



Universidade Federal Rural de Pernambuco
Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação
Departamento de Física
Programa de Pós-Graduação em Física Aplicada

INTERAÇÃO DE DEFEITOS TOPOLÓGICOS LINEARES COM MATÉRIA ESCURA

Maria Franciely Freitas dos Santos

Dissertação de Mestrado
Recife-PE
Março de 2024

Universidade Federal Rural de Pernambuco
Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação
Departamento de Física
Programa de Pós-Graduação em Física Aplicada

Maria Franciely Freitas dos Santos

INTERAÇÃO DE DEFEITOS TOPOLÓGICOS LINEARES COM MATÉRIA ESCURA

Dissertação de mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física Aplicada do Departamento de Física da Universidade Federal Rural de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do grau de mestre em Física Aplicada.

Orientador: Prof. Dr. Antônio de Pádua Santos

Dissertação de Mestrado
Recife-PE
Março de 2024

Universidade Federal Rural de Pernambuco
Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação
Departamento de Física
Programa de Pós-Graduação em Física Aplicada

Maria Franciely Freitas dos Santos

INTERAÇÃO DE DEFEITOS TOPOLÓGICOS LINEARES COM MATÉRIA ESCURA

Dissertação de mestrado julgada adequada para
obtenção do título de mestre em Física Aplicada
e aprovada por unanimidade em 22 de março de
2024 pela comissão examinadora.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Antônio de Pádua Santos
Orientador - DF/UFRPE

Prof. Dr. Anderson Luiz da Rocha e Barbosa
Examinador Interno - DF/UFRPE

Prof. Dr. Alexandre Manoel de Moraes Carvalho
Examinador Externo - Instituto de Física/UFAL

Àqueles que irão transcorrer-se dentre as cordas que permeiam o Universo, e para aqueles que também um dia quiserem ser cientistas.

Agradecimentos

Realizar um mestrado era uma meta que estava presente no meu imaginário desde o meu primeiro ano da graduação. Não sabia como era, como podia entrar e se ao menos eu teria tal capacidade. Eram muitas questões para aquele tempo.

Apenas sei que nada disso seria tangível se minha mãe, Neves, não tivesse dado o suporte que precisei em todos os pontos de minha existência. Agradeço por ter me ouvido, observado e sobretudo, ter tido serenidade quando decidi escolher este caminho. Da mesma forma que comecei ao seu lado, agora o finalizo. Ao meu pai, Francisco, por ter me ensinado que a ignorância tem dois lados. E sobretudo, por ter me mostrado o que não devo fazer. A minha irmã, Joyce, pela amizade e apoio de tantos anos e também por me mostrar que família nem sempre é de sangue. Aos meus sogros, Jeanne e Sérgio, por estarem presentes e me apoiarem mesmo quando não ousei pedir.

Ao meu noivo, Arthur. O nosso romance é a minha história favorita. Obrigada por dividir este planeta, esta época e este Universo que existe entre nós. Obrigada por estar comigo em todas as minhas peças dessa aventura única que decidimos tentar desvendar. Somente, obrigada, meu bem.

Aos meus colegas de turma pela companhia e solicitude nas aulas hercúleas. Em especial ao meu amigo que fiz durante este mestrado, Nallyson, por as alegrias e preocupações divididas nesse período. Ao meu amigo Leandro, pelas gratificantes conversas de tantos anos, vencemos mais esta!

Ao meu professor, Dr. Antônio Carlos Miranda, pela torcida de sempre. Por me apresentar oportunidades e confiar no meu trabalho, e sobretudo, pelas estrelas dessa passagem.

Ao meu orientador, Dr. Antônio de Pádua Santos, por ser uma pessoa exemplar em minha formação humana e profissional. Sou imensamente grata por suas horas a tarde me ensinando e ajudando a estruturar colunas que não tive a oportunidade de erguer na graduação. Pelos cálculos que levaram eight days a week e também pelos incontáveis conselhos.

A todos que compõem a ciência brasileira, e que sobretudo, enxergam a beleza pelo que se é.

A Universidade Federal Rural de Pernambuco por oferecer oportunidade e estrutura para a minha capacitação. A Fundação de Amparo à Ciência e Tecnologia do Estado de Pernambuco pelo apoio financeiro.

I... a universe of atoms... an atom in the universe. (Richard Feymann)

Resumo

Neste trabalho iremos discutir os defeitos topológicos lineares minimamente acoplados com o campo gravitacional e interagindo com campos escalares. Buscamos compreender a influência da topologia das cordas cósmicas através do estudo da holonomia na interação com estes campos. Os defeitos topológicos surgem através da quebra espontânea de simetria, descritas a partir da teoria clássica de campos, cujas configurações do vácuo proporcionam soluções topologicamente estáveis e elegantes. Tais soluções são conhecidas como barreiras de domínios, monopolos, cordas cósmicas, entre outras. Nesta dissertação, estudaremos as cordas cósmicas. O principal interesse em buscar entender as cordas cósmicas dá-se pela sua influência na geometria do espaço-tempo, assim como também estarem associadas à emissão de ondas gravitacionais e aos raios cósmicos de alta energia. Neste estudo, vamos analisar a interação destes defeitos topológicos lineares com campos escalares, que podem ser substituídos por objetos astrofísicos, como matéria e energia escuras. Essas interações serão descritas através das equações de campos, caracterizadas a partir de um sistema de equações diferenciais.

Palavras-Chave: cordas cósmicas, defeitos topológicos lineares, teoria clássica de campos, teoria da relatividade geral

Abstract

In this work we will discuss linear topological defects minimally coupled with the gravitational field and interacting with scalar fields. We are looking for to understand the influence of the topology of cosmic strings through the study of holonomy in the interaction with these fields. Topological defects arise through spontaneous symmetry breaking, described from classical field theory, whose vacuum configurations provide topologically stable and elegant solutions. Such solutions are known as domain walls, monopoles, cosmic strings, among others. In this dissertation, we will study cosmic strings. The main interest in seeking to understand cosmic strings is due to their influence on the geometry of space-time, as well as their association with the emission of gravitational waves and high-energy cosmic rays. In this study, we will analyze the interaction of these linear topological defects with scalar fields, which can be replaced by astrophysical objects such as dark matter and dark energy. These interactions will be described through field equations, characterized from a system of differential equations.

Keywords: cosmic strings, linear topological defects, classical field theory, general relativity theory

Lista de Figuras

	Página
2.1 Exemplo de transporte paralelo	14
3.1 $\lambda < 0; \eta^2 > 0$	27
3.2 $\lambda = 0; \eta^2 < 0$	27
3.3 $\lambda > 0; \eta^2 < 0$	28
3.4 Exemplo do potencial "chapéu mexicano"	28

Sumário

	Página
1 Introdução	11
2 Teoria da Relatividade Geral	13
2.1 Geometria diferencial	13
2.1.1 Geodésicas	14
2.1.2 Tensor de Curvatura de Riemann	15
2.1.3 Tensor energia-momento	15
2.2 Teoria da Relatividade Geral	16
2.2.1 Formulação lagrangeana da Teoria da Relatividade Geral	16
2.2.2 Campos escalares	20
3 Transições de fase no contexto do Universo	22
3.1 Quebra espontânea de simetria	22
3.1.1 Transformações de gauge	23
3.1.2 Análise de potencial	26
3.2 Cordas cósmicas	30
3.2.1 Formação de cordas cósmicas no Universo primordial	31
3.2.2 Cordas locais	34
4 Interação de defeitos lineares com a matéria escura	36
4.1 Holonomia para Corda Cósmica Generalizada	37
4.2 Holonomia para Corda Cósmica em casos específicos	42
4.2.1 Equação de Klein-Gordon com Simetria Cilíndrica Generalizada	46
4.3 A matéria escura no contexto da gravitação	49
5 Conclusões	50
Referências Bibliográficas	51

Capítulo 1

Introdução

A cosmologia é o estudo do Universo como um todo, abrangendo sua origem, natureza, evolução e destino final. Atualmente, a astronomia, a astrofísica e a cosmologia são temas populares, impulsionados pelos avanços tecnológicos e pela coleta diária de uma vasta quantidade de dados. A partir desses avanços podemos seguir rumo ao desconhecido em busca de respostas para questões fundamentais sobre a origem, identidade e destino do Universo.

A maior parte dos estudos em cosmologia concentram-se nas áreas de física de partículas e astronomia observacional. A cosmologia relativística começa ao considerar a aplicação da Teoria da Relatividade Geral (TRG) ao Universo como um todo. Isso pressupõe que a matéria e a radiação estão contidas em um espaço-tempo quadridimensional, que pode ser descrito por um tensor métrico apropriado ou por um elemento linear da métrica do espaço-tempo. Essa métrica cósmica é definida através das soluções das equações de campo da relatividade geral.

A Teoria de Campos é um campo da física no qual descreve as interações entre objetos em termos de campos, onde suas quantidades físicas podem variar no espaço e no tempo. Neste trabalho, será utilizada para estudar a influência de cordas cósmicas não abelianas na geometria do espaço-tempo, levando em consideração o modelo não abeliano de Higgs acoplado à gravidade e utilizando equações diferenciais não lineares. Dessa forma, auxilia na compreensão do comportamento da matéria escura, suas interações e implicações de sua presença na estrutura e evolução do Universo [1]. Sendo fundamental para a modelagem das interações da matéria escura e as partículas do modelo cosmológico padrão [2], conhecido também como $\Lambda - CDM$.

As teorias de campo sustentam a possibilidade de compreender a matéria escura, pois fornecem estruturas para a descrição das interações e comportamentos das partículas deste objeto [3]. A matéria escura é estudada a partir das teorias de campo não relativísticas em uma temperatura finita. Apesar de não ter sua composição identificada, as teorias de campos dão suporte para a observação de que a matéria escura influencia os campos

gravitacionais, afetando o movimentos de galáxias e estrelas [4], podendo comparar com dados observacionais para a validação de sua existência.

As cordas cósmicas são objetos hipotéticos, cuja formação está associada diretamente ao Universo primitivo. Sendo defeitos topológicos, sua estrutura possivelmente surge durante as transições de fase, podendo ser definidas como remanescentes das primeiras eras do Universo. São descritas como cordas finitas de energia que podem estender-se ao longo do Universo com densidade e efeitos gravitacionais naturalmente tangíveis. Por sua vez, esses efeitos podem provocar distorções no espaço-tempo, levando a observação desses fenômenos, como as lentes gravitacionais. Além disso, permitem-se interagir com outros objetos celestes e produzir padrões na radiação cósmica de fundo em micro-ondas, tornando-se um potencial para comprovar a sua existência [?]. Assim as cordas cósmicas localizadas poderão ter seus efeitos incorporados por uma constante cosmológica e com o acoplamento gravitacional. Desse modo, será possível estudar as consequências da presença das cordas na geometria do espaço-tempo, podendo ser útil para a análise de métricas e comportamentos dos campos em diferentes parâmetros físicos [5].

Neste trabalho, exploraremos um dos objetos hipotéticos de grande relevância para o campo da cosmologia: as cordas cósmicas. Além disso, buscamos contribuir com esta pesquisa para a compreensão da interação desses defeitos topológicos com campos de natureza escalar. No capítulo 2, discutiremos as aplicações da teoria da relatividade geral no contexto da teoria de campos, com foco nas ferramentas matemáticas necessárias para o desenvolvimento lagrangeano, detalhando-as na seção 2.2. Em seguida, no capítulo 3, exploraremos as condições nas quais o Universo primordial se encontrava, com ênfase na discussão acerca das transições de fase e quebras espontâneas de simetria necessárias para justificar a presença das cordas cósmicas. O cerne do trabalho será exposto no capítulo 4, com a análise da interação dos defeitos lineares com a matéria escura. Começaremos com um caso generalizado, discutido posteriormente em [6], e em seguida, apresentaremos um caso específico que permita a utilização desse método para com quaisquer métrica.

Capítulo 2

Teoria da Relatividade Geral

Eu posso ver uma grande xícara de
café como um bom campo escalar...

Neste capítulo, discutiremos tópicos extremamente importantes para a construção da nossa compreensão acerca da aplicação das cordas cósmicas em contexto de campos escalares. De início, será apresentado alguns aspectos da geometria diferencial na seção 2.1, dentre eles, alguns tensores e como as geodésicas e o Princípio de Hamilton estão diretamente ligados a TRG. Em seguida, será posto uma breve introdução acerca da TRG e posteriormente, desenvolvida uma formulação de natureza lagrangeana da TRG na seção 2.2. Por fim, também será introduzido o conceito de campo escalar.

2.1 Geometria diferencial

A geometria diferencial é um ramo da matemática de bastante importância na construção de conceitos geométricos e topológicos, sendo fundamental para o desenvolvimento das teorias físicas contemporâneas, cujas aplicações são amplamente utilizadas na mecânica clássica, física de partículas elementares, dentre outros [7]. Neste trabalho, daremos ênfase à geometria riemanniana, que preocupa-se em estudar os espaços curvos, tornando-a extremamente relevante para a teoria da relatividade geral de Einstein. Dessa forma, pode-se observar que a interação entre a matéria e energia, integrada às mudanças na geometria do espaço-tempo podem ser representadas através da Equação de Campo de Einstein, conhecida também como “equações de campo”, onde elas descrevem o comportamento e as propriedades do campo gravitacional.

