

# Interação robô-ambiente no bilhar do estádio de Bunimovich



**João Victor Alves Vasconcelos**

Orientador: Antonio R. de C. Romaguera

Coorientador: Anderson L. da R. e Barbosa

Departamento de Física  
Universidade Federal Rural de Pernambuco

Dissertação apresentada para o título de  
*Mestre em física aplicada*

Janeiro 2025

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Sistema Integrado de Bibliotecas da UFRPE  
Bibliotecário(a): Auxiliadora Cunha – CRB-4 1134

V331i Vasconcelos, João Victor Alves.  
Interação robô-ambiente no bilhar do estádio de Bunimovich / João Victor Alves Vasconcelos. – Recife, 2025.  
58 f.; il.

Orientador(a): Antonio Rodrigues de Castro Romaguera.  
Co-orientador(a): Anderson Luiz da Rocha e Barbosa.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Programa de Pós-Graduação em Física Aplicada, Recife, BR-PE, 2025.

Inclui referências e apêndice(s).

1. Caos (Sistemas dinâmicos). 2. Física Aplicada. 3. Mecânica estatística. 4. Matéria ativa I. Romaguera, Antonio Rodrigues de Castro, orient. II. Barbosa, Anderson Luiz da Rocha e, coorient. III. Título

CDD 621



S. D. G.



## **Declaração**

Declaro que todos os resultados contidos nesta dissertação são originais e frutos do meu próprio trabalho e da colaboração dos meus amigos e orientadores, citados nos agradecimentos e nas referências ao longo do texto.

João Victor Alves Vasconcelos  
Janeiro 2025



## Agradecimentos

Neste espaço, agradecerei àqueles que participaram da minha jornada na Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE). Aos meus amigos de turma e professores de graduação, com quem compartilho minhas memórias das aulas onde aprendemos sobre física básica, e da tensão em provas finais, que foram muitas, mas só é campeão quem vai para a final.

Aos que me ajudaram na minha formação como cientista. Meus amigos orientadores que o Laboratório de Sistemas Complexos e Universalidades (LaSCoU) me trouxe. Anderson Barbosa, que me ensinou a ser independente desde a iniciação científica. Luciano Miranda-Filho, com quem, divertidamente, passei um bom tempo desenvolvendo a parte teórica deste trabalho. Adauto de Souza, “o nosso guru” como diz Anderson. Ele sempre consegue resolver os meus problemas com mecânica estatística! Antonio Romaguera, que me coorientou durante a graduação e me orientou durante o mestrado. Com ele aprendi a resolver os problemas de um laboratório de sistemas complexos. E o mais importante, que temos que aproveitar as oportunidades que nos aparecem e criarmos memórias por onde passamos. Que, diga-se de passagem, muitas foram criadas neste período de UFRPE.

Por fim, aos meus amigos que o LaSCoU uniu. Não irei citar os nomes para economizar espaço, mas guardo absolutamente todos entre as melhores memórias da minha vida. Não somos caracterizados como apenas um grupo de amigos físicos, com memórias típicas das vividas em uma universidade. Mas amigos que já viraram algumas noites nas ruas de algumas cidades; no mestrado, começamos passando 6 meses de grandes dificuldades; vimos um eclipse solar raríssimo em uma viagem completamente improvisada, mas fantástica; comemoramos aniversários, conquistas e premiações; cuidamos e ajudamos uns aos outros em absolutamente tudo, até emprestando a casa ao amigo; criamos a tradição anual do luau do LaSCoU e das reuniões às quintas à noite; alguns formaram casais, outros desfizeram, e outros até ocultaram (é uma longa história); fizemos várias vezes da nossa desgraça uma comédia, numa viagem, apagamos um incêndio no nosso próprio carro e mesmo assim não paramos, e “você sabem o porquê isso aqui acontece?” porque “somos a definição de quem quer, dá um jeito”. Se O Criador me desse o poder de escolher as melhores companhias para a minha jornada na UFRPE, eu seria incapaz de selecionar vocês. Agradeço a todos, pois “cada um tem o seu papel”.



