$$|\psi_A, H\rangle = |\psi_A\rangle \otimes |H\rangle, \quad (4.4)$$

$$|\psi_B, H\rangle = |\psi_B\rangle \otimes |H\rangle, \quad (4.5)$$

são vetores ortonormais que descrevem um fóton com polarização horizontal que inicia a CQ pela porta A e porta B, respectivamente (a definição similar é válida para $|\Psi_{A,B}, V\rangle$ associado com um fóton polarizado verticalmente). Observe que o parâmetro θ desempenha um papel fundamental na definição do tipo de estatística a ser simulada. Para $\theta = 0$, a estatística corresponde ao comportamento bosônico, enquanto $\theta = \pi$ caracteriza a estatística fermiônica. Valores intermediários no intervalo $0 < \theta < \pi$ representam estatísticas anyônicas, que interpolam entre os dois regimes.

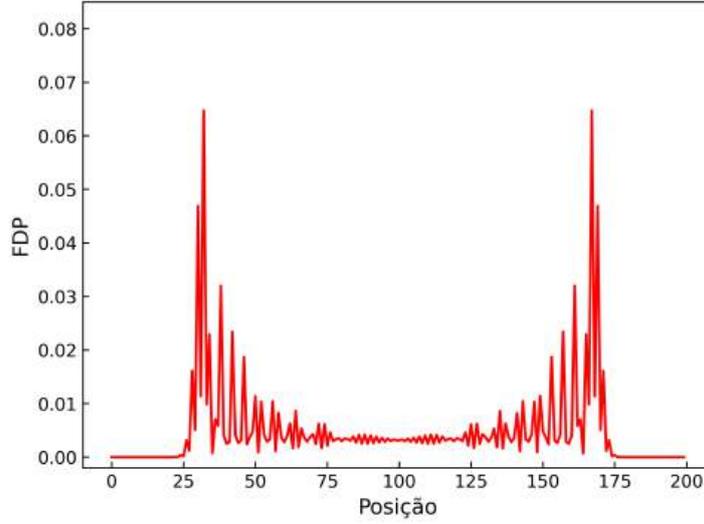


Figura 4.4: Distribuição de probabilidade no espaço das posições físicas para uma partícula que inicia a CQ em um estado de superposição (polarização H e V), evidenciando a interferência quântica e a propagação simultânea dos diferentes modos de polarização ao longo da rede.

Assumindo que a propagação pela rede óptica seja independente da polarização e que não haja interação entre os dois fótons, o estado descrito pela equação (4.3) evolui, após t passos, de acordo com a seguinte expressão:

$$|\Psi^{(\theta)}(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|\psi_A(t), H\rangle|\psi_B(t), V\rangle + e^{i\theta}|\psi_B(t), H\rangle|\psi_A(t), V\rangle]. \quad (4.6)$$

A probabilidade de detectar uma partícula na posição x e outra na posição y , independente da sua polarização é definida como [13]:

$$P^\theta(x, y, t) = |\langle x, H|\langle y, V|\Psi^\theta(t)\rangle|^2 + |\langle y, H|\langle x, V|\Psi^\theta(t)\rangle|^2, \quad (4.7)$$

para $x > y$, enquanto que para $x = y$, a probabilidade é dada por:

$$P^\theta(x, x) = |\langle x, H|\langle x, V|\Psi^\theta(t)\rangle|^2, \quad (4.8)$$

onde $|x, H\rangle = |x\rangle \otimes |H\rangle$ e similarmente para $|x, V\rangle$.

O cálculo para a primeira parcela do lado direito da equação (4.7) é mostrado abaixo, omi-

tindo a dependência no tempo por simplicidade da notação:

$$\begin{aligned}
\langle x, H | \langle y, V | \Psi^\theta \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} [\langle x, H | \psi_A, H \rangle \langle y, V | \psi_B, V \rangle + e^{i\theta} \langle x, H | \psi_B, H \rangle \langle y, V | \psi_A, V \rangle] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} [\langle x | \psi_A \rangle \langle y | \psi_B \rangle + e^{i\theta} \langle x | \psi_B \rangle \langle y | \psi_A \rangle] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_A(x) \psi_B(y) + e^{i\theta} \psi_B(x) \psi_A(y)] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_A(x) \psi_B(y) + e^{i\theta} \psi_A(y) \psi_B(x)],
\end{aligned} \tag{4.9}$$

$$|\langle x, H | \langle y, V | \Psi^\theta \rangle|^2 = \frac{1}{2} |\psi_A(x) \psi_B(y) + e^{i\theta} \psi_A(y) \psi_B(x)|^2. \tag{4.10}$$

Como o segundo termo da equação (4.7) apenas permuta as variáveis x e y , escrevemos diretamente a expressão para a probabilidade:

$$P^\theta(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2} (|\psi_A(x) \psi_B(y) + e^{i\theta} \psi_A(y) \psi_B(x)|^2 + |\psi_A(y) \psi_B(x) + e^{i\theta} \psi_A(x) \psi_B(y)|^2), & \text{se } x > y, \\ \frac{1}{2} |\psi_A(x) \psi_B(x) + e^{i\theta} \psi_A(x) \psi_B(x)|^2, & \text{se } x = y. \end{cases} \tag{4.11}$$

As probabilidades acima são definidas de tal forma que simule partículas indistinguíveis que obedecem as estatística fermônica ($\theta = \pi$) e bosônica ($\theta = 0$).

Ao trabalhar com um θ arbitrário, é possível gerar distribuições de probabilidade para a CQ exóticas e não-triviais, sendo um parâmetro capaz de controlar o grau de repulsão ou coalescência entre as duas partículas. É conveniente expressar as probabilidades definidas acima de uma forma mais compacta. Note que apesar de $P^\theta(x, y)$ só ser definido para $x \geq y$, $P^\theta(x, y) = P^\theta(y, x)$ é válido para todo x e y . Por isso, podemos definir uma probabilidade válida para todo x e y da rede. Definiremos então

$$P^{\theta, \text{sym}}(x, y) = \frac{1}{4} |\psi_A(x) \psi_B(y) + e^{i\theta} \psi_A(y) \psi_B(x)|^2 + \frac{1}{4} |\psi_A(y) \psi_B(x) + e^{i\theta} \psi_A(x) \psi_B(y)|^2, \tag{4.12}$$

para todo x e y da rede.

A definição na equação (4.12) é conveniente pois assim é possível expor os resultados numéricos obtidos no capítulo seguinte como um mapa de calor. Além disso, é possível calcular valores esperados de uma função simétrica $F(x, y)$ sob permutação das variáveis x e y [$F(x, y) = F(y, x)$] utilizando $P^{\theta, \text{sym}}$, através da igualdade observada na equação (4.13) a seguir:

$$\langle F^\theta \rangle \equiv \sum_{x \geq y} F(x, y) P^\theta(x, y) = \sum_{x, y} F(x, y) P^{\theta, \text{sym}}(x, y), \tag{4.13}$$

que será útil no cálculo dos expoentes da variância desenvolvido nas seções seguintes, uma abordagem mais detalhada sobre o cálculo das probabilidades pode ser vista no Apêndice B.

As esferas da Figura 4.1 representam moduladores de fase utilizados para implementar desordem em uma possível configuração experimental. A mudança das cores nos moduladores de fase representa a desordem dinâmica em evolução, ou seja, a desordem muda apenas no tempo, enquanto permanece a mesma em cada posição espacial para um passo específico da CQ, que será mostrado na próxima seção.

4.2 Caminhadas quânticas desordenadas

Neste trabalho, investigamos o comportamento das CQs sob a influência de desordem dinâmica. A desordem em sistemas físicos pode ocorrer em diferentes graus, variando desde poucas impurezas em um cristal praticamente perfeito até estruturas vítreas onde a desordem é tão intensa que se torna quase impossível caracterizar uma estrutura periódica [48].

A implementação da desordem dinâmica tem como objetivo principal introduzir um controle ajustável sobre o transporte nas CQs. Tal controle é realizado ajustando um único parâmetro da desordem, possibilitando a observação de diferentes regimes de transporte quântico. Essa abordagem fornece uma visão fundamental sobre a relação entre a dinâmica da desordem e os mecanismos de propagação em sistemas quânticos.

4.2.1 Desordem dinâmica

A desordem dinâmica está frequentemente associada à perda de coerência quântica devido à interação do sistema com o ambiente [49], esse fenômeno, conhecido como decoerência, desempenha um papel crucial na compreensão da transição entre sistemas clássicos e quânticos. Em sistemas de CQs, a introdução da desordem dinâmica pode ter um impacto significativo no regime do transporte das partículas.

Ao contrário da desordem estática, que é congelada no tempo e leva à ausência da difusão, a desordem dinâmica introduzida no sistema pode acelerar o espalhamento das partículas. Isso pode levar ao chamado regime de hipertransporte [50], no qual a propagação das partículas supera o regime de propagação balística típico das CQs.

Neste trabalho, a desordem dinâmica foi implementada de forma controlada, possibilitando a observação de diferentes regimes de transporte em CQs através do ajuste de apenas um parâmetro da desordem. Para isso, alteramos o operador moeda de Hadamard, descrito na equação (3.16), de modo a incluir flutuações temporais. A nova definição do operador moeda, que incorpora a desordem dinâmica, é dada por:

$$\hat{C}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{i\phi_-(t)} & e^{i\phi_-(t)} \\ e^{i\phi_+(t)} & -e^{i\phi_+(t)} \end{pmatrix}, \quad (4.14)$$

onde $\phi_{+,-}(t)$ representa uma fase aleatória que varia a cada passo de forma descorrelacionada, ou seja, $\phi(t)\phi(t') \propto \delta_{t,t'}$, introduzindo assim, uma diferença de fase relativa das componentes $|+\rangle$ e $|-\rangle$ do caminhante quântico, que faz o papel da desordem dinâmica no sistema. A inclusão da mesma nos permite observar como o regime de propagação das partículas evolui sob diferentes condições, essa abordagem também abre caminho para investigações mais detalhadas sobre a difusão anômala nas CQs.