2.1.1 Geodésicas

As geodésicas devem ser entendidas como parte da natureza, visto que na relatividade geral elas serão fundamentais para que os corpos sigam suas trajetórias na ausência de forças [8]. Em um espaço plano, linhas retas são muito importantes. Uma linha pode representar a rota direta entre dois pontos e também a distância mais curta entre eles. Para o espaço riemanniano, as geodésicas são as análogas às linhas retas. Sendo assim, a geodésica é o caminho de comprimento mínimo. Partindo desse ponto, quando um vetor é transportado paralelamente de um ponto a outro quando sua direção e magnitude permanecem os mesmos. Logo, o transporte paralelo é realizado.

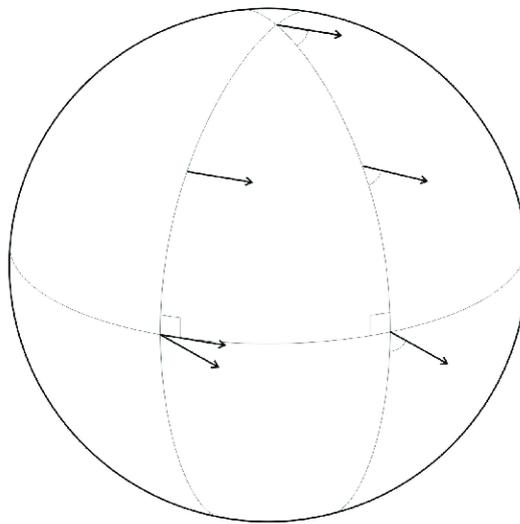


Figura 2.1: Exemplo de transporte paralelo

O vetor tangente em uma determinada curva $x^\alpha(\lambda)$ pode ser expresso por

$$\frac{dx^\alpha}{d\lambda}. \quad (2.1)$$

Ao realizar o transporte paralelo desse vetor, teremos

$$\frac{dx^\gamma}{d\lambda} \nabla_\gamma \frac{dx^\alpha}{d\lambda} = \frac{dx^\gamma}{d\lambda} \left(\frac{\partial}{\partial x^\gamma} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} + \Gamma_{\gamma\delta}^\alpha \frac{dx^\delta}{d\lambda} \right) = 0 \quad . \quad (2.2)$$

Dessa forma, obtemos a equação da geodésica [9]

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\lambda^2} + \Gamma_{\gamma\delta}^\alpha \frac{dx^\delta}{d\lambda} \frac{dx^\gamma}{d\lambda} = 0. \quad (2.3)$$

2.1.2 Tensor de Curvatura de Riemann

O Tensor de Curvatura de Riemann também é conhecido como tensor de curvatura ou tensor de Riemann-Christoffel. Ele é responsável por descrever as propriedades de curvatura presentes no espaço, que determinam a geometria do espaço-tempo [10]. Logo, ele descreve como a curvatura muda de ponto a ponto numa superfície em que cada componente representa essa curvatura em uma direção específica. Assim, é possível visualizar que o espaço esteja curvado em todas as direções. Portanto, o tensor de curvatura de Riemann permite compreender como a geometria do espaço influencia o movimento de objetos ao afetar as geodésicas em seus respectivos desvios.

Consequentemente, ao realizar o transporte de vetores paralelos à um circuito fechado, podem sofrer alterações, sendo estas relacionadas com a curva do espaço presente. A partir disso, os tensores atuam para definir o cálculo da curvatura [11] em questão. A expressão para a curvatura é dada por

$$R_{\mu\nu\lambda}{}^{\rho} = \partial_{\mu}\Gamma_{\nu\lambda}{}^{\rho} - \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\lambda}{}^{\rho} + \Gamma_{\sigma\mu}{}^{\rho}\Gamma_{\nu\lambda}{}^{\sigma} - \Gamma_{\sigma\nu}{}^{\rho}\Gamma_{\mu\lambda}{}^{\sigma}. \quad (2.4)$$

Além disso, ao contrair o tensor de Riemann, obtemos o tensor de Ricci, responsável por definir a curvatura [12]

$$R_{\mu\lambda} = R_{\mu\rho\lambda}{}^{\rho}. \quad (2.5)$$

E, ao contrair o tensor de Ricci pelo tensor métrico contravariante [10], obtemos o escalar de Ricci

$$R = g^{\mu\lambda}R_{\mu\lambda}. \quad (2.6)$$

2.1.3 Tensor energia-momento

O tensor energia-momento descreve a distribuição e fluxo de energia e momento em uma região do espaço-tempo. É um tensor do tipo rank 2, possui 16 componentes e usualmente é denotado por $T^{\mu\nu}$, onde $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$. Além disso, é um tensor simétrico, logo, $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$. Cada componente pode ser medido a partir de unidades de densidade de energia (Jm^{-3}), e é uma função das coordenadas do espaço-tempo com as seguintes definições:

T^{00} é a densidade local de energia, que inclui qualquer distribuição de massa-energia;
 $T^{0i} = T^{i0}$ é a taxa de fluxo de energia por unidade de área perpendicular aos ângulos em i -direção, dividido por c , ou, que são equivalentes a densidade da componente i do momento multiplicada por c ;

$T^{ij} = T^{ji}$ é a taxa de fluxo do componente i do momento por unidade de área em ângulo reto na direção j . Para um sistema físico descrito por uma densidade lagrangeana, temos que

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial_\nu\phi - g^{\mu\nu}L. \quad (2.7)$$

2.2 Teoria da Relatividade Geral

A Teoria da Relatividade Geral foi publicada por Albert Einstein (1879-1955) em 1915 após dez anos da publicação da Teoria da Relatividade Restrita. Esta que trazia a discussão, em resumo, sobre toda matéria presente no Universo causar uma curvatura ao espaço-tempo, que por consequência, gera um campo gravitacional. A partir do próprio princípio da Relatividade, é presumido que existem condições necessárias para deduzir as propriedades do campo gravitacional de forma puramente teórica.

A geometria do espaço-tempo será a chave para uma nova interpretação da gravitação. O universo dos eventos físicos foi denominado por Hermann Minkowski (1864-1909) como simplesmente “mundo”, que por natureza, é quadridimensional em termos de espaço-tempo, ou seja, três coordenadas espaciais (x,y,z) e uma temporal (t), o próprio tempo. É comum uma certa estranheza para perceber que o “mundo” funciona com as 4 dimensões em harmonia, afinal, vimos na física pré-relativística que o tempo tende a se comportar de forma mais “independente”. Ao admitirmos que a relatividade seja necessária para visualizar de forma realista como o Universo funciona, a visão de Minkowski torna-se fundamental para que percebamos que este mundo quadridimensional se comporta, aparentemente, como um objeto euclidiano tridimensional.

2.2.1 Formulação lagrangeana da Teoria da Relatividade Geral

As teorias fundamentais da física podem ser descritas a partir de princípios de ação. Posto a ação de Einstein-Hilbert

$$S_{EH} = \frac{1}{k} \int R\sqrt{-g}d^4x, \quad (2.8)$$

onde $\sqrt{-g}d^4x$ é o elemento invariante de hipervolume e a constante k pode ser deduzida pela aproximação de campos fracos, tal que

$$k = \frac{8\pi G}{c^4}, \quad (2.9)$$

em que G é a constante gravitacional de Newton e c a velocidade da luz. Lembrando que

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}, \quad (2.10)$$

Logo

$$S_{EH} = \frac{1}{k} \int (g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}) \sqrt{-g} d^4x. \quad (2.11)$$

Realizando a variação $g_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$, teremos que

$$\delta S_{EH} = \frac{1}{k} \int (g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta R_{\mu\nu} + R_{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \delta(\sqrt{-g})) d^4x. \quad (2.12)$$

Organizando em três grupos

$$\delta S_{EH} = \frac{1}{k} \int \delta(g^{\mu\nu}) R_{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x + \frac{1}{k} \int g^{\mu\nu} (\delta R_{\mu\nu}) \sqrt{-g} d^4x + \frac{1}{k} \int g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} (\delta \sqrt{-g}) d^4x. \quad (2.13)$$

Observe que δI_1 já está em termos de $\delta g^{\mu\nu}$. Posto isso, definiremos δI_2 e δI_3 .

Para δI_2 : Sendo o tensor de curvatura definido na eq. 2.4, a variação entre o tensor de curvatura e o coeficiente da conexão é equivalente, dessa forma, $\Gamma_{\mu\nu}^\sigma \rightarrow \Gamma_{\mu\nu}^\sigma + \delta \Gamma_{\mu\nu}^\sigma$. Considerando um sistema de coordenadas locais, de forma que um dado ponto P , teremos que $\Gamma_{\mu\nu}^\sigma(P) = 0$. Assim, $\delta \Gamma_{\mu,\rho}^\sigma = \partial_\nu (\delta \Gamma_{\mu\rho}^\sigma) - \partial_\rho (\delta \Gamma_{\mu\nu}^\sigma)$ e a derivada fica com o seguinte formato

$$\delta R_{\mu\nu\rho}^\sigma = D_\nu (\delta \Gamma_{\mu\ell}^\sigma) - D_\rho (\delta \Gamma_{\mu\nu}^\sigma). \quad (2.14)$$

Ao contrair σ com ρ e fazendo $\sigma \rightarrow \nu$, teremos o tensor de Ricci

$$\delta R_{\mu\nu} = D_\nu (\delta \Gamma_{\mu\sigma}^\sigma) - D_\sigma (\delta \Gamma_{\mu\nu}^\sigma). \quad (2.15)$$

Ao substituir em δI_2 , e considerando que a derivada covariante do tensor métrico seja nula, vamos obter

$$\delta I_2 = \frac{1}{k} \int [D_\nu (g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\sigma}^\sigma - g^{\mu\sigma} \delta \Gamma_{\mu\sigma}^\nu)] \sqrt{-g} d^4x. \quad (2.16)$$

Dessa forma, considerando δI_2 como uma integral de superfície do contorno $\partial\Omega$ e que a variação da métrica é anulada nesse contorno, podemos obter $\delta I_2 = 0$. Agora, para δI_3 , vamos considerar que $g = \det(g_{\mu\nu})$, tal que

$$g = \sum_{\mu} g_{\mu\nu} \tilde{g}^{\mu\nu}, \quad (2.17)$$

onde $\tilde{g}^{\mu\nu}$ é cofator de $g_{\mu\nu}$. Derivando g em relação ao tensor métrico

$$\frac{\partial g}{\partial g_{\mu\nu}} = \tilde{g}^{\mu\nu}, \quad (2.18)$$

e utilizando a notação de Einstein e multiplicando por $g^{\mu\rho} \rightarrow g^{\mu\nu} = gg^{\mu\nu}$ e substituindo em 2.18

$$\frac{\partial g}{\partial g_{\mu\nu}} = gg^{\mu\nu}. \quad (2.19)$$

Agora, fazendo a variação $\delta(\sqrt{-g})$ e substituindo em $\frac{\partial g}{\partial g_{\mu\nu}}$

$$\delta(\sqrt{-g}) = \frac{\partial(\sqrt{-g})}{\partial g_{\mu\nu}} \delta g_{\mu\nu} \Rightarrow \delta(\sqrt{-g}) = \frac{1}{2}(-g)^{-1/2} \frac{\partial(-g)}{\partial g_{\mu\nu}} \delta g_{\mu\nu}, \quad (2.20)$$

$$\delta(\sqrt{-g}) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{-g}} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}, \quad (2.21)$$

$$\delta(\sqrt{-g}) = \frac{1}{2} \frac{g}{\sqrt{-g}} (gg^{\mu\nu}) \delta g_{\mu\nu}, \quad (2.22)$$

$$\delta(\sqrt{-g}) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{-g}} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}, \quad (2.23)$$

$$\delta(\sqrt{-g}) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{-g}} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}, \quad (2.24)$$

$$\delta(\sqrt{-g}) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{-g}} \underbrace{\frac{\partial(g)}{\partial g_{\mu\nu} g g^{\mu\nu}}}_{\delta g_{\mu\nu}} \delta g_{\mu\nu}, \quad (2.25)$$

$$\delta(\sqrt{-g}) = \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}. \quad (2.26)$$

Mas $\delta(g_{\mu\nu} g^{\mu\nu}) = 0$ em que a variação de um invariante é nula, $g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} = 0 \Rightarrow g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}$ logo

$$\delta(\sqrt{-g}) = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \quad (2.27)$$

Substituindo em $\delta I_3 = \frac{1}{k} \int g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} (\delta\sqrt{-g}) d^4x$,

$$\delta I_3 = \frac{1}{k} \int \underbrace{g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}}_R \left[-\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \right] d^4x, \quad (2.28)$$

$$\delta I_3 = \frac{1}{k} \int \left(-\frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x. \quad (2.29)$$

Substituindo δI_1 , δI_2 e δI_3

$$\delta S_{EH} = \frac{1}{k} \int \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right) \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x. \quad (2.30)$$

Sabendo que o Princípio de Hamilton considera $\delta S_{EH} = 0$, podemos definir a Equação de Einstein no vácuo

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 0. \quad (2.31)$$

O tensor de Einstein pode ser definido como

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R. \quad (2.32)$$

Através da ação de matéria, podemos considerar um campo escalar real $\phi(x^\mu)$ definido em todo espaço-tempo, tal que o lagrangeano é dado por

$$\mathcal{L}_M = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (\partial_\mu \phi)(\partial_\nu \phi) - V(\phi). \quad (2.33)$$

Dessa forma, a ação correspondente é

$$S_M = \int \left[\frac{1}{2} g^{\mu\nu} (\partial_\mu \phi)(\partial_\nu \phi) - V(\phi) \right] \sqrt{-g} d^4x. \quad (2.34)$$

Usando o Princípio de Hamilton $\delta S_M = 0$

$$\delta S_M = \int \left[\frac{1}{2} (\delta g^{\mu\nu}) (\partial_\mu \phi)(\partial_\nu \phi) \right] \sqrt{-g} + \left[\frac{1}{2} g^{\mu\nu} (\partial_{\mu\nu} \phi) - V(\phi) \right] \delta(-g) \partial^4x, \quad (2.35)$$

mas vimos que $\delta(\sqrt{-g}) = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}$, então

$$\delta S_M = \int \left\{ \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)(\partial_\nu \phi) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \left[\frac{1}{2} g^{\mu\nu} (\partial_\mu \phi)(\partial_\nu \phi) - V(\phi) \right] \right\} \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x. \quad (2.36)$$

Definindo o tensor momento-energia

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad (2.37)$$

logo, da equação δS_M acima, temos que

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)(\partial_\nu \phi) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \frac{1}{2} [g^{\mu\nu} (\partial_\mu \phi)(\partial_\nu \phi)] \sqrt{-g}, \quad (2.38)$$

$$T_{\mu\nu} = (\partial_\mu \phi)(\partial_\nu \phi) - g_{\mu\nu} \left[\frac{1}{2} (\partial_\nu \phi)(\partial^\nu \phi) - V(\phi) \right]. \quad (2.39)$$

Tal que

$$T_{\mu\nu} = (\partial_\mu\phi)(\partial_\nu\phi) - g_{\mu\nu}\mathcal{L}_M. \quad (2.40)$$

Por fim, para o campo gravitacional, temos a ação formada pela ação de Einstein-Hilbert somado à ação do campo de matéria

$$S = \frac{1}{k}S_{EH} + S_M, \quad (2.41)$$

então, utilizando o Princípio de Hamilton

$$\frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = 0 \Rightarrow \frac{1}{k} \frac{\delta S_{EH}}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}} = 0, \quad (2.42)$$

definindo, $G_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_{EH}}{\delta g^{\mu\nu}}$ e $T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}}$ temos

$$-\frac{\sqrt{g}G_{\mu\nu}}{2k} + \frac{\sqrt{-g}}{2}T_{\mu\nu} = 0 \Rightarrow G_{\mu\nu} = kT_{\mu\nu}. \quad (2.43)$$

Como $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$, então obtemos a equação de campo de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = kT_{\mu\nu}. \quad (2.44)$$

Após as publicações de Einstein, Minkowski apresentou uma solução, de modo que generalizasse o espaço-tempo euclidiano plano. As equações de campo são dinâmicas, isso contrariava o que a comunidade científica pensava: que o Universo era estático. Dessa forma, Einstein precisou modificar as equações originais da TRG para introduzir um termo remissivo com a função de opor o efeito da gravidade, sendo chamada de constante cosmológica

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + g_{\mu\nu}\Lambda = kT_{\mu\nu}, \quad (2.45)$$

onde $R_{\mu\nu}$ é o tensor de curvatura de Ricci, $g_{\mu\nu}$ é o tensor métrico, R é o escalar de curvatura e Λ a constante cosmológica.

2.2.2 Campos escalares

Na teoria de campos, o campo escalar real pode ser definido como uma função real do quadrivetor $x^\mu = (t, \vec{x})$ [13] no espaço de Minkowski. Para somente um campo,

$\phi = \phi(x^\mu)$. Para dimensões superiores, denotamos esta ação como

$$S = \int d^{D+1}x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi), \quad (2.46)$$

onde a densidade do lagrangeano \mathcal{L} é uma função do campo e de suas derivadas [13], além disso, $D = 3$. A dinâmica dos campos dessa natureza são analisadas a partir dessa densidade

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi), \quad (2.47)$$

onde $V(\phi)$ é o potencial que depende do sistema físico estudado.

Capítulo 3

Transições de fase no contexto do Universo

Nossa compreensão acerca do Universo baseia-se essencialmente no modelo cosmológico padrão, conhecido como Λ -CDM, cuja descrição concorda com a Teoria do Big Bang. Segundo esse modelo, inicialmente o Universo possuía elevadas temperaturas e ao longo do tempo foi se expandindo e esfriando rapidamente, sofrendo uma série de transições de fase caracterizadas pelas quebras espontâneas de simetria.

A partir disso, um mecanismo foi proposto por Tom Kibble em 1976 (Mecanismo de Kibble), e ocorre quando um campo passa por uma transição de fase, diferentes estados de vácuo surgem em diversas regiões do espaço. Os limites entre essas regiões são responsáveis pela formação dos defeitos topológicos [14]. Estes defeitos são apresentados nas teorias clássicas de campos, onde suas soluções possuem diversas consequências físicas. Dentre tais soluções, temos as cordas cósmicas, paredes de domínio, monopolos, dentre outras.

Quando ocorrem as transições de fase, muitos eventos em diversos pontos e em momentos diferentes surgem. À medida em que estes acontecimentos se encontram, os defeitos topológicos são detectados [15]. É neste momento que conhecemos os primeiros segundos após o Big Bang em detalhes, e se não existissem, a física moderna precisaria passar por muitas reconsiderações.

3.1 Quebra espontânea de simetria

As transições de fase são acontecimentos importantes do Universo, visto que surgem nos primeiros instantes após o Big Bang [16]. Elas podem ser caracterizadas como uma insólita mudança das propriedades físicas, visto que podem ser deduzidas a partir da teoria de grupos e simetrias, de modo que influenciam diretamente na evolução e expansão (inclusive no período inflacionário) do Universo [17].

Na física, a simetria é aplicada através do teorema de Noether, que estabelece em cada simetria contínua em um sistema físico uma lei de conservação correspondente [13]. Além disso, na teoria de campos, um dos mecanismos da quebra de simetria mais relevantes é a partir da formação de massa no campo.

A simetria define a invariância de um sistema físico em relação às transformações de coordenadas ou de um espaço interno, sendo representado através de um grupo de simetria [5]. Em geral, na Teoria de Campos, os sistemas físicos são definidos a partir da densidade do lagrangeano. Dessa forma, as propriedades simétricas são compreendidas através da invariância da densidade do lagrangeano do sistema estudado. Assim, entender a simetria traz significado sobre as causas da quebra de invariância da densidade do lagrangeano no que se refere às transformações no qual o sistema é posto.

A quebra espontânea de simetria está diretamente envolvida com as transições de fases. Logo, quando um sistema apresenta múltiplos estados de vácuo, ele consegue ter uma evolução aleatória para qualquer um destes estados no que caracteriza a quebra espontânea da simetria do sistema. Para facilitar a compreensão, vamos considerar a densidade do lagrangeano \mathcal{L} para um campo escalar complexo

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi)^* - V(\phi), \quad (3.1)$$

no qual o potencial $V(\phi)$ é definido como

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{4}(\phi^* \phi - \eta^2)^2, \quad (3.2)$$

onde λ e η são constantes e a densidade de lagrangiano (3.1) é invariante por uma transformação de gauge global, descrita pelo grupo de simetria $U(1)$

$$\phi'(x) \rightarrow e^{i\alpha} \phi(x), \quad (3.3)$$

na qual α é uma constante.

3.1.1 Transformações de gauge

As transformações de gauge (calibre) originam-se no eletromagnetismo, onde os potenciais escalar e vetorial são modificados sem que as equações de campo sejam alteradas. Na teoria de campos, podemos considerar estas transformações nos campos em que a densidade do lagrangeano seja invariante.

Assim, o sistema descrito através da equação de Klein-Gordon possui duas perspectivas, onde uma convém na formação das cordas cósmicas, na quebra espontânea de simetria, e a outra, com uma métrica generalizada para a corda, em que outro campo de Klein-Gordon deve ser considerado para descrever a matéria escura (hipótese).

Dessa forma, através do teorema de Goldstone, o campo de gauge adquire massa, e permite o surgimento do processo da quebra de simetria. Sendo a densidade do lagrangeano de Klein-Gordon para um campo complexo dado por

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi^*) (\partial^\mu \phi) - m^2 \phi^* \phi, \quad (3.4)$$

em que uma transformação unitária U , que não dependa das coordenadas do espaço-tempo, aplicada aos campos, leva a

$$\begin{aligned} \phi &\rightarrow U\phi, \\ \phi^* &\rightarrow U^*\phi^*, \end{aligned} \quad (3.5)$$

Por U ser uma transformação unitária, temos que

$$UU^* = U^*U = 1, \quad (3.6)$$

substituindo na eq. 3.4

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu U^* \phi^*) (\partial^\mu U \phi) - m^2 (U^* \phi^*) (U \phi). \quad (3.7)$$

Sendo que U e U^* não dependem das coordenadas do espaço-tempo, assim, as derivadas atuam apenas em ϕ e ϕ^* . Desse modo,

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi^*) \underbrace{U^* U}_1 (\partial^\mu \phi) - m^2 \phi^* \underbrace{U^* U}_1, \quad (3.8)$$

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi^*) (\partial^\mu \phi) - m^2 \phi^* \phi. \quad (3.9)$$

Assim, temos a densidade do lagrangeano apresentado na equação 3.4. Definindo U como uma constante, podemos escrever

$$U = e^{i\alpha}, \quad (3.10)$$

em que α é uma constante. Por U não depender das coordenadas do espaço-tempo, pode-se afirmar que esta é uma transformação de gauge global. No entanto, para satisfazer as condições da Teoria da Relatividade Especial, estas transformações precisam ser dependentes das coordenadas do espaço-tempo. Portanto, vamos considerá-la como uma transformação de gauge local, de modo que queremos

$$U = U(x) \text{ tal que } \phi \rightarrow U(x)\phi, \quad (3.11)$$

$$\phi^* \rightarrow U^*(x)\phi^*, \quad (3.12)$$

ao substituir no lagrangeano da eq (3.9), temos

$$\mathcal{L} = [\partial_\mu (U^*(x)\phi^*)] [\partial^\mu (U(x)\phi)] - m^2 U^*(x)\phi^* U(x)\phi \quad (3.13)$$

Agora, vamos analisar de forma isolada o seu segundo termo

$$m^2 U^*(x)\phi^* U(x)\phi = m^2 \underbrace{\phi^*}_1 \underbrace{U^*(x)U(x)}_1 \Rightarrow m^2 \phi^* \phi \Rightarrow \text{Invariante}. \quad (3.14)$$

Para o termo cinético, podemos explorar a derivada da seguinte forma

$$\partial_\mu \phi \rightarrow \partial_\mu (U(x)\phi) = (\partial_\mu U(x)) \phi + U(x) \partial_\mu \phi. \quad (3.15)$$

Como U é uma transformação unitária, iremos multiplicar o primeiro termo por $UU^* = 1$ (correspondente a identidade), assim

$$\begin{aligned} \partial_\mu (U\phi) &= (\partial_\mu U) \phi + U (\partial_\mu \phi), \\ \partial_\mu (U\phi) &= UU^* (\partial_\mu U) \phi + U (\partial_\mu \phi), \\ \partial_\mu (U\phi) &= U [(U^* \partial_\mu U) \phi + \partial_\mu \phi], \end{aligned} \quad (3.16)$$

podendo ser escrito também

$$\partial_\mu (U\phi) = U [\partial_\mu \phi + (U^* \partial_\mu U) \phi]. \quad (3.17)$$

Para manter o lagrangeano invariante, o termo $U^* \partial_\mu U$ deve ser retirado. Para isso, vamos considerar um campo dependente da posição do espaço-tempo $A_\mu(x)$ chamado de potencial de gauge, dessa forma, definindo a derivada covariante como

$$D_\mu \phi = \partial_\mu \phi - iA_\mu \phi. \quad (3.18)$$

Para uma transformação de gauge local, iremos utilizar a derivada covariante

$$\begin{aligned} (\partial_\mu U^* \phi^*) &\rightarrow (D_\mu \phi^*) U^*, \\ (\partial^\mu U \phi) &\rightarrow U (D^\mu \phi), \end{aligned} \quad (3.19)$$

tal que

$$(\partial_\mu U^* \phi^*) (\partial^\mu U \phi) \rightarrow (D_\mu \phi^*) \underbrace{U^* U}_1 (D^\mu \phi). \quad (3.20)$$

Utilizando a eq 3.12, temos a invariância do lagrangeano

$$\mathcal{L} = [\partial_\mu (U^*(x)\phi^*)] [\partial^\mu (U(x)\phi)] - m^2 \underbrace{U^*(x)\phi^*U(x)\phi}_1, \quad (3.21)$$

$$\mathcal{L} = (D_\mu\phi^*) (D^\mu\phi) - m^2\phi^*\phi, \quad (3.22)$$

diante disso, podemos concluir que \mathcal{L} é invariante.

3.1.2 Análise de potencial

Para o caso particular deste trabalho, lidaremos com o seguinte potencial onde o campo complexo é representado em termos de suas componentes reais e imaginárias.