4.3 Difusão anômala

A difusão anômala é uma característica marcante em diversos sistemas físicos e encontra aplicações em diferentes contextos, como em meios desordenados, sistemas biológicos e CQs. Para descrever o regime de propagação em uma CQ, a variância da posição média é frequentemente utilizada como uma métrica fundamental [24]. Essa variância, que é o o valor esperado, ($\mu = E(x)$), do desvio ao quadrado da média:

$$\text{var}(x) = E[(x - \mu)^2], \quad (4.15)$$

descreve o espalhamento da distribuição de probabilidade ao longo do tempo e segue, assintoticamente, uma relação de potência:

$$\text{var}(x) \sim t^\eta, \quad (4.16)$$

onde η é o *expoente de difusão*, que caracteriza o regime de propagação, e a partir de η , é possível classificar os regimes de propagação [51] observados nas CQs:

- **Subdifusivo** ($\eta < 1$): Ocorre em sistemas onde a propagação da partícula é restringida por barreiras ou obstáculos. Um exemplo notável é o efeito de localização de Anderson [52], no qual a desordem estática leva à supressão do transporte e η pode tender a zero em casos extremos.
- **Difusivo** ($\eta = 1$): Esse é o comportamento típico em sistemas clássicos, como na difusão browniana, onde o espalhamento das partículas é linear no tempo. Em uma CQ, a transição para o limite clássico de difusão normal pode ocorrer em presença de desordem estática ou decoerência significativa.
- **Superdifusivo** ($1 < \eta < 2$): Caracteriza-se por um espalhamento mais rápido das partículas em comparação ao transporte difusivo. Fenômenos como turbulência em fluidos e movimentos de animais em busca de alimento podem exibir esse tipo de difusão.
- **Balístico** ($\eta = 2$): O transporte balístico refere-se ao regime de condução em que os portadores de carga, como, por exemplo, elétrons, se deslocam através de um material sem sofrer colisões significativas com impurezas, defeitos ou fônons, mantendo assim sua energia e momento ao longo do percurso.
- **Hiper-balístico** ($\eta > 2$): esse regime implica que a propagação das partículas é ainda mais rápida que o transporte balístico [50].

Diferentes métodos têm sido adotados na literatura para fornecer uma estimativa quantitativa das propriedades de localização, como o comprimento de localização [53] ou a variância da distribuição de uma única partícula [12]. Esta última provou ser particularmente útil para comparar os efeitos de diferentes tipos de desordem [54], no entanto, quando se trata de um par de partículas, diferentes parâmetros podem ser adotados.

No presente trabalho, é calculada a $\text{var}^{(\theta)}(x_M) = \text{var}^{(\theta)}(x+y)$, que é a variância da posição média de duas partículas, x_M , permitindo uma análise mais detalhada das propriedades de localização nesse contexto. Seguindo [55], temos que $\text{var}^{(\theta)}(x_M)$ é definida como:

$$\text{var}^{(\theta)}(x_M) = \sum_{x,y=1}^N (x+y)^2 P^{(\theta,\text{sym})}(x,y) - \left[\sum_{x,y=1}^N (x+y) P^{(\theta,\text{sym})}(x,y) \right]^2. \quad (4.17)$$

De modo que x_M é uma coleção de pontos que, assintoticamente, se comporta como uma lei de potência, então é feita uma regressão linear e extraímos o expoente da variância, ou seja:

$$\text{var}^{(\theta)}(x_M) \sim t^\eta. \quad (4.18)$$

4.4 Geração de fases aleatórias com distribuições truncadas

Quando considera-se um cenário desordenado, é necessário quantificar o grau da desordem presente no sistema, esse parâmetro pode ser avaliado por meio da intensidade da mesma (ver Figura 4.5), representada por δ , que coincide com o desvio padrão das distribuições de probabilidade apresentadas nesta seção.

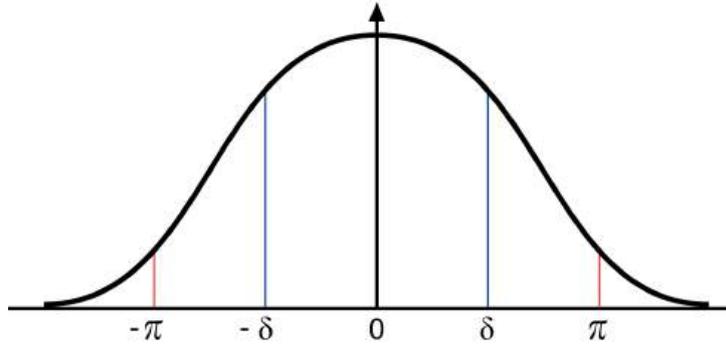


Figura 4.5: Representação da distribuição gaussiana que será truncada no intervalo $[-\pi, \pi]$, onde δ representa a intensidade da desordem, que coincide com o desvio padrão da distribuição.

Em cada passo da CQ, uma fase aleatória é atribuída ao sistema de acordo com uma das seguintes distribuições: Uniforme, Gaussiana, Laplaciana ou Lorentziana (também chamada de Cauchy-Lorentz). Essas distribuições são truncadas no intervalo $[-\pi, \pi]$, garantindo que as fases geradas estejam dentro do domínio apropriado para representar variações de fase, com exceção da distribuição uniforme, que será abordada a seguir.

1. **Distribuição Uniforme:** Apenas na distribuição uniforme o parâmetro de controle é o truncamento em si (os extremos da distribuição, que vão de $[\phi_{min}, \phi_{max}]$), ou seja, escolhemos o valor da truncagem para gerar a distribuição com um certo desvio padrão

($\phi_u = \sigma\sqrt{3}$), onde ϕ_u ($= \phi_{max} = -\phi_{min}$) é o valor da truncagem da distribuição uniforme, já nas demais distribuições o truncamento é sempre fixo em $[-\pi, \pi]$ e modificamos um parâmetro de escala γ .

Para entender o parâmetro de escala (γ) consideramos uma distribuição de probabilidade $P(x)$, em que γ aparece quando definimos:

$$P(\phi, \gamma) = A(\gamma) [Q(\phi/\gamma)], \quad (4.19)$$

onde $A(\gamma)$ é uma nova constante de normalização que segue:

$$\int_{-\pi}^{\pi} P(\phi, \gamma) d\phi = 1, \quad (4.20)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} A(\gamma) [Q(\phi/\gamma)] d\phi = 1, \quad (4.21)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} Q(\phi/\gamma) d\phi = \frac{1}{A(\gamma)}. \quad (4.22)$$

Nas distribuições Gaussiana, Laplaciana e Lorentziana truncadas no intervalo de $[-\pi, \pi]$, γ não coincide com o desvio padrão (σ), o desafio é ter controle de σ modificando γ . A relação entre γ e o desvio padrão, em geral, não é trivial, é possível observar na Figura 4.6 que a medida que γ aumenta, o desvio padrão das distribuições truncadas, que serão descritas a seguir, saturam para um mesmo valor.¹

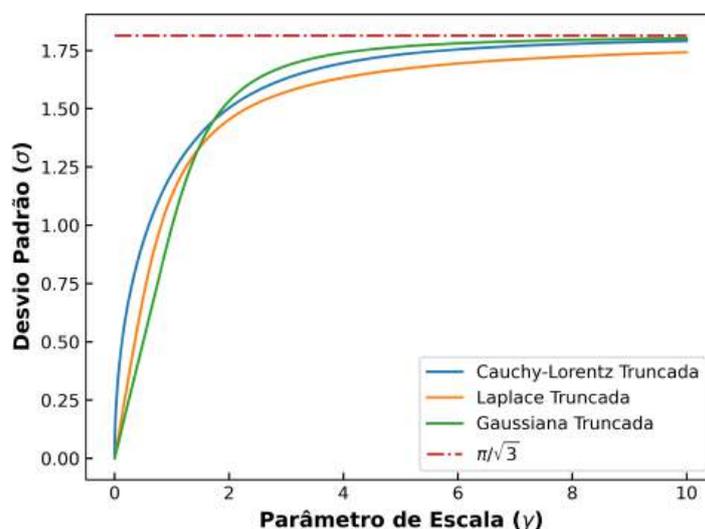


Figura 4.6: Relação do parâmetro de escala (eixo x) com o desvio padrão (eixo y) de cada distribuição, note que eles saturam no mesmo valor ($\pi/\sqrt{3}$).

¹É possível mostrar que quando $\gamma \rightarrow \infty$ as três distribuições truncadas convergem para a distribuição uniforme com $\phi_u = \pi$.

2. **Distribuição Gaussiana:** As fases são geradas de acordo com uma função densidade de probabilidade dada por:

$$P_G(\phi) = A(\gamma_G) \left\{ \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\phi}{\gamma_G} \right)^2 \right] \right\}, \quad (4.23)$$

onde $A(\gamma_G)$ é uma constante de renormalização para a distribuição Gaussiana truncada.

3. **Distribuição Laplaciana:** Neste caso, a probabilidade segue:

$$P_L(\phi) = A(\gamma_L) \left[\exp \left(-\frac{\phi}{\gamma_L} \right) \right], \quad (4.24)$$

onde $A(\gamma_L)$ é uma constante de renormalização para a distribuição Laplaciana truncada.

4. **Distribuição de Cauchy-Lorentz:** Para esta distribuição, a densidade de probabilidade é expressa como:

$$P_C(\phi) = A(\phi_C) \left[1 + \left(\frac{\phi}{\gamma_C} \right)^2 \right]^{-1}, \quad (4.25)$$

onde $A(\gamma_C)$ é uma constante de renormalização para a distribuição de Cauchy-Lorentz truncada.

A implementação dessas distribuições permite controlar a intensidade e o tipo de desordem imposta sobre o sistema, ou seja, para cada passo da CQ, será sorteada uma fase aleatória, δ , de uma das distribuições acima para as fases relativas, ϕ_+ e ϕ_- , já definidas anteriormente na Seção 4.2.1, essas fases não diferem de um BS para outro, diferem apenas temporalmente, o que nos dá uma desordem temporal. Essa abordagem possibilita o estudo de como diferentes características estatísticas da desordem afetam o comportamento dinâmico das partículas na CQ.

Resultados

5.1 Distribuição de probabilidade

Para a implementação da desordem dinâmica, utilizamos a intensidade da desordem δ , como foi mostrado no Capítulo 4, que define a intensidade da desordem temporal no sistema. Inicialmente, consideramos a evolução do sistema na ausência de desordem ($\delta = 0$) e, posteriormente, investigamos o impacto de uma desordem significativa, fixada em $\delta = \pi/2$. Na Figura 5.1, apresentamos os resultados obtidos para os dois cenários, incluindo mapas de densidade de probabilidade para cada tipo de estatística considerada, em uma CQ de 100 passos e a média foi realizada sobre 100 realizações, é possível observar um dos códigos utilizados na simulação da CQ no Apêndice C.

A evolução da densidade de probabilidade para uma única partícula, considerando diferentes intensidades de desordem dinâmica, é ilustrada na Figura 5.1. No caso de $\delta = 0$, o sistema apresenta comportamento típico de uma CQ sem desordem, exibindo propagação balística e padrões claros de interferência. Por outro lado, para $\delta = \pi/2$, a desordem dinâmica modifica significativamente a distribuição de probabilidade, evidenciando um comportamento difusivo e redução dos padrões de interferência. No caso de duas partículas, investigamos os efeitos da desordem dinâmica para as estatísticas bosônica, fermiônica e anyônica. A evolução dos mapas de densidade de probabilidade foi analisada para as intensidades da desordem $\delta = 0$ e $\delta = \pi/2$, conforme ilustrado na Figura 5.1.

Para partículas bosônicas, exibidas na Figura 5.1, nos mapas (a) e (e), observamos uma maior concentração de probabilidade em regiões onde as partículas tendem a sofrer coalescência, mesmo na presença de desordem dinâmica. Para partículas fermiônicas, observadas nos mapas (c) e (g) da Figura 5.1, a repulsão estatística é evidenciada tanto para $\delta = 0$ quanto para $\delta = \pi/2$, isso implica que férmions têm probabilidade nula de estarem no mesmo sítio, devido ao princípio de exclusão de Pauli. Notavelmente, o padrão de anti-agrupamento persiste mesmo diante dos efeitos de interferência inerentes a uma caminhada quântica, mesmo ao longo de tempos de evolução prolongados (até cem passos temporais nos resultados apresentados). Por fim, para partículas anyônicas - em que consideramos $\theta = \pi/2$ (ver equação (4.3)) - exibidas em (b) e (f) na Figura 5.1, os mapas exibem uma interpolação entre os regimes bosônico e fermiônico, dependendo do parâmetro de estatística considerado. Para uma única partícula, ver mapas (d) e (h) da Figura 5.1, é notável que em um sistema ordenado, a densidade de probabilidade nos mostra o impacto do estado inicial, a partícula começa a CQ em um estado de superposição (ver equação (3.25)), de modo que resulta em uma densidade de probabilidade espalhada, com dois picos em posições opostas. Enquanto que para um sistema desordenado ($\delta = \pi/2$), observamos um único pico central devido a decoerência da função de onda.

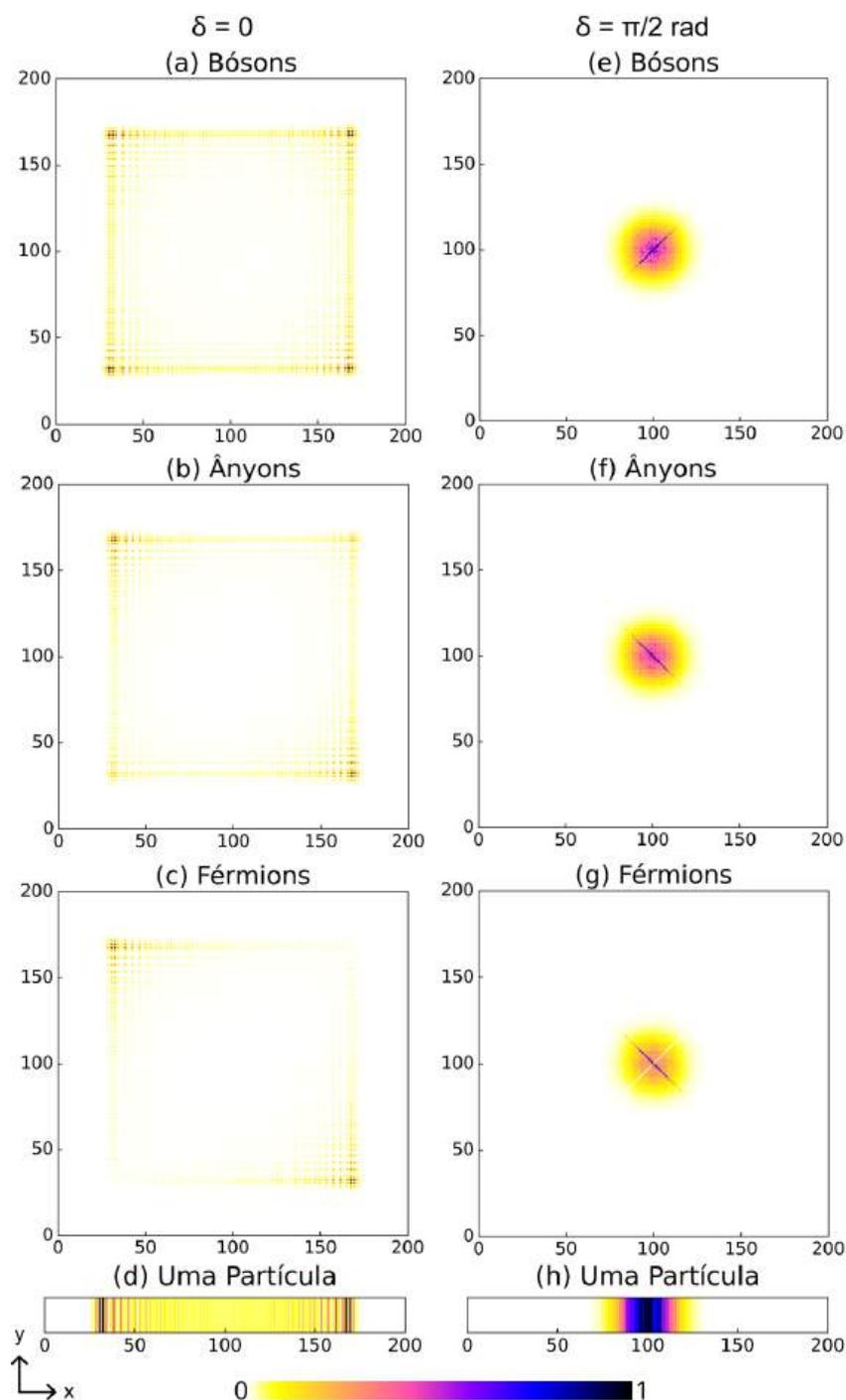


Figura 5.1: Mapas da densidade de probabilidade para diferentes caminhadas quânticas, em que (a) e (e) são partículas bosônicas; (b) e (f) anyônicas; (c) e (g) fermiônicas; e (d) e (h) apenas uma partícula. Os mapas foram calculados após $t = 100$ passos e são uma média de 100 configurações diferentes de uma distribuição de probabilidade desordenada, na primeira coluna temos uma CQ ordenada, enquanto na segunda, usamos a distribuição Gaussiana truncada para gerar os números aleatórios da fase, considerando uma desordem dinâmica com intensidade $\delta = \pi/2$ rad. Para as CQs de duas partículas, em $t = 0$, as partículas estão posicionadas em dois sítios vizinhos no centro da rede. No caso da CQ de uma única partícula, ela inicia em um estado de superposição. Os mapas representam a probabilidade de encontrar uma partícula na posição x e outra na posição y no último passo de cada caminhada quântica. Ajustando a intensidade da desordem, δ , é possível controlar a dispersão do(s) caminhante(s).

Esses resultados destacam como a desordem dinâmica afeta a propagação das partículas em diferentes regimes estatísticos, oferecendo insights sobre a transição entre comportamentos quânticos e clássicos em sistemas desordenados.

5.2 Regimes de propagação

Nesta seção, realizamos uma análise de como diferentes regimes de propagação nas CQs podem ser obtidos variando o grau de desordem. Para caracterizar os regimes de propagação citados no Capítulo 4, analisamos o expoente da variância da posição média das duas partículas, o que possibilitou a identificação quantitativa. Em particular, observou-se a emergência de um regime hiper-balístico para uma determinada intensidade da desordem, quando as partículas assumem estatísticas fermiônicas.