Como vimos na teoria de campos, o campo escalar real pode ser definido como uma função real do quadrivetor $x^\mu = (t, \vec{x})$ [13] no espaço de Minkowski. Para somente um campo, $\phi = \phi(x^\mu)$, em mais de uma dimensão, denotamos esta ação como

$$S = \int d^{D+1}x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi), \quad (3.23)$$

onde a densidade lagrangeana \mathcal{L} é uma função do campo e de suas derivadas [13], além disso, $D = 3$. A dinâmica dos campos dessa natureza são analisadas a partir dessa densidade

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - V(\phi), \quad (3.24)$$

onde $V(\phi)$ é o potencial que depende do sistema físico estudado. Seguindo esse princípio, vamos analisar o potencial a partir das considerações feitas no subtópico anterior. Considere o lagrangeano de Klein-Gordon como

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu\phi)^*(\partial^\mu\phi) - V(\phi^*, \phi), \quad (3.25)$$

onde $V(\phi^*, \phi) = m^2\phi^*\phi + \lambda(\phi^*\phi)^2$. Usando a equação de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^*} - \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^*)} \right) = 0, \quad (3.26)$$

$$\partial_\mu\partial^\mu\phi + m^2\phi = -2\lambda\phi(\phi^*, \phi), \quad (3.27)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^*} = -m^2\phi - 2\lambda\phi(\phi^*\phi)^2 \\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^*)} = \partial^\mu\phi \end{cases}. \quad (3.28)$$

Dessa forma, nos deparamos com os seguintes potenciais [18], os quais originaram-se nas flutuações quânticas. A partir de determinados valores das constantes, o potencial pode

se caracterizar como uma parábola com um mínimo global, correspondente a um vácuo, ou ter dois mínimos (dois vácuos) e um ponto de equilíbrio instável, que podemos denominar como falso vácuo. No último caso, quando encontra-se no ponto de instabilidade, o sistema pode evoluir para qualquer um destes mínimos (sabendo-se que os vácuos que correspondem à mais baixa energia do sistema). Logo, em 3 dimensões, o potencial será um chapéu mexicano (Figura 3.4).

i) $\lambda < 0$ e $\eta^2 > 0$

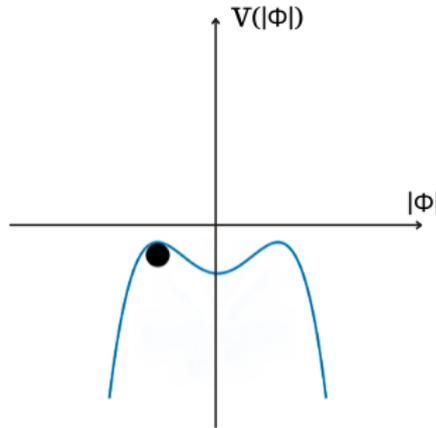


Figura 3.1: $\lambda < 0$; $\eta^2 > 0$

Analisando o primeiro potencial, vemos que ele não é fisicamente aceitável.

ii) $\lambda = 0$ e $\eta^2 < 0$

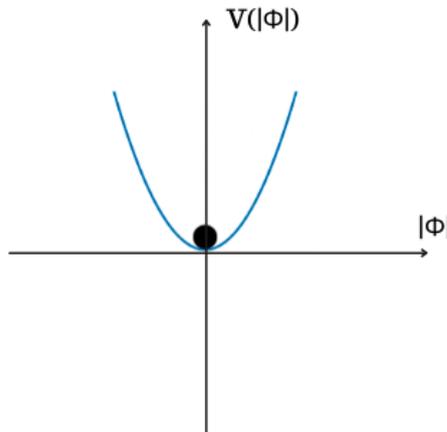


Figura 3.2: $\lambda = 0$; $\eta^2 < 0$

Neste segundo caso, o estado de vácuo $\langle \phi \rangle_0 = 0$.

iii) $\lambda > 0$ e $\eta^2 < 0$

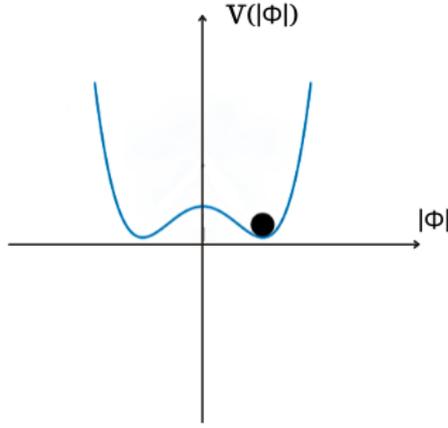


Figura 3.3: $\lambda > 0$; $\eta^2 < 0$

Finalmente, este caso apresenta quebra espontânea de simetria de gauge. Onde η pode ser negativo. Assim, a situação iii) é a que nos interessa. Representando o campo complexo em termos de suas componentes real e imaginária, temos o potencial abaixo, conhecido como "potencial chapéu mexicano".

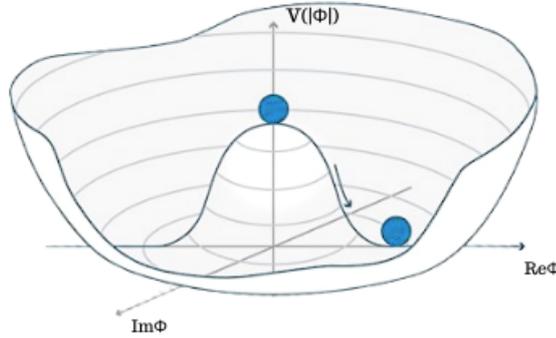


Figura 3.4: Exemplo do potencial "chapéu mexicano"

No caso global, a quebra espontânea de simetria é realizada a partir da introdução de um campo de gauge A_μ . Dessa forma, todas as derivadas ∂_μ dos campos são substituídas pelas derivadas covariantes D_μ . Portanto

$$\partial_\mu \phi \rightarrow D_\mu \phi = \partial_\mu \phi + iqA_\mu \phi, \quad (3.29)$$

no qual q é a carga do campo de gauge A_μ . Assim, A_μ age como um campo compensador, fazendo com que a densidade do lagrangeano permaneça invariante.

Logo, vamos denotar o campo de gauge a partir do eletromagnetismo, de modo que sua intensidade seja posta como o tensor de campo $F_{\mu\nu}$ que é o resultado da formulação covariante do eletromagnetismo. É um tensor de natureza antissimétrica, e descreve o campo eletromagnético como uma matriz cujos componentes fora da diagonal são pertencentes aos campos elétrico e magnético. Nesse sentido, as equações de Maxwell podem

ser reescritas de forma concisa, precisamente para duas equações covariantes. Ou seja, isso possibilita que as equações sejam reescritas para qualquer observador inercial, e que também possam ser obtidas a partir das derivadas do tensor de campo $F_{\mu\nu}$ [19]

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (3.30)$$

Para isto, consideremos aplicar uma transformação de gauge local $U(x) = e^{i\Lambda(x)}\phi(x)$, sendo $\phi \equiv \phi(x)$. Por consequência, $\partial_\mu \phi' = e^{i\Lambda(x)}(\partial_\mu \phi + i\partial_\mu \Lambda(x)\phi)$. Usando a derivada covariante D_μ no lugar da derivada ordinária ∂_μ ao fazer a transformação de gauge $U(1)$, onde $\phi' \rightarrow e^{i\Lambda(x)}\phi$, temos que

$$D_\mu \phi = (\partial_\mu + ieA_\mu) e^{i\Lambda(x)} \phi(x), \quad (3.31)$$

$$D'_\mu \phi' = \partial_\mu \left(e^{i\Lambda(x)} \phi \right) + ieA'_\mu e^{i\Lambda(x)} \phi, \quad (3.32)$$

$$D'_\mu \phi' = i(\partial_\mu \Lambda(x)) e^{i\Lambda(x)} \phi + e^{i\Lambda(x)} \partial_\mu \phi + ieA'_\mu e^{i\Lambda(x)} \phi, \quad (3.33)$$

$$D_{\mu'} \phi' = e^{i\Lambda(x)} (i\partial_\mu \Lambda(x)\phi + \partial_\mu \phi + ieA'_\mu \phi), \quad (3.34)$$

$$D_{\mu'} \phi' = e^{i\Lambda(x)} (\partial_\mu \phi + ieA'_\mu \phi + i\partial_\mu \Lambda(x)\phi). \quad (3.35)$$

Para que $D'_\mu \phi'$ seja igual a $D_\mu \phi$ teremos que impor a seguinte condição

$$\begin{aligned} A'_\mu + \partial_\mu \Lambda(x) &= eA_\mu, \\ \text{logo, } A'_\mu &= A_\mu - \frac{1}{e} \partial_\mu \Lambda(x). \end{aligned} \quad (3.36)$$

Substituindo a eq. 3.33 na eq 3.32, temos

$$D'_\mu \phi' = e^{i\Lambda(x)} \left[\partial_\mu \phi + ie \left(A_\mu - \frac{1}{e} \partial_\mu \Lambda(x) \right) \phi + i\partial_\mu \Lambda(x)\phi \right], \quad (3.37)$$

$$D'_\mu \phi' = e^{i\Lambda(x)} (\partial_\mu \phi + ieA_\mu \phi), \quad (3.38)$$

$$D'_\mu \phi' = e^{i\Lambda(x)} D_\mu \phi. \quad (3.39)$$

Vimos que utilizando o campo de gauge como um campo compensador é possível realizar uma transformação de gauge do tipo abeliana com simetria $U(1)$ dada por $e^{i\Lambda(x)}$, em que Λ ¹ depende das coordenadas do espaço-tempo. Ou seja, uma transformação de gauge local. Por conseguinte, para o tensor intensidade de campo $F_{\mu\nu}$, teremos

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (3.40)$$

¹Aqui Λ é uma constante de acoplamento, não confundir com a constante cosmológica.

da mesma forma que $F_{\mu\nu} \rightarrow F'_{\mu\nu}$

$$F'_{\mu\nu} = \partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu, \quad (3.41)$$

$$F'_{\mu\nu} = \partial_\mu \left(A'_\nu - \frac{1}{e} \partial_\nu \Lambda(x) \right) - \partial_\nu \left(A'_\mu - \frac{1}{e} \partial_\mu \Lambda(x) \right), \quad (3.42)$$

$$F'_{\mu\nu} = \partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu = F_{\mu\nu}. \quad (3.43)$$

A partir disso, podemos concluir que as grandezas invariantes de Lorentz são do tipo $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$. Portanto, através delas é possível confirmar que o campo compensador é o mesmo que o campo eletromagnético. No caso local, é preciso considerar a existência do campo de gauge, de modo que a densidade do lagrangeano seja formado pela sua densidade no campo escalar e eletromagnético. Ou seja

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_S + \mathcal{L}_{EL}, \quad (3.44)$$

onde

$$\mathcal{L} = (D_\mu \phi) * (D_\mu \phi) - m^2 \phi * \phi, \quad (3.45)$$

e

$$\mathcal{L}_{EL} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (3.46)$$

Portanto,

$$\mathcal{L} = (D_\mu \phi) * (D^\mu \phi) - m^2 \phi * \phi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (3.47)$$

onde

$$(D_\mu \phi) * \equiv D_\mu * \phi. \quad (3.48)$$

Conclui-se que as equações de campo para a densidade do lagrangeano denotados na equação 3.44 são determinadas através da equação de Euler-Lagrange.

3.2 Cordas cósmicas

As teorias de gauge, também conhecidas como teorias de calibre, descrevem as interações entre partículas nos termos de simetrias matemáticas. De forma que estão presentes na invariância das leis físicas em certas circunstâncias de transformações de

campo do tipo global. Sendo assim, nas cordas cósmicas são usadas para explicar como estas interagem, tornando-se uma importante peça na compreensão entre essas interações em conjunto a outros campos. O modelo de corda cósmica apresentado neste trabalho é gerado através de vórtices abelianos de Nielsen-Olesen acoplado às equações de Einstein e descrito pelo sistema [5]

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{16\pi G} R + \mathcal{L}_m \right), \quad (3.49)$$

onde R é o escalar de Ricci, G a constante gravitacional de Newton e \mathcal{L} representa a densidade do lagrangeano de matéria pelo modelo de Higgs não-abeliano.

As cordas cósmicas são os tipos de defeitos topológicos mais estudados, em ambos campos da cosmologia e da física da matéria condensada [15]. São objetos inteiramente hipotéticos e apesar de serem extremamente finos, suas dimensões percorrem vastas distâncias no Universo, sendo suficientemente massivos para causar efeitos gravitacionais [20]. Estes objetos são descritos a partir do lagrangeano

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} |D_\mu \phi|^2 - \frac{\lambda}{4!} (|\phi|^2 - \eta^2)^2, \quad (3.50)$$

em que $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, nos quais A_ν é o campo de gauge, $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$ a derivada covariante, e e , a constante de acoplamento. Este lagrangeano é invariante sob a ação do grupo Abelian $G = U(1)$.