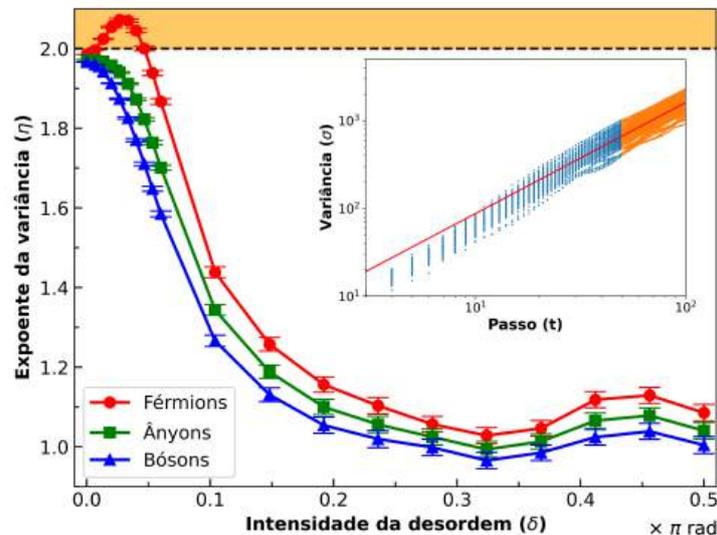


Figura 5.2: Dependência do expoente da variância da posição média (η) com a intensidade da desordem (δ) para uma distribuição de probabilidade de desordem Gaussiana, em uma caminhada quântica de 100 passos, com média calculada a partir de 100 diferentes configurações de desordem. No inset é possível observar os pontos utilizados para realizar a regressão linear, descartamos os pontos anteriores visando obter um resultado do sistema tendendo ao seu estado estacionário.

A Figura 5.2 apresenta os resultados para o expoente da variância, η , definido na equação (4.18), em função da intensidade da desordem, δ , onde utilizamos a distribuição gaussiana truncada, em uma CQ de 100 passos, com média calculada a partir de 100 realizações. Os círculos vermelhos, quadrados verdes e triângulos azuis representam as CQs fermiônicas, anyônicas e bosônicas, respectivamente. No gráfico menor, é mostrada a regressão linear usada para obter o expoente da CQ bosônica com intensidade da desordem igual a $0,13\pi$ rad. As barras de erro foram calculadas a partir da regressão linear, é importante ressaltar que consideramos os pontos alaranjados para extrair o expoente, e um procedimento similar foi aplicado para cada ponto.

Toda a região de superdifusão, onde $1 < \eta < 2$, pode ser acessada por meio de uma escolha adequada de δ . Devido à repulsão fermiônica, para um valor específico de intensidade da desordem, o expoente associado a essa CQ é maior do que para qualquer outra CQ investigada neste trabalho, observamos que existe uma região de intensidade da desordem onde o expoente da CQ fermiônica é maior que 2, indicando o regime de propagação hiperbalística. A violação do regime balístico excede 23 desvios-padrão, o que representa um resultado muito interessante.

A variação da intensidade da desordem foi realizada de 0 até $3\pi/50$ em passos de $0,006\pi$, e de $3\pi/50$ até $\pi/2$, com passos de $0,44\pi$. Dessa forma, obtivemos um gráfico com 20 pontos. A largura dos passos foi ajustada para melhorar a resolução na região de hipertransporte.

Para compreender melhor como a evolução das CQs é afetada pela desordem dinâmica, alteramos a distribuição de probabilidade e utilizamos, também, as distribuições Uniforme, Laplaciana e Gaussiana para implementar a desordem dinâmica em todos os tipos de CQs analisadas: bosônica, fermiônica e anyônica, como mostram as Figuras 5.3, 5.4 e 5.5. Assim como no caso da desordem dinâmica Gaussiana, as distribuições foram centradas em zero, de forma que sua largura pudesse ser utilizada como parâmetro de controle da intensidade da desordem. Todas as distribuições de desordem dinâmica foram truncadas no intervalo $-\pi \leq \phi(t) \leq \pi$, similar ao procedimento adotado para a distribuição Gaussiana. Na Figura 5.3, podemos observar o que ocorre para os bósons.

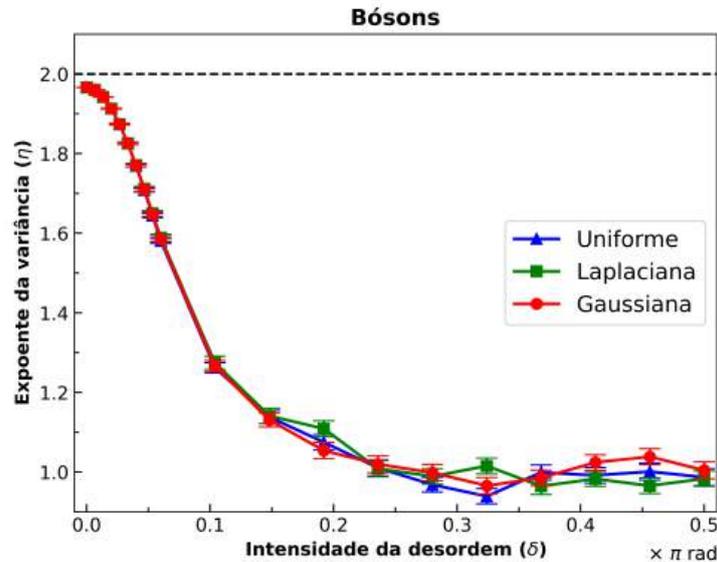


Figura 5.3: Expoente da variância da posição média (η) em função da intensidade da desordem (δ) para uma CQ bosônica com 100 passos e 100 realizações. Triângulos azuis, quadrados verdes e círculos vermelhos representam as distribuições de probabilidade de desordem Uniforme, Laplaciana e Gaussiana, respectivamente.

Ao modificarmos a estatística das duas partículas, fazendo $\theta = \pi/2$ na equação 4.3, obtemos os expoentes da variância em função da intensidade da desordem para os ânyons (ver Figura 5.4). Observe na Figura 4.18 que apenas os férmions apresentaram um regime de hiper-

transporte, com base nisso, focamos nossa atenção à CQ fermiônica.

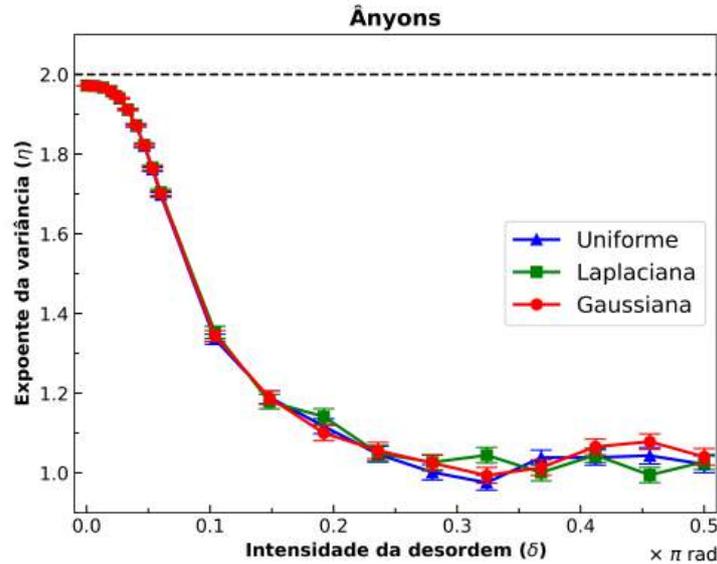


Figura 5.4: Expoente da variância da posição média (η) em função da intensidade da desordem (δ) para uma CQ anyônica com 100 passos e 100 realizações. Triângulos azuis, quadrados verdes e círculos vermelhos representam as distribuições de probabilidade de desordem Uniforme, Laplaciana e Gaussiana, respectivamente.

5.3 Hipertransporte em caminhadas quânticas fermiônicas

Nesta seção, investigamos o regime de hipertransporte observado em caminhadas quânticas fermiônicas submetidas à desordem dinâmica. Em simulações realizadas, verificou-se que, para uma faixa específica de intensidades da desordem, a distribuição de probabilidade das partículas fermiônicas exibe um crescimento da variância da posição média que ultrapassa o regime balístico típico, caracterizando um comportamento hiperbalístico.

A Figura 5.5 mostra o expoente da variância em função da intensidade da desordem para os três tipos de desordem analisados: Uniforme (triângulos azuis), Laplaciana (quadrados verdes) e Gaussiana (círculos vermelhos). Para uma análise mais detalhada desse fenômeno, foi realizado um zoom na região de hipertransporte, conforme mostrado no inset da Figura 5.5. A largura dos passos utilizados na variação da desordem foi menor nessa região, em comparação com a região de superdifusão, de forma semelhante à abordagem da Figura 5.2. O comportamento hiperbalístico está presente nas três distribuições de desordem dinâmica, com violações no limite balístico ($\eta = 2$) superiores a 25, 19 e 23 desvios-padrão para as distribuições Uniforme, Laplaciana e Gaussiana, respectivamente. Observa-se que as distribuições Gaussiana, Laplaciana e Uniforme apresentam comportamentos similares para todos os valores de intensidade de desordem analisados.

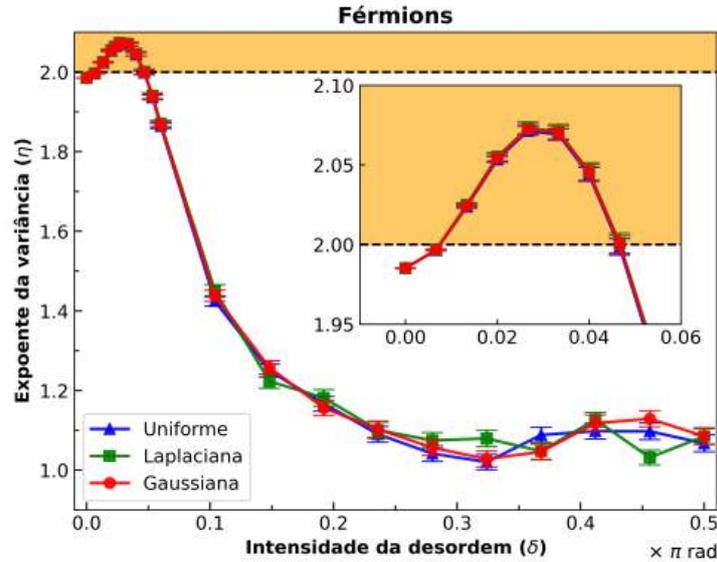


Figura 5.5: Expoente da variância (η) em função da intensidade da desordem (δ) para uma CQ fermiônica com 100 passos, com a média realizada sobre 100 diferentes configurações de desordem. Triângulos azuis, círculos vermelhos e quadrados verdes representam as distribuições de probabilidade de desordem uniformes, laplacianas e gaussianas, respectivamente. No detalhe, é exibido um zoom na região de hipertransporte. Um comportamento semelhante é observado para as três diferentes distribuições de desordem, com a presença de regiões de hipertransporte e superdifusão.

5.4 Distribuição de cauda pesada

Nesta seção, exploramos o impacto da utilização da distribuição de Cauchy-Lorentz, uma distribuição de cauda pesada, na geração dos números aleatórios para a fase relativa entre os caminhantes quânticos. Diferentemente de distribuições de caudas leves, como a Uniforme, Gaussiana e Laplaciana, a Lorentziana possui maior probabilidade de valores extremos, o que afeta significativamente as propriedades estatísticas do sistema.

Realizamos simulações de uma CQ de 100 passos, com 100 amostras, utilizando essa distribuição para descrever a desordem dinâmica. Contudo, os resultados obtidos indicam que não foi possível caracterizar claramente o regime hiperbalístico para os sistemas fermiônicos. A Figura 5.6 apresenta o comportamento do expoente da variância (η) em função da intensidade da desordem (δ) para duas simulações realizadas com as mesmas configurações. Observa-se que os resultados das duas simulações são divergentes, com uma grande dispersão nos valores de η , evidenciada pelas barras de erro. Isso sugere que a amostragem limitada (100 amostras) não é suficiente para fornecer uma descrição estatística robusta do sistema. Tal comportamento está relacionado à própria natureza da distribuição de Cauchy-Lorentz, onde eventos extremos contribuem desproporcionalmente para as médias, aumentando as incertezas no cálculo do expoente.

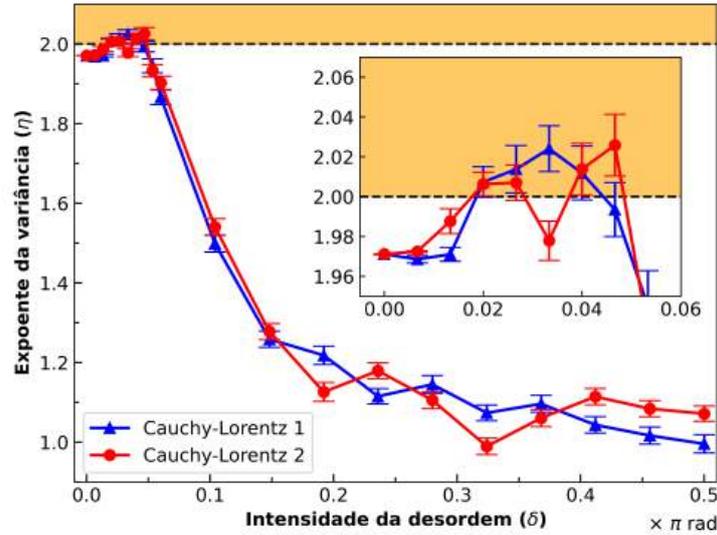


Figura 5.6: Expoente da variância (η) em função da intensidade da desordem (δ) para duas simulações, de uma CQ fermiônica, realizadas com uma distribuição de Cauchy-Lorentz. As barras de erro refletem a alta dispersão dos dados devido à natureza da distribuição de cauda pesada.

Para quantificar a diferença entre as distribuições de desordem já citadas, utilizamos a curtose. Essa é uma medida estatística que avalia o formato das caudas ou a concentração dos dados em uma distribuição de probabilidade. Matematicamente, a curtose é definida como o quarto momento central normalizado pelo quadrado da variância:

$$\kappa \equiv \frac{\mathbb{E}[(\phi - \mu)^4]}{\sigma^4} - 3, \quad (5.1)$$

onde ϕ representa a variável aleatória, no nosso caso, a fase introduzida no BS em cada passo da CQ, μ é a média da distribuição, σ^2 é a variância da distribuição e \mathbb{E} denota o valor esperado. O termo -3 é subtraído para definirmos a curtose da distribuição Gaussiana igual como sendo zero, pois ela servirá como referência.

Para uma distribuição Gaussiana, temos que $\kappa = 0$, indicando um comportamento de caudas considerado "normal", sem excesso de curtose. Por outro lado, a distribuição de Cauchy-Lorentz, conhecida por suas caudas longas e pela lenta decadência dos valores extremos, possui uma curtose indefinida. Isso ocorre porque seus momentos superiores, incluindo o quarto momento, não existem devido à lenta diminuição de sua função de densidade de probabilidade. Na Figura 5.7, é apresentado um gráfico do logaritmo da curtose em função da largura da desordem para as distribuições de probabilidade de Cauchy-Lorentz, Gaussiana e Laplaciana. Para valores pequenos de δ , a curtose associada à distribuição de Cauchy-Lorentz diverge, em contraste com os valores finitos observados nas distribuições de Laplace e Gauss.

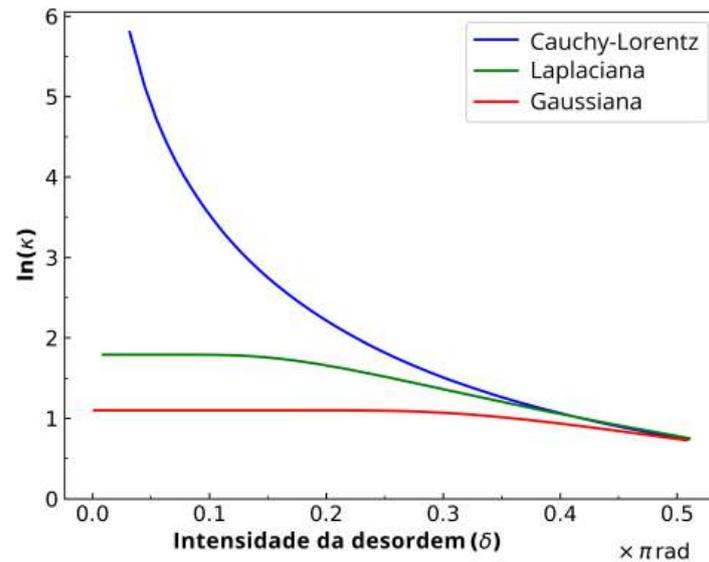


Figura 5.7: Dependência do logaritmo da curtose ($\ln(\kappa)$) em relação à intensidade da desordem (δ). As curvas azul, verde e vermelha correspondem, respectivamente, às distribuições de Cauchy-Lorentz, Laplaciana e Gaussiana. Para pequenas larguras de desordem, onde ocorre o hipertransporte, a curtose diverge para a distribuição de Cauchy-Lorentz, indicando a ausência do hipertransporte nesse caso.

Isso indica que, no caso da desordem de Cauchy-Lorentz, as caudas pesadas da distribuição impede uma restrição nas fases, necessária para alcançar o regime de hipertransporte. É precisamente nessa região de δ que o hipertransporte é observado, mas as caudas da distribuição de Cauchy-Lorentz não permitem que o regime hiperbalístico se estabeleça.

Conclusões e perspectivas

Nas caminhadas quânticas ideais, sem a presença da desordem, o transporte ocorre de forma balística, o que implica que a variância da posição média obedece à relação

$$\langle x^2(t) \rangle \propto t^2.$$

No entanto, ao introduzirmos desordem dinâmica no sistema, observa-se que, em uma determinada faixa de valores da intensidade da desordem, o expoente da variância η (definido pela relação $\langle x^2(t) \rangle \propto t^\eta$) ultrapassa o valor 2, indicando que o sistema adota um regime hiperbalístico. Tal comportamento sugere que a propagação das partículas se acelera de maneira significativa, superando a propagação balística usual.

Este fenômeno pode ser interpretado considerando-se os efeitos de interferência quântica e a repulsão estatística característica dos férmions. Em condições de desordem dinâmica moderada, a interferência entre os múltiplos caminhos possíveis e os termos de troca favorecem a propagação eficiente das partículas, resultando em uma expansão mais rápida do que a esperada para um sistema balístico. Além disso, a análise comparativa com diferentes distribuições de desordem (uniforme, laplaciana e gaussiana) demonstrou que esse comportamento hiperbalístico é robusto e consistente entre os diversos cenários, evidenciando a influência decisiva da intensidade da desordem no regime de transporte.

No caso específico da CQ fermiônica, o regime de hipertransporte foi observado para todas as distribuições de desordem dinâmica investigadas, exceto para a distribuição de Cauchy-Lorentz. Analisamos essa diferença e associamos a ausência do regime hiperbalístico à característica singular dessa distribuição: possui uma cauda pesada, ou seja, eventos extremos contribuem desproporcionalmente para as médias.