3.2.1 Formação de cordas cósmicas no Universo primordial

A maior parte dos testes observacionais para a análise das cordas cósmicas origina-se a partir de suas interações gravitacionais [15]. Curiosamente, as cordas sofrem atrações newtonianas de primeira ordem, embora o campo gravitacional ao seu redor seja bastante atípico, no qual o espaço-tempo torna-se assintoticamente plano. Isso acontece porque a tensão e a energia por unidade de comprimento são iguais, mas a tensão pode agir como uma fonte negativa no campo gravitacional [20]. Diante disso, teremos uma métrica tipo minkowskiana que poderá ser encontrada através da solução das equações de campo de Einstein [21] e com simetria cilíndrica

$$ds^2 = A^2(\rho) dt^2 - d\rho^2 - C^2(\rho) d\theta^2 - A^2(\rho) dz^2, \quad (3.51)$$

com um tensor energia-momento

$$T_\nu^\mu = \sigma(\rho) \text{diag}(1, 0, 0, 1). \quad (3.52)$$

Os tensores de Ricci podem ser obtidos através de geometria diferencial, conforme visto no capítulo 2, tal que

$$R_t^t = R_z^z = \frac{1}{A(\rho)} \frac{d^2 A(\rho)}{d\rho^2} + \frac{1}{A(\rho)C(\rho)} \frac{dA(\rho)}{d\rho} \frac{dC(\rho)}{d\rho} + \frac{1}{A^2(\rho)} \left(\frac{dA(\rho)}{d\rho} \right)^2, \quad (3.53)$$

$$R_\rho^\rho = \frac{2}{A(\rho)} \frac{d^2 A(\rho)}{d\rho^2} + \frac{1}{C(\rho)} \frac{dC^2(\rho)}{d\rho^2}, \quad (3.54)$$

$$R_\theta^\theta = \frac{1}{C(\rho)} \frac{d^2 c(\rho)}{d\rho^2} + \frac{2}{A(\rho)C(\rho)} \frac{dA(\rho)}{d\rho} \frac{dC(\rho)}{d\rho}. \quad (3.55)$$

Em que escrevemos a equação de Einstein na forma

$$R_\mu^\nu = 8\pi G \left(T_\mu^\nu - \frac{1}{2} g_\mu^\nu T \right), \quad (3.56)$$

$$\text{no qual } T = T_t^t + T_\rho^\rho + T_\theta^\theta + T_z^z = \sigma + 0 + 0 + \sigma = 2\sigma, \quad (3.57)$$

$$R_t^t = 8\pi G \left(T_t^t - \frac{1}{2} g_t^t T \right), \quad (3.58)$$

$$g_t^t = g^{t\alpha} g_{\alpha t} = g^{tt} g_{tt} + g^{t\rho} g_{\rho t} + g^{t\theta} g_{\theta t} + g^{zz} g_{zz} = 1, \quad (3.59)$$

$$g_\rho^\rho = g^{\rho\alpha} g_{\alpha\rho} = g^{\rho t} g_{t\rho} + g^{\rho\rho} g_{\rho\rho} + g^{\rho\theta} g_{\theta\rho} + g^{\rho z} g_{z\rho} = 1, \quad (3.60)$$

$$g_\theta^\theta = g^{\theta\alpha} g_{\alpha\theta} = g^{\theta t} g_{t\theta} + g^{\theta\rho} g_{\rho\theta} + g^{\theta\theta} g_{\theta\theta} + g^{\theta z} g_{z\theta} = 1, \quad (3.61)$$

$$g_z^z = g^{z\alpha} g_{\alpha z} = g^{zt} g_{tz} + g^{z\rho} g_{\rho z} + g^{z\theta} g_{\theta z} + g^{zz} g_{zz} = 1. \quad (3.62)$$

De tal maneira

$$R_t^t = 8\pi G \left(T_t^t - \frac{1}{2} g_t^t T \right) = 0, \quad (3.63)$$

$$R_\rho^\rho = 8\pi G \left(T_\rho^\rho - \frac{1}{2} g_\rho^\rho T \right) = -8\pi G \sigma, \quad (3.64)$$

$$R_\theta^\theta = 8\pi G \left(T_\theta^\theta - \frac{1}{2} g_\theta^\theta T \right) = 8\pi G \sigma, \quad (3.65)$$

$$R_z^z = 8\pi G \left(\sigma - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2\sigma \right) = 0. \quad (3.66)$$

Ao utilizar o software de computação simbólica *Maple* e considerando $R_\mu^\nu = g^{\mu\alpha} R_{\alpha\nu}$, temos que

$$\frac{1}{A} \frac{d^2 A}{d\rho^2} + \frac{1}{AC} \frac{dA}{d\rho} \frac{dC}{d\rho} + \frac{1}{A^2} \left(\frac{dA}{d\rho} \right)^2 = 0, \quad (3.67)$$

$$\frac{2}{A} \frac{d^2 A}{d\rho^2} + \frac{1}{C} \frac{d^2 C}{d\rho^2} = -8\pi G\sigma, \quad (3.68)$$

$$\frac{1}{C} \frac{d^2 C}{d\rho^2} + \frac{2}{AC} \frac{dA}{d\rho} \frac{dC}{d\rho} = -8\pi G\sigma, \quad (3.69)$$

onde σ é a densidade de energia. A partir da conservação do tensor energia-momento

$$\nabla_\mu T_\nu^\mu = 0 \Rightarrow \frac{\partial T_\nu^\mu}{\partial x^\mu} + \Gamma_{\mu\alpha}^\mu T_\nu^\alpha - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha T_\alpha^\mu = 0, \quad (3.70)$$

$$\frac{\partial \Gamma_1^0}{\partial t} + \Gamma_{00}^0 \Gamma_1^0 - \Gamma_{01}^0 T_0^0 = 0, \quad (3.71)$$

mas $\Gamma_{01}^0 \rightarrow T_{t\rho}^t = \frac{1}{A} \frac{dA}{d\rho}$ e $T_0^0 = \sigma$, logo,

$$\frac{1}{A} \frac{dA}{d\rho} \cdot \sigma = 0 \Rightarrow \frac{1}{A} \frac{dA}{d\rho} = 0. \quad (3.72)$$

Como $A \neq 0 \Rightarrow \frac{dA}{d\rho} = 0$ e sendo uma constante

$$\frac{1}{C} \frac{d^2 C}{d\rho^2} + \frac{2}{AC} \frac{dA}{d\rho} \frac{dC}{d\rho} = -8\pi G\sigma, \quad (3.73)$$

$$\frac{1}{C} \frac{d^2 C}{d\rho^2} = -8\pi G\sigma, \quad (3.74)$$

$$\sigma = -\frac{1}{8\pi GC} \frac{d^2 C}{d\rho^2}. \quad (3.75)$$

A densidade linear da corda sobre uma superfície onde t e z são constantes pode ser expressa da seguinte forma

$$\mu = \int_0^\infty d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \sqrt{-g} T_0^0 \quad \text{e} \quad \sqrt{-g} = A^2 C, \quad (3.76)$$

$$\mu = \int_0^\infty d\rho \int_0^{2\pi} A^2 C \sigma d\theta = \int_0^\infty d\rho \int_0^{2\pi} A^2 \phi \left(\frac{-1}{8\pi G \phi} \frac{d^2 C}{d\rho^2} \right) d\theta, \quad (3.77)$$

$$\mu = -\frac{2\pi A^2}{8\pi G} \int_0^\infty \frac{d^2 C}{d\rho^2} d\rho = -\left. \frac{dC}{d\rho} \right|_0^\infty, \quad (3.78)$$

$$\mu = -\frac{A^2}{4G} \left(\left. \frac{dC(\rho)}{d\rho} \right|_\infty - \left. \frac{dC(\rho)}{de} \right|_{\rho=0} \right), \quad (3.79)$$

$$\left. \frac{dC(\rho)}{d\rho} \right|_{\rho=0} = 1, \quad (3.80)$$

$$\mu = \frac{A^2}{4G} [1 - C'(\infty)]. \quad (3.81)$$

Como $A \equiv$ constante, podemos escolher $A = 1$

$$\mu = \frac{1}{4G} [1 - C'(\infty)], \quad (3.82)$$

$$\mu = \frac{1}{4G} \left(1 - \frac{dC}{d\rho} \right), \quad (3.83)$$

$$4G\mu = 1 - \frac{dC}{d\rho} \Rightarrow \frac{dC}{d\rho} = 1 - 4G\mu, \quad (3.84)$$

$$\int dC = \int (1 - 4G\mu) d\rho \Rightarrow \int dC = (1 - 4G\mu) \int d\rho, \quad (3.85)$$

$$C(\rho) = (1 - 4G\mu)\rho, \quad (3.86)$$

onde μ é a densidade linear. Além disso, podemos considerar $\alpha = 1 - 4G\mu$. Logo, encontramos a métrica no exterior da corda cósmica

$$\begin{aligned} ds^2 &= dt^2 - d\rho^2 - (1 - 4G\mu)^2 \rho^2 d\theta^2 - dz^2, \\ \text{ou } ds^2 &= dt^2 - d\rho^2 - \alpha^2 \rho^2 d\theta^2 - dz^2. \end{aligned} \quad (3.87)$$

Esta equação descreve o espaço-tempo do ponto vista geométrico que resulta das transições de fase que geram defeitos topológicos lineares.

3.2.2 Cordas locais

A quebra espontânea de simetria local pode ser descrita quando estabelecemos que o campo ϕ deve ser transformado a partir do grupo local $U(1)$

$$\begin{aligned} \phi(x) &\rightarrow e^{i\alpha(x)}\phi, \\ \phi^*(x) &\rightarrow e^{-i\alpha(x)}\phi^*. \end{aligned} \quad (3.88)$$

Mas, a derivada de $\phi(x)$ não se transforma da mesma forma que os campos, logo

$$\partial_\mu \phi' \rightarrow e^{i\alpha(x)} [\partial_\mu \phi + i(\partial_\mu \alpha(x))\phi]. \quad (3.89)$$

Neste caso, faz-se necessário inserir um campo compensador A_μ na derivada, para que a derivada do campo tenha a seguinte configuração

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu, \quad (3.90)$$

posto que A_μ é transformado como uma transformação de gauge

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha(x), \quad (3.91)$$

rm que e é uma constante de acoplamento. A equação 3.90 é chamada de derivada covariante e representa o acoplamento mínimo entre o campo de gauge A_μ [5]. De modo que

$$D_\mu \phi \rightarrow D'_\mu \phi' = e^{i\alpha(x)} D_\mu \phi, \quad (3.92)$$

onde

$$D'_\mu = \partial_\mu + ieA'_\mu. \quad (3.93)$$

Consequentemente, a densidade do lagrangeano será descrita como

$$L = \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + [(\partial_\mu + ieA_\mu)\phi(\partial^\mu - ieA^\mu)\phi^*] - \frac{\lambda}{4}(\phi^*\phi - \nu^2)^2, \quad (3.94)$$

onde o primeiro termo representa a densidade do lagrangeano do campo compensador, em que $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, no qual é o invariante de gauge. A partir disso, o estado de vácuo é obtido

$$\langle |\phi_0|^2 \rangle = \eta^2, \quad (3.95)$$

assim, é possível descrever o estado de vácuo como

$$\phi_0 = \eta e^{i\beta}. \quad (3.96)$$

Sabendo que o estado de vácuo é arbitrário, é possível defini-lo como $\beta = 0$, tal que ϕ_0 seja real. Por conseguinte, durante a quebra espontânea de simetria local, surge um campo de gauge com massa descrito através do Mecanismo de Higgs [5].

Capítulo 4

Interação de defeitos lineares com a matéria escura

As cordas cósmicas são objetos hipotéticos com provável formação durante a fase do Universo primordial, que aconteceu instantes após o Big Bang. Nesse momento, ocorreram as transições de fase em decorrência da quebra espontânea de simetria. Possuem dimensões finitas, entretanto, têm a capacidade de se expandir por todo o desdobramento do Universo.

Existem algumas teorias que propõem que sua composição seja de matéria escura, ou que ainda, possam estar estreitamente relacionadas. Devido a sua densidade, elas podem afetar de forma direta a distribuição da matéria, incluindo a matéria escura [?].

Apesar de ainda não terem sido comprovadas experimentalmente, são discutidas possíveis interações com outros fenômenos, como no caso das ondas gravitacionais. Além deste, a interação entre a corda e objetos estelares, por exemplo, podem levar à formação de vazios, ou seja, regiões com menor densidade de matéria. O que resulta em uma maior dificuldade para observação.

Estes são alguns dos diversos casos presentes na literatura. Dessa forma, se faz necessário um maior suporte para observação visto que sua assinatura pode estar intrinsecamente ligada à radiação cósmica de fundo em micro-ondas. Para realizar esta e outras observações, já se pode contar com o suporte do Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory (LIGO), localizado nos estados de Louisiana e Washington, nos Estados Unidos, além de outros possíveis detectores de ondas gravitacionais. Sem mencionar que a presença das cordas podem deixar indícios na temperatura cósmica de fundo, que por sua vez podem ser medidas pelo satélite Planck [22]. A partir dos estudos observacionais e da análise de dados, poderá ser comprovado de forma plena sua existência com implicações na cosmologia e em outras áreas da física.

Neste capítulo, discutiremos o caso geral, onde a métrica utilizada expressa a transformação da holonomia em concordância com a solução de Vilenkin. Em seguida,

o caso específico discutirá a generalização da métrica para que seja possível aplicá-la em outros contextos topológicos.