O regime de hipertransporte, observado apenas quando o estado inicial é antissimétrico, pode estar relacionado à interação entre a repulsão fermiônica e a desordem dinâmica. Sugerimos que esse resultado possa contribuir para o desenvolvimento de algoritmos de busca baseados em CQ (do inglês, *Quantum Walk Search Algorithms*, QWSA) [37, 56], métodos quânticos que utilizam a dinâmica das CQs para explorar de forma paralela múltiplos caminhos em um espaço de estados, possibilitando a localização eficiente de um elemento específico em uma estrutura complexa, como grafos ou listas. Essa abordagem utiliza dos fenômenos da superposição e interferência quântica, permitindo que a busca seja realizada com uma aceleração significativa em comparação com algoritmos clássicos. Em essência, esses algoritmos oferecem uma nova perspectiva para resolver problemas de busca e otimização, demonstrando o potencial dos sistemas quânticos em superar limitações computacionais tradicionais.

Nos QWSAs usuais, o estado inicial é uma superposição uniforme de todos os estados possíveis, envolvendo graus de liberdade internos e externos, resultando em uma função de onda simétrica. Introduzindo uma desordem dinâmica projetada, poderia ser possível expandir a eficiência desses algoritmos além do limite permitido pelo espalhamento balístico que ocorre nas CQs.

Além disso, os resultados apresentados reforçam com mais robustez previsões posteriores [57] de um regime de hipertransporte em uma CQ utilizando um arranjo experimental relativamente simples, baseado em uma rede de divisores de feixe e moduladores de fase. Esse tipo de arranjo já foi amplamente utilizado em diversas investigações e não apresenta correlações espaciais de longo alcance. Essa simplicidade experimental abre a possibilidade de uma verificação experimental dos resultados obtidos, bem como oferece uma nova perspectiva para o estudo de processos de transferência que ocorrem em taxas mais rápidas do que as balísticas, típicas de sistemas quânticos.

Para trabalhos futuros, sugerimos ampliar as simulações variando o número de passos da CQ, o que permitirá investigar a evolução do sistema em regimes de curto e longo prazo. Além disso, a implementação da refletividade [41] na CQ poderá revelar novos comportamentos dinâmicos e oferecer uma compreensão mais aprofundada dos mecanismos de transporte. Por fim, aumentar o número de amostras para distribuições de caudas pesadas será fundamental para reduzir as incertezas estatísticas e obter uma caracterização mais robusta dos regimes de superdifusão e hipertransporte.

Divisores de feixe e a moeda de Hadamard

Neste Apêndice, discutiremos a relação entre a matriz de transformação de um divisor de feixe 50:50 e a matriz de Hadamard, frequentemente utilizada em caminhadas quânticas.

A.1 Divisor de Feixe 50:50

Um divisor de feixe 50:50 é um dispositivo óptico que divide um feixe de luz em duas componentes de igual intensidade. A transformação das amplitudes de entrada para as amplitudes de saída é dada pela matriz:

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

Essa matriz relaciona as amplitudes de entrada (a_{in} e b_{in}) com as amplitudes de saída (a_{out} e b_{out}) conforme:

$$\begin{bmatrix} a_{out} \\ b_{out} \end{bmatrix} = \tau \begin{bmatrix} a_{in} \\ b_{in} \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

O fator $\frac{1}{\sqrt{2}}$ garante a normalização da função de onda, enquanto o sinal negativo na matriz indica uma mudança de fase no caminho refletido.

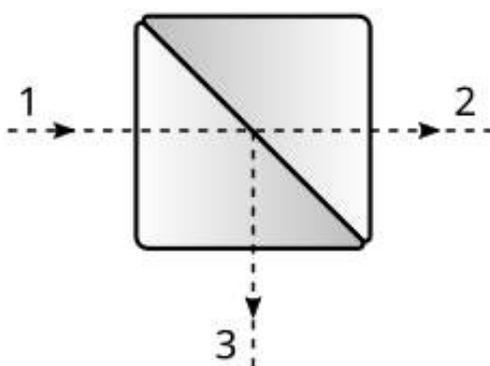


Figura A.1: Ilustração esquemática de um cubo divisor de feixe, muito utilizado em experimentos de óptica. O raio 1 corresponde à luz incidente, o 2 está relacionada com a luz transmitida (que em um BS 50:50 é de 50%) e o 3 está relacionado com a luz refletida (que corresponde a 50% da luz incidente).

A.2 Moeda de Hadamard nas Caminhadas Quânticas

A matriz de Hadamard também é utilizada para gerar superposição quântica em caminhadas quânticas. Sua definição é dada por:

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

Assim como no divisor de feixe, a matriz Hadamard cria uma superposição entre duas possibilidades, garantindo que ambas as probabilidades sejam iguais e que a soma das amplitudes ao quadrado resulte em 1.

A.3 Analogias e Interferência

Tanto o divisor de feixe quanto a moeda de Hadamard realizam a distribuição equitativa de amplitudes de probabilidade entre dois caminhos. No contexto óptico, isso se traduz na interferência entre os feixes transmitido e refletido. No contexto de caminhadas quânticas, ocorre a interferência entre movimentos para a direita e para a esquerda.

Cálculo das probabilidades

Dado o estado da Equação (4.3), a probabilidade de detectar um fóton na posição x e outro na posição y , independentemente de sua polarização, é escrita como:

$$P^{(\theta)}(x, y, t) = \begin{cases} |\langle x, H | \langle y, V | \Psi^{(\theta)}(t) \rangle|^2 + |\langle y, V | \langle x, H | \Psi^{(\theta)}(t) \rangle|^2, & i > j, \\ |\langle x, H | \langle x, V | \Psi^{(\theta)}(t) \rangle|^2, & x = y. \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

onde $|x, H\rangle$ e $|x, V\rangle$ descrevem um fóton emergindo da porta de saída x do arranjo com polarização horizontal e vertical, respectivamente. Explicitando, temos:

$$P^{(\theta)}(x, y, t) = \begin{cases} |\psi_A(x, t)\psi_B(y, t) + e^{i\theta}\psi_A(x, t)\psi_B(y, t)|^2, & \text{quando } x > y, \\ \begin{cases} 2|\psi_A(x, t)\psi_B(y, t)|^2, & \text{para } (+), \\ 0, & \text{para } (-), \end{cases} & \text{quando } x = y. \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

É importante ressaltar que $P^{(\theta)}(x, y, t)$ só está definida para $x \geq y$ afim de evitar a contagem dupla das probabilidades.

Para simplificar, analisaremos os casos bosônicos e fermiônicos, em que a probabilidade é definida como $|\Psi^{(+)}(t)\rangle$ e $|\Psi^{(-)}(t)\rangle$, respectivamente. As probabilidades definidas acima, na Equação (B.2), correspondem às probabilidades que se obteria caso as partículas fossem indistinguíveis e obedecessem às estatísticas bosônicas ou fermiônicas. Isso é consequência de dois fatores:

1. Enquanto na Equação (4.3) as duas partículas são distinguíveis em termos de seus graus de liberdade de polarização, a medição que consideramos é transparente com relação a esse grau de liberdade (isto é, não distinguimos se o fóton emergente possui polarização horizontal H ou vertical V);
2. O vetor $|\Psi^{(\pm)}\rangle$ é simétrico (antissimétrico) sob a troca de partículas (ou seja, sob a troca de polarização).

Para visualizar isso explicitamente, observe que, na primeira quantização, ao identificar a polarização com os índices das partículas, temos que $|\Psi^{(+)}(t)\rangle$ define um estado próprio de dois bósons.

A probabilidade de detectar uma das duas partículas na posição x e a outra na posição y (com $x > y$) pode então ser obtida projetando $|\Psi^{(+)}(t)\rangle$ no estado bosônico, que representa esta configuração final, ou seja, o vetor simétrico dado por:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|x, H\rangle|y, V\rangle + |y, H\rangle|x, V\rangle). \quad (\text{B.3})$$

De modo que a probabilidade é:

$$\begin{aligned}
P^{(\text{BOS})}(x,y) &= \left| \left[\frac{\langle x, H | \langle y, V | + \langle y, H | \langle x, V |}{\sqrt{2}} \right] | \Psi^{(+)} \rangle \right|^2 \\
&= |\psi_A(x)\psi_B(y) + \psi_A(y)\psi_B(x)|^2 \\
&= P^{(+)}(x,y),
\end{aligned} \tag{B.4}$$

De agora em diante, irei omitir o tempo para simplificar a notação. Da mesma forma, a probabilidade de detectar ambas as partículas em x é dada por:

$$P^{(\text{BOS})}(x,x) = \left| \langle x, H | \langle x, V | | \Psi^{(+)} \rangle \right|^2 = 2 |\psi_A(x)\psi_B(x)|^2 = P^{(+)}(x,x). \tag{B.5}$$

As mesmas conclusões aplicam-se aos férmions. De modo que, nesse caso, tem-se:

$$\begin{aligned}
P^{(\text{FER})}(x,y) &= \left| \frac{\langle x, H | \langle y, V | - \langle y, H | \langle x, V |}{\sqrt{2}} | \Psi^{(-)} \rangle \right|^2 \\
&= |\psi_A(x)\psi_B(y) - \psi_A(y)\psi_B(x)|^2 = P^{(-)}(x,y)
\end{aligned} \tag{B.6}$$