4.1 Holonomia para Corda Cósmica Generalizada

Na física, a holonomia analisa como os vetores e/ou tensores mudam quando são transportados paralelamente ao longo de um espaço curvo, caracterizando dessa maneira as propriedades geométricas relacionadas a curvatura. Portanto, torna-se crucial utilizá-la nos estudos da física para compreender o comportamento de partículas, os efeitos gravitacionais e as teorias de calibre no espaço-tempo curvo [3]. Desse modo, vamos considerar a métrica para corda cósmica generalizada, em sua simetria cilíndrica mais geral, é dada por

$$ds^2 = N^2 dt^2 - d\rho^2 - L^2 d\theta^2 - N^2 dz^2, \text{ onde } N \equiv N(\rho), L \equiv L(\rho). \quad (4.1)$$

Temos que

$$\begin{aligned} e^0 = Ndt &\Rightarrow de^0 = \partial\rho N d\rho \wedge dt \Rightarrow de^0 = N'd\rho \wedge dt, \\ e^1 = -d\rho &\Rightarrow de^1 = 0, \\ e^2 = -Ld\theta &\Rightarrow de^2 = -\partial\rho L d\rho \wedge d\theta \Rightarrow de^2 = -L'd\rho \wedge d\theta, \\ e^3 = -Ndz &\Rightarrow de^3 = -\partial\rho N d\rho \wedge dz \Rightarrow de^3 = -N'd\rho \wedge dz. \end{aligned}$$

Usando a 1ª equação de Maurer-Cartan : $T^a = de^a + \omega_b^a \wedge e^b \equiv 0$ em que $T^a = 0$, ou seja, não há torção. Portanto, para de^0

$$de^0 + \omega_0^0 \wedge e^0 + \omega_1^0 \wedge e^1 + \omega_2^0 \wedge e^2 + \omega_3^0 \wedge e^3 = 0, \quad (4.2)$$

$$de^0 + \omega_0^0 \wedge Ndt + \omega_1^0 \wedge (-\lambda\rho) + \omega_2^0 \wedge (-Ld\theta) + \omega_3^0 \wedge (-Ndz) = 0, \quad (4.3)$$

$$de^0 + \omega_0^0 \wedge e^0 + \omega_1^0 \wedge e^1 + \omega_2^0 \wedge e^2 + \omega_3^0 \wedge e^3 = 0, \quad (4.4)$$

$$N'd\rho \wedge dt + N\omega_0^0 \wedge dt - \omega_1^0 \wedge d\rho - L\omega_2^0 d\theta - N\omega_3^0 \wedge dz = 0. \quad (4.5)$$

Por $\omega_0^0 = 0$, não existe diagonal. Além de que não existem termos com $d\theta$ e dz presentes em de^0 . Assim, para de^1

$$1e^1 + \omega_0^1 e^0 + \omega_1^1 e^1 + \omega_2^1 \wedge e^2 + \omega_3^1 \wedge e^3 = 0, \quad (4.6)$$

$$de^1 + \omega_1^1 \wedge dt + \omega_1^1 \wedge (-d\rho) + \omega_2^1 \wedge (-Ld\theta) + \omega_3^1 \wedge (-Ndz) = 0, \quad (4.7)$$

$$0 + N\omega_0^1 \wedge dt - \omega_1^1 \wedge d\rho - L\omega_2^1 \wedge d\theta - N\omega_3^1 \wedge dz = 0. \quad (4.8)$$

Por $de^1 = 0$, não é possível realizar conclusões. Por conseguinte, para de^2

$$de^2 + \omega_0^2 \wedge e^0 + \omega_1^2 \wedge e^1 + \omega_2^2 \wedge e^2 + \omega_3^2 \wedge e^3 = 0, \quad (4.9)$$

$$de^2 + \omega_0^2 \wedge (Ndt) + \omega_1^2 \wedge (-d\rho) + \omega_2^2 \wedge (-Ld\theta) + \omega_3^2 \wedge (-Ndz) = 0. \quad (4.10)$$

Neste caso, não há termos presentes com dt em de^2 . O mesmo ocorre com dz . Também, não há diagonais em ω_2^2 . Desse modo

$$-L'd\rho \wedge d\theta - \omega_1^2 \wedge d\rho = 0. \quad (4.11)$$

Assim, para de^3

$$de^3 + \omega_0^3 \wedge e^0 + \omega_1^3 \wedge e^1 + \omega_2^3 \wedge e^2 + \omega_3^3 \wedge e^3 = 0, \quad (4.12)$$

$$de^3 + \omega_0^3 \wedge (Ndt) + \omega_1^3 \wedge (-d\rho) + \omega_2^3 \wedge (-Ld\theta) + \omega_3^3 \wedge (-Ndz) = 0, \quad (4.13)$$

$$-N'd\rho \wedge dz + N \underbrace{\omega_0^3}_0 \wedge dt - \omega_1^3 \wedge d\rho - L \underbrace{\omega_2^3}_0 \wedge d\theta - \underbrace{\omega_3^3}_0 \wedge dz = 0. \quad (4.14)$$

Logo,

$$-N'd\rho \wedge dz - \omega_1^3 \wedge d\rho = 0. \quad (4.15)$$

Assim, obtemos

$$\begin{aligned} N'd\rho \wedge dt - \omega_1^0 d\rho &= 0, & \text{(a)} \\ -L'd\rho \wedge d\theta - \omega_1^2 \wedge d\rho &= 0, & \text{(b)} \\ -N'd\rho \wedge d\theta - \omega_1^3 \wedge d\rho &= 0. & \text{(c)} \end{aligned} \quad (4.16)$$

Cujas propriedades serão dadas por

$$\begin{aligned} \omega_1^0 &= -\omega_0^1, & \text{(d)} \\ \omega_2^1 &= -\omega_1^2, & \text{(e)} \\ \omega_3^1 &= -\omega_3^1. & \text{(f)} \end{aligned} \quad (4.17)$$

Através da eq. 4.16.b $-L'd\rho \wedge d\theta - \omega_1^2 \wedge d\rho = 0$. Para manter a uniformidade ω_1^2 deve ser da forma $\omega_1^2 = Ad\theta$. Assim

$$L'd\rho \wedge d\theta - Ad\theta \wedge d\rho = 0, \text{ mas } d\theta \wedge d\rho = -d\rho \wedge d\theta, \quad (4.18)$$

portanto,

$$L'd\rho \wedge d\theta + Ad\rho \wedge d\theta = 0, \quad (4.19)$$

$$(L' + A)d\rho \wedge d\theta = 0 \Rightarrow L' + A = 0 \Rightarrow A = -L'. \quad (4.20)$$

Para que

$$\omega_1^2 = A \quad \text{ou apenas} \quad \omega_1^2 = L'.$$

Utilizando a propriedade $\omega_1^2 = -\omega_2^1 = -L'$ temos que

$$\omega_1^2 = L'; \quad \omega_2^1 = -L',$$

As equações (a) e (b) são equivalentes, visto que são compostas unicamente por duas parcelas, ou seja, em que uma delas é igual

$$N'd\rho \wedge dt - \omega_1^0 \wedge d\rho = 0, \quad (1)$$

$$N'd\rho \wedge dz - \omega_3^1 \wedge d\rho = 0. \quad (2)$$

Dessarte, fisicamente, nem o eixo temporal e nem o eixo de z sofrerão influência da topologia da corda quando $\rho \rightarrow \infty$. Dessa maneira

$$\omega_1^0 = -\omega_0^1 = 0 \quad \text{e} \quad \omega_3^1 = -\omega_1^3 = 0. \quad (4.21)$$

Posto isto, podemos escrever a matriz das conexões como

$$\Gamma_\theta = \begin{pmatrix} \omega_0^0 & \omega_0^1 & \omega_0^2 & \omega_0^3 \\ \omega_1^0 & \omega_1^1 & \omega_1^2 & \omega_1^3 \\ \omega_2^0 & \omega_2^1 & \omega_2^2 & \omega_2^3 \\ \omega_3^0 & \omega_3^1 & \omega_3^2 & \omega_3^3 \end{pmatrix}, \quad (4.22)$$

$$\Gamma_\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -L' & 0 \\ 0 & L' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.23)$$

$$\Gamma_t = \Gamma_\rho = \Gamma_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.24)$$

De forma intuitiva, não ocorrem efeitos no transporte paralelo nas coordenadas t, ρ, z . Logo, a matriz de holonomia associada ao transporte paralelo é representada por

$$U(\gamma) = \rho \exp \left[\oint_{\gamma} dx^{\mu} \Gamma_{\mu} \right], \quad (4.25)$$

$$U(\gamma) = \rho \exp \left[\oint \Gamma_{\theta} d\theta \right] = \int \exp \left[\Gamma_{\theta} \int_0^{2\pi} d\theta \right].$$

Assim $U(\gamma) = \exp(2\pi\Gamma_{\theta})$ em que $L \equiv L(\rho)$. Sendo

$$\exp(x) = e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \quad (4.26)$$

Portanto, podemos escrever $U(\gamma)$ como $U(\gamma) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2\pi\Gamma_{\theta})^n}{n!}$

$$U(\gamma) = 1 + \frac{2\pi\Gamma_{\theta}}{1!} + \frac{(2\pi\Gamma_{\theta})^2}{2!} + \frac{(2\pi\Gamma_{\theta})^3}{3!} + \frac{(2\pi\Gamma_{\theta})^4}{4!} + \dots, \quad (4.27)$$

$$U(\gamma) = 1 + 2\pi\Gamma_{\theta} + \frac{(2\pi)^2\Gamma_{\theta}^2}{2!} + \frac{(2\pi)^3\Gamma_{\theta}^3}{3!} + \frac{(2\pi)^4\Gamma_{\theta}^4}{4!} + \dots$$

Mas

$$\Gamma_{\theta}^2 = \Gamma_{\theta}\Gamma_{\theta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -L' & 0 \\ 0 & L' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -L' & 0 \\ 0 & L' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.28)$$

$$\Gamma_{\theta}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -L'^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -L'^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \Gamma_{\theta}^2 = -L' \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.29)$$

E também

$$\Gamma_{\theta}^3 = \Gamma_{\theta}\Gamma_{\theta}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -L' & 0 \\ 0 & L' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -L'^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -L'^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.30)$$

$$\Gamma_{\theta}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L'^3 & 0 \\ 0 & -L'^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -L'^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -L' & 0 \\ 0 & L' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.31)$$

E para Γ_θ^4

$$\Gamma_\theta^4 = \Gamma_\theta \Gamma_\theta^3 = -L'^2 \Gamma_\theta \Gamma_\theta \Rightarrow \Gamma_\theta^4 = -L'^2 \Gamma_\theta^2. \quad (4.32)$$

Voltando para $U(\gamma)$ na forma de série, teremos como termos de potências ímpares

$$\begin{aligned} & 2\pi\Gamma_\theta + \frac{(2\pi)^3}{3!}\Gamma_\theta^3 + \dots, \\ & 2\pi\Gamma_\theta + \frac{(2\pi)^3}{3!}(-L'^2\Gamma_\theta) + \dots, \\ & \pi\Gamma_\theta - \frac{(2\pi)^3 L'^2}{3!}\Gamma_\theta + \dots, \\ & \left(2\pi - \frac{(2\pi)^3 L'^2}{3!} + \dots\right)\Gamma_\theta, \\ & \text{Ao multiplicar por } \frac{L'}{L'} \\ \Rightarrow & \left(2\pi - \frac{(2\pi)^3 L'^2}{3!} + \dots\right)\frac{L'}{L'}\Gamma_\theta, \\ \Rightarrow & \left[2\pi L' - \frac{(2\pi L')^3}{3!} + \dots\right]\frac{\Gamma_\theta}{L'}. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Lembrando que $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$ e comparando acima, teremos

$$\underbrace{\left[2\pi L' - \frac{(2\pi L')^3}{3!} + \dots\right]}_{\sin(2\pi L')}\frac{\Gamma_\theta}{L'}. \quad (4.34)$$

Logo, os termos com potências ímpares serão $\sin(2\pi L')\frac{\Gamma_\theta}{L'}$. Para os termos de $U(\gamma)$ com potências pares

$$\begin{aligned} & 1 + \frac{(2\pi)^2}{2!}\Gamma_\theta^2 + \frac{(2\pi)^4}{4!}\Gamma_\theta^4 + \dots, \\ & 1 + \frac{(2\pi)^2}{2!}\Gamma_\theta^2 + \frac{(2\pi)^4}{4!}(-L'^2)\Gamma_\theta^2 + \dots, \\ & 1 + \frac{(2\pi)^2}{2!}\Gamma_\theta^2 - \frac{(2\pi)^4}{4!}L'^2\Gamma_\theta^2 + \dots, \\ & 1 + \left[\frac{(2\pi)^2}{2!} - \frac{(2\pi)^4}{4!}L'^2 + \dots\right]\Gamma_\theta^2. \end{aligned}$$

Multiplicando o termo entre colchetes para $\frac{L'^2}{L'^2}$, temos

$$1 + \left[\frac{(2\pi)^2}{2!} - \frac{(2\pi)^4}{4!} L^{12} + \dots \right] \frac{L^2}{L^{12}} \Gamma_\theta^2,$$

$$1 + \left[\frac{(2\pi L')^2}{2!} - \frac{(2\pi L')^4}{4!} + \dots \right] \frac{\Gamma_\theta^2}{L'^2}.$$

Mas $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$, tal que

$$\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \dots = 1 - \cos x.$$

Quando comparamos com a expressão acima, temos que os termos de potências pares de $U(\gamma)$ podem ser descritos como

$$1 + [1 - \cos(2\pi L')] \frac{\Gamma_\theta^2}{L'^2}. \quad (4.35)$$

Portanto, a matriz da holonomia é escrita substituindo os respectivos termos de potências pares e ímpares. Ou seja

$$U_\gamma(\Gamma) = 1 + 2\pi\Gamma_\theta + \frac{(2\pi\Gamma_\theta)^2}{2!} + \frac{(2\pi\Gamma_\theta)^3}{3!} + \frac{(2\pi\Gamma_\theta)^4}{4!} + \dots, \quad (4.36)$$

torna-se,

$$U_\gamma(\Gamma) = 1 + \frac{\Gamma_\theta}{L'} \sin(2\pi L') + \frac{\Gamma_\theta^2}{L'^2} [1 - \cos(2\pi L')]. \quad (4.37)$$

A matriz de holonomia, $U_\gamma(\Gamma)$, permite a identificação da singularidade do espaço-tempo quando esta afeta a fase (L'). Análogo ao efeito Aharonov-Bohm, podemos identificar o efeito Aharonov-Bohm gravitacional [23], que possui conclusões semelhantes discutidas anteriormente na literatura, como por exemplo, no trabalho de Valdir Bezerra [6].