A probabilidade acima está definida para $x > y$, enquanto que para $x = y$, no caso fermiônico obtemos:

$$P^{(\text{FER})}(x,x) = 0 = P^{(-)}(x,x) \tag{B.7}$$

Agora que foi esclarecido como os estados emaranhados de polarização $|\Psi^{(\pm)}\rangle$ permitem explicar diferentes estatísticas quânticas, introduzimos a versão simétrica das distribuições $P^{(\pm, \text{sym})}(x,y)$:

$$\begin{aligned}
P^{(\pm, \text{sym})}(x,y) &= P^{(\pm, \text{sym})}(y,x) \\
&= \frac{|\psi_A(x)\psi_B(y) \pm \psi_A(y)\psi_B(x)|^2}{2}, \quad [\forall x,y]
\end{aligned} \tag{B.8}$$

As funções $P^{(\pm, \text{sym})}(x,y)$ são normalizadas quando integradas em todo o domínio de x e y , ou seja,

$$\begin{aligned}
\sum_{x,y} P^{(\pm, \text{sym})}(x,y) &= \sum_{x,y} \frac{|\psi_A(x)\psi_B(y) \pm \psi_A(y)\psi_B(x)|^2}{2} \\
&= \langle \psi_A | \psi_A \rangle \langle \psi_B | \psi_B \rangle \pm |\langle \psi_A | \psi_B \rangle|^2 = 1.
\end{aligned} \tag{B.9}$$

Note que

$$P^{(\text{sym})}(x) = \sum_y P^{(\pm, \text{sym})}(x,y) = \frac{|\psi_A(x)|^2 + |\psi_B(x)|^2}{2}$$

$$\begin{aligned}
 P^{(\text{sym})}(x) &= \sum_y P^{(\pm, \text{sym})}(x, y) \\
 &= \frac{|\psi_A(x)|^2 + |\psi_B(x)|^2}{2} \pm \text{Re}[\psi_A(x) \psi_B(x)^* \langle \psi_B | \psi_A \rangle] \\
 &= \frac{|\psi_A(x)|^2 + |\psi_B(x)|^2}{2}.
 \end{aligned} \tag{B.10}$$

Observe que, ao escrever as últimas identidades nas Equações (B.9) e (B.10), usamos explicitamente o fato de que

$$|\psi_A\rangle \text{ e } |\psi_B\rangle \tag{B.11}$$

são estados ortonormais, esses vetores estão, na verdade, associados a duas trajetórias de uma única partícula que entram no sistema a partir de duas portas distintas do experimento. Assim, podemos escrever:

$$\begin{aligned}
 P^{(BOS)}(x, y) &= 2P^{(+, \text{sym})}(x, y), \quad \text{para } x > y, \\
 P^{(BOS)}(x, x) &= P^{(+, \text{sym})}(x, x), \quad \text{para } x = y, \\
 P^{(FER)}(x, y) &= 2P^{(-, \text{sym})}(x, y), \quad \text{para } x > y, \\
 P^{(BOS)}(x, x) &= P^{(-, \text{sym})}(x, x) = 0, \quad \text{para } x = y.
 \end{aligned} \tag{B.12}$$

Além disso, o valor esperado de qualquer observável de duas partículas Ω , que é simétrica sob a troca de partículas, pode ser expresso em termos de $P^{(\pm, \text{sym})}(x, y)$. Indicando pela notação $\Omega(x, y) = \Omega(y, x)$ a representação espacial de Ω , a seguinte identidade é válida:

$$\begin{aligned}
 \langle \Omega^{(BOS)} \rangle &= \sum_{x \geq y} P^{(BOS)}(x, y) \Omega(x, y) \\
 &= \sum_{x, y} P^{(+, \text{sym})}(x, y) \Omega(x, y), \\
 \langle \Omega^{(FER)} \rangle &= \sum_{x \geq y} P^{(FER)}(x, y) \Omega(x, y) \\
 &= \sum_{x, y} P^{(-, \text{sym})}(x, y) \Omega(x, y)
 \end{aligned} \tag{B.13}$$

Das Equações (B.13), pode-se calcular facilmente a probabilidade de encontrar uma partícula na posição x . Em particular, para bósons, pode-se introduzir a probabilidade $P_{>1}^{\text{BOS}}(x)$ de encontrar *pelo menos* uma partícula na posição x e a probabilidade $P_1^{\text{BOS}}(x)$ de haver exatamente uma partícula na posição x . Essas quantidades em geral diferem e podem ser expressas como:

$$\begin{aligned}
P_{>1}^{(\text{BOS})}(x) &= \sum_{y(<x)} P^{(\text{BOS})}(x,y) + \sum_{y(>x)} P^{(\text{BOS})}(y,x) + P^{(\text{BOS})}(x,x) \\
&= 2 \sum_y P^{(+,\text{sym})}(x,y) - P^{(+,\text{sym})}(x,x) \\
&= 2P^{(\text{sym})}(x) - P^{(+,\text{sym})}(x,x),
\end{aligned} \tag{B.14}$$

$$\begin{aligned}
P_1^{(\text{BOS})}(x) &= \sum_{y(<x)} P^{(\text{BOS})}(x,y) + \sum_{y(>x)} P^{(\text{BOS})}(y,x) \\
&= 2P^{(\text{sym})}(x) - 2P^{(+,\text{sym})}(x,x).
\end{aligned} \tag{B.15}$$

É importante ressaltar que nem $P_{>1}^{(\text{BOS})}(x)$ nem $P_1^{(\text{BOS})}(x)$ coincidem com a distribuição marginal $P^{(\text{sym})}(x)$ da Equação (B.10). Em particular, diferentemente desta última, nem $P_{>1}^{(\text{BOS})}(x)$ nem $P_1^{(\text{BOS})}(x)$ estão necessariamente normalizadas para 1 quando somadas sobre todos os x (isso se deve ao fato de que, ao somar sobre x , estamos inevitavelmente incluindo contagem dupla de eventos). No caso fermiônico, $P_{>1}^{(\text{FER})}(x)$ e $P_1^{(\text{FER})}(x)$ coincidem devido ao princípio de exclusão de Pauli. Neste caso temos

$$\begin{aligned}
P_1^{(\text{FER})}(x) &= \sum_{y(<x)} P^{(\text{FER})}(x,y) + \sum_{y(>x)} P^{(\text{FER})}(x,y) \\
&= 2 \sum_y P^{(-,\text{sym})}(x,y) = 2P^{(\text{sym})}(x),
\end{aligned} \tag{B.16}$$

onde $P^{(\text{FER})}(x,y)$ denota a distribuição conjunta para férmions e $P^{(-,\text{sym})}(x)$ é a distribuição marginal anti-simétrica. Esta igualdade reflete a impossibilidade de dois férmions ocuparem a mesma posição quântica, conforme exigido pelo princípio de exclusão de Pauli.

Códigos em Python

As simulações computacionais foram implementadas em Python, onde analisamos as CQs desordenadas de uma e duas partículas, com 100 passos e 100 realizações. Nessas simulações, foi implementada a desordem dinâmica utilizando quatro distribuições diferentes para gerar os números aleatórios que variam a desordem temporalmente: Uniforme, Gaussiana, Laplaciana e Lorentziana, todas elas estão truncadas no intervalo de $[-\pi, \pi]$ e para duas partículas, temos os bósons, ânyons e férmions.

Estou disponibilizando, através do *Google Colab* o código para quem quiser conferir ou reproduzir os resultados, esse em específico é para uma desordem que possui distribuição Gaussiana, é possível modificar alguns parâmetros (conforme comentários no código) para obter as distribuições bosônicas, ânyônicas e fermiônicas, para acessar, basta escanear o QR code abaixo.



Figura C.1: QR code para acesso à simulação de uma CQ desordenada.

Caro leitor, é importante ressaltar que o presente código gera os dados, o tratamento deve ser feito por um código à parte, conforme seus objetivos e exigências.

Referências Bibliográficas

- [1] Yakir Aharonov, Luiz Davidovich, and Nicim Zagury. Quantum random walks. *Physical Review A*, 48(2):1687, 1993.
- [2] Neil Shenvi, Julia Kempe, and K Birgitta Whaley. Quantum random-walk search algorithm. *Physical Review A*, 67(5):052307, 2003.
- [3] Luca Razzoli, Gabriele Cenedese, Maria Bondani, and Giuliano Benenti. Efficient implementation of discrete-time quantum walks on quantum computers. *Entropy*, 26(4):313, 2024.
- [4] Andrea Gherardi, Alessandro Laneve, Luis Diego Bonavena, Linda Sansoni, Jose Ferraz, Andrea Fratalocchi, Fabio Sciarrino, Álvaro Cuevas, and Paolo Mataloni. Experimental investigation of superdiffusion via coherent disordered quantum walks. *Physical review letters*, 123(14):140501, 2019.
- [5] Andrea Gherardi, Syamsundar De, Alessandro Laneve, Sonja Barkhofen, Jan Sperling, Paolo Mataloni, and Christine Silberhorn. Transient subdiffusion via disordered quantum walks. *Physical Review Research*, 3(2):023052, 2021.
- [6] Julia Kempe. Quantum random walks: an introductory overview. *Contemporary Physics*, 44(4):307–327, 2003.
- [7] Frederick W Strauch. Connecting the discrete-and continuous-time quantum walks. *Physical Review A—Atomic, Molecular, and Optical Physics*, 74(3):030301, 2006.
- [8] Salvador Elías Venegas-Andraca. Quantum walks: a comprehensive review. *Quantum Information Processing*, 11(5):1015–1106, 2012.
- [9] Martin B Plenio and Susana F Huelga. Dephasing-assisted transport: quantum networks and biomolecules. *New Journal of Physics*, 10(11):113019, 2008.
- [10] Neill Lambert, Yueh-Nan Chen, Yuan-Chung Cheng, Che-Ming Li, Guang-Yin Chen, and Franco Nori. Quantum biology. *Nature Physics*, 9(1):10–18, 2013.
- [11] Diego Santiago-Alarcon, Horacio Tapia-McClung, Sergio Lerma-Hernández, and Salvador E Venegas-Andraca. Quantum aspects of evolution: a contribution towards evolutionary explorations of genotype networks via quantum walks. *Journal of the Royal Society Interface*, 17(172):20200567, 2020.

- [12] A Schreiber, KN Cassemiro, V Potoček, A Gábris, I Jex, and Ch Silberhorn. Decoherence and disorder in quantum walks: from ballistic spread to localization. *Physical review letters*, 106(18):180403, 2011.
- [13] Linda Sansoni, Fabio Sciarrino, Giuseppe Vallone, Paolo Mataloni, Andrea Crespi, Roberta Ramponi, and Roberto Osellame. Two-particle bosonic-fermionic quantum walk via integrated photonics. *Physical review letters*, 108(1):010502, 2012.
- [14] Siamak Dadras, Alexander Gresch, Caspar Groiseau, Sandro Wimberger, and Gil S Summy. Quantum walk in momentum space with a bose-einstein condensate. *Physical review letters*, 121(7):070402, 2018.
- [15] Masoud Mohseni, Patrick Rebentrost, Seth Lloyd, and Alan Aspuru-Guzik. Environment-assisted quantum walks in photosynthetic energy transfer. *The Journal of chemical physics*, 129(17), 2008.
- [16] Prateek Chawla and CM Chandrashekar. Quantum walks in polycyclic aromatic hydrocarbons. *New Journal of Physics*, 23(11):113013, 2021.
- [17] ARC Buarque, WS Dias, FABF de Moura, ML Lyra, and GMA Almeida. Rogue waves in discrete-time quantum walks. *Physical Review A*, 106(1):012414, 2022.
- [18] Neil B Lovett, Sally Cooper, Matthew Everitt, Matthew Trevers, and Viv Kendon. Universal quantum computation using the discrete-time quantum walk. *Physical Review A—Atomic, Molecular, and Optical Physics*, 81(4):042330, 2010.
- [19] Andrew M Childs, David Gosset, and Zak Webb. Universal computation by multiparticle quantum walk. *Science*, 339(6121):791–794, 2013.
- [20] Shivani Singh, Prateek Chawla, Anupam Sarkar, and CM Chandrashekar. Universal quantum computing using single-particle discrete-time quantum walk. *Scientific Reports*, 11(1):11551, 2021.
- [21] PK Pathak and GS Agarwal. Quantum random walk of two photons in separable and entangled states. *Physical Review A—Atomic, Molecular, and Optical Physics*, 75(3):032351, 2007.
- [22] Yaron Bromberg, Yoav Lahini, Roberto Morandotti, and Yaron Silberberg. Quantum and classical correlations in waveguide lattices. *Physical review letters*, 102(25):253904, 2009.
- [23] Xiaoming Cai, Hongting Yang, Hai-Long Shi, Chaohong Lee, Natan Andrei, and Xi-Wen Guan. Multiparticle quantum walks and fisher information in one-dimensional lattices. *Physical review letters*, 127(10):100406, 2021.

- [24] Andrea Crespi, Roberto Osellame, Roberta Ramponi, Vittorio Giovannetti, Rosario Fazio, Linda Sansoni, Francesco De Nicola, Fabio Sciarrino, and Paolo Mataloni. Anderson localization of entangled photons in an integrated quantum walk. *Nature Photonics*, 7(4):322–328, 2013.
- [25] Alberto Peruzzo, Mirko Lobino, Jonathan CF Matthews, Nobuyuki Matsuda, Alberto Politi, Konstantinos Poulios, Xiao-Qi Zhou, Yoav Lahini, Nur Ismail, Kerstin Wörhoff, et al. Quantum walks of correlated photons. *Science*, 329(5998):1500–1503, 2010.
- [26] Qi-Ping Su, Yu Zhang, Li Yu, Jia-Qi Zhou, Jin-Shuang Jin, Xiao-Qiang Xu, Shao-Jie Xiong, QingJun Xu, Zhe Sun, Kefei Chen, et al. Experimental demonstration of quantum walks with initial superposition states. *npj Quantum Information*, 5(1):40, 2019.
- [27] ARC Buarque, FS Passos, WS Dias, and EP Raposo. Discrete-time quantum walk dispersion control through long-range correlations. *Physical Review E*, 107(6):064139, 2023.
- [28] Rafael Vieira, Edgard PM Amorim, and Gustavo Rigolin. Dynamically disordered quantum walk as a maximal entanglement generator. *Physical review letters*, 111(18):180503, 2013.
- [29] Matthew A Broome, Alessandro Fedrizzi, Benjmain P Lanyon, Ivan Kassal, Alan Aspuru-Guzik, and Andrew G White. Discrete single-photon quantum walks with tunable decoherence. *Physical review letters*, 104(15):153602, 2010.
- [30] AM Jayannavar and N Kumar. Nondiffusive quantum transport in a dynamically disordered medium. *Physical Review Letters*, 48(8):553, 1982.
- [31] Gandhimohan M Viswanathan, Marcos GE Da Luz, Ernesto P Raposo, and H Eugene Stanley. *The physics of foraging: an introduction to random searches and biological encounters*. Cambridge University Press, 2011.
- [32] Leonard Mlodinow. *O andar do bêbado: como o acaso determina nossas vidas*. Editora Schwarcz-Companhia das Letras, 2009.
- [33] Tânia Tomé. *Dinâmica Estocástica e Irreversibilidade Vol. 35*. Edusp, 2001.
- [34] Édgar Roldán, Izaak Neri, Raphael Chetrite, Shamik Gupta, Simone Pigolotti, Frank Jülicher, and Ken Sekimoto. Martingales for physicists: a treatise on stochastic thermodynamics and beyond. *Advances in Physics*, 72(1-2):1–258, 2023.
- [35] Howard C Berg. *Random walks in biology*. Princeton University Press, 1993.
- [36] H Eugene Stanley and Rosario N Mantegna. *An introduction to econophysics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- [37] Renato Portugal. *Quantum walks and search algorithms*, volume 19. Springer, 2013.

- [38] Barry D Hughes. *Random walks and random environments*. Oxford University Press, 1996.
- [39] Frank Spitzer. *Principles of random walk*, volume 34. Springer Science & Business Media, 2001.
- [40] Peter W Shor. Proceedings of the 35th annual symposium on foundations of computer science. *IEE Computer society press, Santa Fe, NM*, 1994.
- [41] Rodrigo Caitano. Simulação de uma caminhada quântica para simetrias bosônica e fermiônica em redes desordenadas. Master's thesis, Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, Brasil, March 2019. Dissertação de Mestrado em Física Aplicada.
- [42] Alana Spak dos Santos. Emaranhamento em caminhadas quânticas. 2022.
- [43] Y Omar, N Paunković, L Sheridan, and S Bose. Quantum walk on a line with two entangled particles. *Physical Review A—Atomic, Molecular, and Optical Physics*, 74(4):042304, 2006.
- [44] JM Leinaas and J Myrheim. On the theory of identical particles. *Il nuovo cimento*, 37:132, 1977.
- [45] David Jeffrey Griffiths and Lara Freitas. *Mecânica quântica*. Pearson Prentice Hall, 2011.
- [46] Linda Sansoni. *Integrated devices for quantum information with polarization encoded qubits*. Springer, 2014.
- [47] Frank Wilczek. Quantum mechanics of fractional-spin particles. *Physical Review Letters*, 49(14):957, 1982.
- [48] John C Mauro and Morten M Smedskjaer. Statistical mechanics of glass. *Journal of non-crystalline solids*, 396:41–53, 2014.
- [49] Viv Kendon. Decoherence in quantum walks—a review. *Mathematical structures in computer science*, 17(6):1169–1220, 2007.
- [50] Liad Levi, Yevgeny Krivolapov, Shmuel Fishman, and Mordechai Segev. Hyper-transport of light and stochastic acceleration by evolving disorder. *Nature Physics*, 8(12):912–917, 2012.
- [51] Shlomo Havlin and Daniel Ben-Avraham. Diffusion in disordered media. *Advances in Physics*, 36(6):695–798, 1987.
- [52] Philip W Anderson. Absence of diffusion in certain random lattices. *Physical review*, 109(5):1492, 1958.
- [53] Diego Molinari and Andrea Fratalocchi. Route to strong localization of light: the role of disorder. *Optics Express*, 20, 2012.

- [54] Yue Yin, DE Katsanos, and SN Evangelou. Quantum walks on a random environment. *Physical Review A—Atomic, Molecular, and Optical Physics*, 77(2):022302, 2008.
- [55] Francesco De Nicola, Linda Sansoni, Andrea Crespi, Roberta Ramponi, Roberto Oselame, Vittorio Giovannetti, Rosario Fazio, Paolo Mataloni, and Fabio Sciarrino. Quantum simulation of bosonic-fermionic noninteracting particles in disordered systems via a quantum walk. *Physical Review A*, 89(3):032322, 2014.
- [56] Miklos Santha. Quantum walk based search algorithms. In *International Conference on Theory and Applications of Models of Computation*, pages 31–46. Springer, 2008.
- [57] Igor Emanuel Gonçalves de OLIVEIRA et al. Regimes de propagação anômalos para uma caminhada quântica com duas partículas emaranhadas. Master's thesis, Universidade Federal Rural de Pernambuco, 2023.