4.2 Holonomia para Corda Cósmica em casos específicos

As holonomias são objetos matemáticos responsáveis pela informação sobre o campo gravitacional de uma determinada região, no contexto da gravitação [24]. A seguir, utilizaremos a métrica, de modo que [25]

$$ds^2 = dt^2 - dz^2 - dr'^2 - \alpha^2 \rho^2 d\phi^2, \quad (4.38)$$

em que $\alpha = 1 - 8G\mu$. De acordo com as conexões tetrádicas, θ pode ser definido como

$$\begin{cases} \theta^0 = dt, \\ \theta^1 = \alpha d\rho, \\ \theta^2 = dt\phi, \\ \theta^3 = dz. \end{cases} \quad (4.39)$$

Tomando como definição que $\theta^A = e^A_\alpha dx^\alpha$, iremos considerar que

$$\begin{cases} e^0 = dt, \\ e^1 = \alpha d\rho, \\ e^2 = dt\phi, \\ e^3 = dz, \end{cases} \quad (4.40)$$

cuja métrica será descrita como

$$ds^2 = (e^0)^2 - (e^1)^2 - (e^2)^2 - (e^3)^2, \quad (4.41)$$

logo,

$$ds^2 = \eta_{AB} e^A e^B. \quad (4.42)$$

Assim, as inversas podem ser descritas como

$$dt = \frac{e^0}{N} \quad \text{assim, } e^0 = e^0_0 dt, \quad (4.43)$$

$$d\rho = e^1 \Rightarrow e^1 = e^1_1 d\rho, \quad d\rho = 1, \quad (4.44)$$

$$d\phi = \frac{e^2}{L} \Rightarrow e^2 = e^2_2 d\phi, \quad d\phi = L = \alpha\rho, \quad (4.45)$$

$$dz = \frac{e^3}{N} \Rightarrow e^3 = e^3_3 dz, \quad dz = N = 1. \quad (4.46)$$

Para $e^0 \Rightarrow de^0 = 0$. O mesmo se aplica para e^1 . Para e^2 , faremos

$$de^2 = \partial\rho(\alpha\rho)d\rho \wedge d\phi, \quad \text{sendo que } \partial\rho(\alpha\rho) = \alpha, \quad (4.47)$$

$$de^2 = \alpha d\rho \wedge d\phi, \quad (4.48)$$

$$de^2 = \frac{1}{\rho} e^1 \wedge e^2, \quad (4.49)$$

entretanto,

$$de^2 = \omega_0^2 \wedge e^0 + \omega_1^2 \wedge e^1 + \omega_2^2 \wedge e^2 + \omega_3^2 \wedge e^3. \quad (4.50)$$

Por ser em função de e^1 , teremos $de^2 = -\omega_0^2 \wedge e^0 - \omega_1^2 \wedge e^1 - \omega_2^2 \wedge e^2 - \omega_3^2 \wedge e^3$,

$$de^2 = -\omega_1^2 \wedge e^1, \quad (4.51)$$

$$\frac{1}{\rho} e^1 \wedge^2 = -\omega_1^2 \wedge e^1, \quad (4.52)$$

$$\omega_1^2 = \frac{1}{\rho} e^2. \quad (4.53)$$

Conclui-se que $\omega_2^1 = -\phi$, ou seja, uma propriedade antissimétrica. Agora, vamos definir as seguintes conexões: $\Gamma_{\mu 1}^2 dx^\mu = \Gamma_{\phi 1}^2 d\phi = -\Gamma_{\phi 2}^1 d\phi$. Dessa forma

$$\Gamma_\phi = \begin{pmatrix} \Gamma_{\phi 0}^0 & \Gamma_{\phi 1}^0 & \Gamma_{\phi 2}^0 & \Gamma_{\phi 3}^0 \\ \Gamma_{\phi 0}^1 & \Gamma_{\phi 1}^1 & \Gamma_{\phi 2}^1 & \Gamma_{\phi 3}^1 \\ \Gamma_{\phi 0}^2 & \Gamma_{\phi 1}^2 & \Gamma_{\phi 2}^2 & \Gamma_{\phi 3}^2 \\ \Gamma_{\phi 0}^3 & \Gamma_{\phi 1}^3 & \Gamma_{\phi 2}^3 & \Gamma_{\phi 3}^3 \end{pmatrix}, \quad (4.54)$$

$$\Gamma_\phi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.55)$$

Para a holonomia, $U(\gamma) = \exp(\int \Gamma_\phi d\phi)$, como Γ_ϕ não depende de ϕ ,

$$U(\gamma) = \exp(\Gamma_\phi \int_0^{2\pi} d\phi), \quad (4.56)$$

$$U(\gamma) = \exp(2\pi\Gamma_\phi). \quad (4.57)$$

Considerando a expansão de Taylor em seu formato exponencial, podemos reescrever da seguinte forma: $U(\gamma) = 1 + \frac{(2\pi\Gamma_\phi)^2}{2!} + \frac{(2\pi\Gamma_\phi)^3}{3!} + \frac{(2\pi\Gamma_\phi)^4}{4!} + \dots$ entretanto

$$\Gamma_\phi^2 = \Gamma_\phi \Gamma_\phi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.58)$$

$$\Gamma_{\phi}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha^2 & 0 \\ 0 & \alpha^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.59)$$

Como consequência,

$$\Gamma_{\phi}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha^3 & 0 \\ 0 & \alpha^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -\alpha^2 \Gamma_{\phi}, \quad (4.60)$$

$$\Gamma_{\phi}^3 = -\alpha^2 \Gamma_{\phi}. \quad (4.61)$$

Levando em consideração a expansão de Taylor para o seno

$$\begin{aligned} & 2\pi\Gamma_{\phi} + (2\pi)^3 \frac{\Gamma_{\phi}^3}{3!} + \dots, \\ & 2\pi\left(\Gamma_{\phi} + \frac{\Gamma_{\phi}^3}{3!}(2\pi)^2\right), \\ & \Gamma_{\phi}\left(2\pi + \frac{(2\pi^3)}{3!}(-\alpha)^2\right), \end{aligned} \quad (4.62)$$

e tomando $\sin(2\pi\alpha) = 2\pi\alpha - \frac{2\pi\alpha^3}{3!} + \dots$,

$$\Gamma_{\phi}\left[2\pi - \frac{2\pi^3}{3!}\alpha^2\right] = \frac{\Gamma_{\phi}}{\alpha}\sin(2\pi\alpha). \quad (4.63)$$

Podemos obter o termo para $\cos(2\pi\alpha)$. Pela holonomia

$$U(\gamma) = \exp(2\pi\Gamma_{\phi}). \quad (4.64)$$

Sabendo que $e^x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$,

$$U(\gamma) = 1 - \frac{(2\pi\alpha)^2}{2!} + \frac{(2\pi\alpha)^4}{4!} - \dots \quad (4.65)$$

Como já é conhecido, $\Gamma_{\phi}^3 = -\alpha\Gamma_{\phi}$ logo

$$U(\gamma) = 1 - \frac{(2\pi\Gamma_{\phi})^2}{2!} + \frac{(2\pi\Gamma_{\phi})^4}{4!} - \dots \quad (4.66)$$

mas $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$ assim,

$$(2\pi)^2 \frac{(\Gamma_\phi)^2}{2!} + \frac{(\Gamma_\phi)^4}{4!} - 1 \dots \quad (4.67)$$

Lembrando que $\Gamma_\phi^3 = \alpha^2 \Gamma_\phi$,

$$1 - \left[\Gamma_\phi^2 \left(\frac{(2\pi)^2}{2!} \right) + \frac{(2\pi)^4 \alpha^2}{4!} \right] = \frac{\Gamma_\phi^2}{\alpha^2} \cos(2\pi\alpha),$$

$$\text{logo, } \frac{\Gamma_\phi}{\alpha} \sin(2\pi\alpha) + \frac{\Gamma_\phi^2}{\alpha^2} [1 - \cos(2\pi\alpha)]. \quad (4.68)$$

Dessa forma, podemos concluir que a expressão [6]

$$U(\Gamma) = 1 + \frac{\Gamma_\phi}{\alpha} \sin(2\pi\alpha) + \frac{\Gamma_\phi^2}{\alpha^2} [1 - \cos(2\pi\alpha)], \quad (4.69)$$

é a expressão para a transformação da holonomia correspondente a solução de Vilenkin [21].

4.2.1 Equação de Klein-Gordon com Simetria Cilíndrica Generalizada

$$\square\phi + (\mu^2 + \xi R) = 0, \quad (4.70)$$

onde $R \equiv$ é o escalar de curvatura, ξ a constante de acoplamento e $\mu = \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}$ em que

$$\square\phi = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi). \quad (4.71)$$

Consideraremos o ansatz: $\phi = \phi(t, \rho, \varphi, z) = C e^{-iEt} e^{im\varphi} e^{ikz} f(\rho)$ e como métrica cilíndrica generalizada

$$ds^2 = N^2 dt^2 - d\rho^2 - L^2 d\varphi^2 - N^2 dz^2, \quad (4.72)$$

em que $N = N(\rho)$ e $L = L(\rho)$.

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} N^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -L^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -N^2 \end{pmatrix} \Rightarrow g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1/N^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/L^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/N^2 \end{pmatrix}, \quad (4.73)$$

$$g = \det(g_{\mu\nu}) = -N^4 L^2 \Rightarrow \sqrt{-g} = N^2 L, \quad (4.74)$$

$$\square\phi = \frac{1}{N^2 L} [\partial_t(N^2 L g^{tt} \partial_t \phi) + \partial_\rho(N^2 L g^{\rho\rho} \partial_\rho \phi) + \partial_\varphi(N^2 L g^{\varphi\varphi} \partial_\varphi \phi) + \partial_z(N^2 L g^{zz} \partial_z \phi)], \quad (4.75)$$

$$\square\phi = \frac{1}{N^2 L} [\partial_t(N^2 L \frac{1}{N^2} \partial_t \phi) + \partial_\rho(N^2 L (-1) \partial_\rho \phi) + \partial_\varphi(N^2 L (-\frac{1}{L^2}) \partial_\varphi \phi) + \partial_z(N^2 L (-\frac{1}{N^2}) \partial_z \phi)], \quad (4.76)$$

$$\square\phi = \frac{1}{N^2 L} \left[L \partial_t^2 \phi - \partial_\rho(N^2 L \partial_\rho \phi) - \frac{N^2}{L} \partial_\varphi^2 \phi - L \partial_z^2 \phi \right], \quad (4.77)$$

$$\square\phi = \frac{1}{N^2 L} \left[L \partial_t^2 \phi - (2NN^1 L + N^2 L') \partial_\rho \phi - N^2 L \partial^2 \rho \phi - \frac{N^2}{L} \partial^2 \varphi \phi - L \partial^2 z \phi \right] \quad (2). \quad (4.78)$$

Ao substituir a eq. (4.78) na eq.(4.70), temos que

$$\frac{1}{N^2 L} \left[L \partial_t^2 \phi - (2NN^1 L + N^2 L') \partial_\rho \phi - N^2 L \partial^2 \rho \phi - \frac{N^2}{L} \partial^2 \varphi \phi - L \partial^2 z^2 \right] + (\mu^2 + \xi R) \phi = 0. \quad (4.79)$$

Considerando o ansatz $\phi = C e^{-iEt} e^{im\varphi} e^{ikz} f(\rho)$, onde C é constante e resolvendo as derivadas para cada coordenada.

Para t ,

$$\begin{aligned} \partial_t \phi &= \frac{\partial}{\partial t} [C e^{-iEt} e^{im\varphi} e^{ikz} f(\rho)] = -iCE e^{-iEt} e^{im\varphi} e^{ikz} f(\rho), \\ \partial_t^2 \phi &= -CE^2 e^{-iEt} e^{im\varphi} e^{ikz} f(\rho). \end{aligned} \quad (4.80)$$

Para ρ ,

$$\begin{aligned} \partial_\rho \phi &= \frac{\partial}{\partial \rho} [C e^{-iEt} e^{im\varphi} e^{ikz} f(\rho)] = C e^{-iEt} e^{im\varphi} e^{ikz} f'(\rho), \\ \partial_\rho^2 \phi &= C e^{-iEt} e^{im\varphi} e^{ikz} f''(\rho). \end{aligned} \quad (4.81)$$

Para φ ,

$$\begin{aligned} \partial_\varphi \phi &= \frac{\partial}{\partial \varphi} [C e^{-iEt} e^{im\varphi} e^{ikz} f(\rho)] = imC e^{-iEt} e^{im\varphi} e^{ikz} f(\rho), \\ \partial_\varphi^2 \phi &= -m^2 C e^{-iEt} e^{im\varphi} e^{ikz} f(\rho). \end{aligned} \quad (4.82)$$

Para z ,

$$\begin{aligned} \partial_z \phi &= \frac{\partial}{\partial z} [C e^{-iEt} e^{im\varphi} e^{ikz} f(\rho)] = ikC e^{-iEt} e^{im\varphi} e^{ikz} f(\rho), \\ \partial_z^2 \phi &= -k^2 C e^{-iEt} e^{im\varphi} e^{ikz} f(\rho). \end{aligned} \quad (4.83)$$

Substituindo as equações (4.80), (4.81), (4.82), (4.83) em (4.79), teremos

$$\frac{1}{N^2 L} \left[-LE^2 f(\rho) - (2NN'L + N^2 L') f'(\rho) - N^2 L f''(\rho) + \frac{N^2}{L} m^2 f(\rho) + LK^2 f(\rho) \right] + (\mu^2 + \xi R) f(\rho) = 0 \quad (4.84)$$

$$\frac{E^2}{N^2} f(\rho) - \left(\frac{2N'}{N} + \frac{L'}{L} \right) f'(\rho) - f''(\rho) + \frac{\mu^2}{L^2} f(\rho) + \frac{K^2 f(\rho)}{N^2} + (\mu^2 + \xi R) f(\rho) = 0, \quad (4.85)$$

$$-f''(\rho) - \left(\frac{2N'}{N} + \frac{L'}{L} \right) f'(\rho) + \left(-\frac{E^2}{N^2} + \frac{M^2}{L^2} + \frac{K^2}{N^2} + \mu^2 + \xi R \right) f(\rho) = 0. \quad (4.86)$$

Multiplicando por (-1)

$$f''(\rho) + \left(\frac{2N'}{N} + \frac{L'}{L} \right) f'(\rho) - \left(-\frac{E^2}{N^2} + \frac{m^2}{L^2} + \frac{k^2}{N^2} + \mu^2 + \xi R \right) f(\rho) = 0, \quad (4.87)$$

$$f''(\rho) + \left(\frac{2N'}{N} + \frac{L'}{L} \right) f'(\rho) + \left(\frac{E^2}{N^2} - \frac{m^2}{L^2} - \frac{k^2}{N^2} - \mu^2 - \xi R \right) f(\rho) = 0. \quad (4.88)$$

Onde $f'(\rho) = \frac{\partial f(\rho)}{\partial \rho}$ e $f''(\rho) = \frac{\partial^2 f(\rho)}{\partial \rho^2}$. Em que E_1, k, ξ, μ são constantes e $R \equiv R(\rho)$. Sendo $\lambda^2 = E^2 - \mu^2 - k^2$, temos que

$$\frac{\lambda^2}{N^2} = \frac{E^2 - \mu^2 - k^2}{N^2}. \quad (4.89)$$

Ainda, podemos reescrever a segunda parte como

$$\begin{aligned} \left(\frac{E^2}{N^2} - \frac{\mu^2}{L^2} - \frac{k^2}{N^2} - \mu^2 - \xi R \right) &= \left(\frac{E^2}{N^2} - \frac{M^2}{L^2} - \frac{k^2}{N^2} - \mu^2 + \frac{\mu^2}{N^2} - \frac{\mu^2}{N^2} - \xi R \right), \\ \left(\frac{E^2}{N^2} - \frac{M^2}{L^2} - \frac{k^2}{N^2} - \mu^2 - \xi R \right) &= \left[\frac{E^2}{N^2} - \frac{\mu^2}{N^2} - \frac{k^2}{N^2} - \mu \left(1 - \frac{1}{N^2} \right) - \frac{\mu^2}{L^2} - \xi R \right]. \end{aligned} \quad (4.90)$$

Usando a eq. (4.89),

$$\begin{aligned} \left(\frac{E^2}{N^2} - \frac{m^2}{L^2} - \frac{k^2}{N^2} - \mu^2 - \xi R \right) &= \left[\frac{E^2 - \mu^2 - k^2}{N^2} - \mu \left(1 - \frac{1}{N^2} \right) - \frac{m^2}{L^2} - \xi R \right], \\ \left(\frac{E^2}{N^2} - \frac{m^2}{L^2} - \frac{k^2}{N^2} - \mu^2 - \xi R \right) &= \left[\frac{\lambda^2}{N^2} - \mu \left(1 - \frac{1}{N^2} \right) - \frac{m^2}{L^2} - \xi R \right]. \end{aligned} \quad (4.91)$$

Substituindo a eq. (4.91) na eq. (4.88), obtemos

$$\begin{aligned} f''(\rho) + \left(\frac{2N'}{N} + \frac{L'}{L} \right) f'(\rho) + \left(\frac{E^2}{N^2} - \frac{m^2}{L^2} - \frac{k^2}{N^2} - \mu^2 - \xi R \right) f(\rho) &= 0, \\ f''(\rho) + \left(\frac{2N'}{N} + \frac{L'}{L} \right) f'(\rho) + \left[\frac{N^2}{N^2} - \mu \left(1 - \frac{1}{N^2} \right) - \frac{m^2}{L^2} - \xi R \right] f(\rho) &= 0. \end{aligned} \quad (4.92)$$

Observamos que a solução desta equação é dada pela função de Bessel, de modo que descreve o campo gravitacional ao redor da corda cósmica

$$f(\rho \rightarrow 0) \propto \underbrace{J_m(\lambda_r)}_{\text{Função de Bessel}}$$

Considerando que $N = 1$ e $L = \alpha\rho$, temos que

$$f''(\rho)2f'(\rho) + \left(1 - \frac{m^2}{(\alpha\rho)^2} - \xi R\right)f(\rho) = 0. \quad (4.93)$$

4.3 A matéria escura no contexto da gravitação

A radiação cósmica de fundo na região de microondas foi detectada acidentalmente em 1964 por Arno Allan Penzias (1933-2024) e Robert Woodrow Wilson (1936), sendo profundamente rica em informações que permitem definir muitas das propriedades do Universo. Através dos estudos sobre a radiação cósmica de fundo, vestígios de um Universo primitivo de 375 mil anos após o Big Bang, obteve-se observações acerca da abundância de diversos elementos leves nas estrelas, dentre eles, hidrogênio, hélio e deutério. Onde indicava que havia apenas 5% do conteúdo do Universo, em termos de energia, que poderia ser identificado como a matéria já conhecida na literatura, ou seja, constituinte de prótons, nêutrons, elétrons e as demais partículas elementares. Em estudos sobre a rotação de galáxias do tipo espiral, revelou-se que apenas 10% da matéria presente no espectro eletromagnético era correspondente à massa total sofrida pela dinâmica de rotação. Ou seja, em questão da matéria escura, as observações foram corroboradas em várias escalas de distância. Uma das principais formas de estudá-la é através da observação de lentes gravitacionais. Na TRG, a luz sofre um desvio em sua rota devido a presença concentrada de matéria no espaço-tempo, causando uma curvatura.

Apesar de ainda não ter sido detectada, seus efeitos e interações são observados desde a década de 1930 [26] nos aglomerados de estruturas (p.ex, aglomerados de galáxias) e na curva de rotação das galáxias a partir dos anos 1970 [27].

A matéria escura é um dos diversos assuntos abordados pela cosmologia contemporânea. Uma das perspectivas é considerá-la como um campo escalar [22], pois, compreendendo o comportamento das cordas cósmicas em um campo escalar permite analisar sua interação com outros possíveis objetos. Isso permitirá que esses objetos possam, futuramente, ser acoplados junto com a gravidade dentro das métricas discutidas anteriormente [28].

Capítulo 5

Conclusões

Neste trabalho, buscamos contribuir com o estudo acerca das cordas cósmicas em interação com um campo escalar. Inicialmente, aplicamos a Teoria da Relatividade Geral e Teoria de Campos, analisando a invariância do lagrangeano no estudo dos defeitos topológicos lineares (cordas cósmicas). Em seguida, discutimos as condições do Universo primordial estava para justificar o surgimento dos defeitos topológicos (análise dos potenciais) e definimos como ocorre a quebra espontânea de simetria em casos locais. Finalmente, apresentamos uma generalização da métrica da corda cósmica com o intuito de que possa ser discutida e aplicada em outros contextos da teoria de campos e da cosmologia. Essa generalização permite, pela primeira vez, que possamos atribuir ao campo escalar diversos objetos presentes no Universo, como matéria e energia escura. Além disso, nos dá a perspectiva de analisar a interação da corda cósmica considerando o acoplamento com a gravidade em futuros projetos, incluindo a utilização de softwares para análises numéricas mais aprofundadas .

Referências Bibliográficas

- [1] A brief review of dark matter. *International Journal of Modern Physics A*, Singapore, v. 34, p. 1930013–, 2019.
- [2] Effective field theories for dark matter pairs in the early universe: cross sections and widths. *Journal of High Energy Physics*, v. 2023, n. 7, 2023.
- [3] Special holonomy manifolds in physics. , n. 29, p. 37–47, 2006.
- [4] Review of dark matter. v. 5, n. 1, p. 100–106, 2023.
- [5] SANTOS, A. D. P. et al. Influência das cordas cósmicas não-abelianas na geometria do espaço-tempo. 2016.
- [6] BEZERRA, V. B. Gravitational analogue of the aharonov-bohm effect in four and three dimensions. *Physical Review D*, v. 35, n. 6, p. 2031, 1987.
- [7] PEREIRA JR., A. D.; LEMOS, N. A. Geometria diferencial de curvas e dinâmica da partícula. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, São Paulo, v. 33, n. 2, p. 1–7, 2011.
- [8] FALCIANO, F. Geometria, espaço-tempo e gravitação: conexão entre conceitos da relatividade geral. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 31, p. 4308–4317, 2009.
- [9] SILVA, A. R. G. D. et al. Solução de schwarzschild para as equações de einstein. 2022.
- [10] SOARES, D. Os fundamentos físico-matemáticos da cosmologia relativista. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, São Paulo, v. 35, n. 3, set 2013.
- [11] BERTOLINO, W. H. P. *The ricci scalar curvature and the elastic free energy of a nematic sample*. 2018. Tese (Doutorado em Física) - Universidade Estadual de Londrina, 2018.
- [12] SILVA, P. M. G. L. T. *Uma descrição da expansão e aceleração do universo no contexto das teorias $f(r)$* . 2012. Dissertação (Mestrado em Física) - Joinville, SC, 2012.

- [13] SOUZA, M. et al. Campos escalares reais e a quebra espontânea de simetria: Uma descrição analítica para defeitos topológicos. *Lat. Am. J. Phys. Educ.*, v. 6, n. 1, p. 47, 2012.
- [14] SILVA, M. Cosmic adventures in stringland: Scattering of bosonic and fermionic fields in gravitating cosmic string spacetimes. *arXiv preprint arXiv:2112.10916*, 2021.
- [15] GANGUI, A. Cosmology from topological defects. In: . c2003. v. 668. p. 226–262.
- [16] SILVA, A. T. N. D. *Um estudo da solução de hiscock para cordas cósmicas*. 2016. Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade Estadual da Paraíba, 2016.
- [17] DYER, C. C.; MARLEAU, F. R. Complete model of a self-gravitating cosmic string: A new class of exact solutions. *Physical Review D*, v. 52, n. 10, p. 5588–5597, 1995.
- [18] FASOLI, D.; CATTANI, A.; PANZERI, S. The complexity of dynamics in small neural circuits. *PLoS computational biology*, v. 12, n. 8, p. e1004992, 2016.
- [19] GRIFFITHS, D. J. *Introduction to electrodynamics*. Cambridge University Press, 2023.
- [20] COPELAND, E. J.; KIBBLE, T. Cosmic strings and superstrings. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, v. 466, n. 2115, p. 623–657, 2010.
- [21] VILENKIN, A.; SHELLARD, E. P. S. *Cosmic strings and other topological defects*. Cambridge University Press, 1994.
- [22] The revival of cosmic strings. *Annalen der Physik*, v. 15, n. 4, p. 264–276, 2006.
- [23] BURGESS, C. Gravitational aharonov-bohm effect in three dimensions. *Physical Review D*, v. 32, n. 2, p. 504, 1985.
- [24] VELOSO SÁTIRO, C. *Espalhamento de luz e holonomias no campo gravitacional de cordas cósmicas com estrutura interna*. 2003. Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade Federal de Pernambuco, 2003.
- [25] VILENKIN, A. Gravitational field of vacuum domain walls and strings. *Phys. Rev. D*, v. 23, p. 852–857, Feb 1981.
- [26] ZWICKY, F. On the masses of nebulae and of clusters of nebulae. In: *A Source Book in Astronomy and Astrophysics, 1900–1975*. Harvard University Press, 1979. p. 729–737.

- [27] RUBIN, V. C.; FORD JR, W. K. Rotation of the andromeda nebula from a spectroscopic survey of emission regions. *Astrophysical Journal*, vol. 159, p. 379, v. 159, p. 379, 1970.
- [28] A model for a non-minimally coupled scalar field interacting with dark matter. *Brazilian Journal of Physics*, São Paulo, v. 35, p. 1038–1040, 2005.