## Resumo

As interações robô-ambiente oferecem diversas oportunidades para revisitar problemas físicos sob uma nova perspectiva. Assim, desenvolvemos um experimento simples para observar o caos em bilhares clássicos utilizando uma configuração macroscópica de 3,38 m de comprimento. Por meio de uma câmera de vídeo digital, registramos a evolução temporal dinâmica da interação entre um robô e bilhares no estádio de Bunimovich com reflexão especular. A partir das séries temporais experimentais, mostramos que o bilhar experimental possui todas as características do bilhar teórico. Calculamos o expoente de Lyapunov  $\lambda$  em função de um parâmetro geométrico, e determinamos a secção da superfície de Poincaré a partir dos dados experimentais e avaliamos sua sensibilidade às condições iniciais em função do tempo.



## **Abstract**

The robot–environment–task triad provides many opportunities to revisit physical problems with fresh eyes. Hence, we develop a simple experiment to observe chaos in classical billiards with a macroscopic 3.38-meter long setup. Using a digital video camera, one records the dynamic time evolution of the interaction between a robot and Bunimovich stadium billiards with specular reflection. From the experimental time series, we calculate the Lyapunov exponent  $\lambda$  as a function of a geometric parameter. The results are in concordance with theoretical predictions. In addition, we determine the Poincaré surface of section from the experimental data and check its sensitivity to the initial conditions as a function of time.



# Índice

<b>Lista de figuras</b>	<b>xv</b>
<b>Lista de tabelas</b>	<b>xvii</b>
<b>Nomeclatura</b>	<b>xix</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Metodologia</b>	<b>7</b>
2.1 Montagem experimental . . . . .	7
2.1.1 Montagem do robô . . . . .	7
2.1.2 Montagem do experimento . . . . .	9
2.1.3 Digitalização . . . . .	11
2.1.4 Conjunto experimental . . . . .	13
2.2 Abordagem teórica . . . . .	13
2.2.1 Bilhar dinâmico clássico . . . . .	13
2.2.2 Expoentes de Lyapunov . . . . .	15
<b>3 Resultados e Discussões</b>	<b>19</b>
<b>4 Conclusão</b>	<b>27</b>
<b>Referências</b>	<b>29</b>
<b>Apêndice A Desenvolvimento do robô</b>	<b>33</b>
A.1 Descrição do robô . . . . .	33
A.2 Plataforma de prototipagem eletrônica . . . . .	33
A.2.1 Arduino UNO . . . . .	33
A.2.2 Shield V5.0 e Mini breadboard . . . . .	34
A.2.3 Servo 43R (360°) . . . . .	34

---

A.2.4	Sensor infravermelho VL53L0X . . . . .	34
A.3	Tarefa do Robô . . . . .	34
<b>Apêndice B</b>	<b>Curriculum Vitae</b>	<b>37</b>
B.1	Trabalhos apresentados em eventos . . . . .	37
B.2	Menções honrosas . . . . .	38
B.3	Artigos publicados . . . . .	38

# Lista de figuras

1.1	Atrator de Lorenz . . . . .	2
1.2	Estádio de Bunimovich . . . . .	3
1.3	Distanciamento . . . . .	3
1.4	Tríade de interação robô-ambiente . . . . .	5
2.1	Robô versão 0 . . . . .	8
2.2	Robô versão 01 . . . . .	8
2.3	Robô versão 02 . . . . .	9
2.4	Montagem experimental 00 . . . . .	10
2.5	Montagem experimental 01 . . . . .	10
2.6	Composição de uma imagem . . . . .	12
2.7	Reflexão especular no bilhar . . . . .	13
2.8	Exemplos de bilhares . . . . .	14
2.9	Estádio em coordenadas de Birkhoff . . . . .	15
3.1	Digitalização . . . . .	20
3.2	EL vs $\gamma$ . . . . .	21
3.3	Poincaré SOS - 2d . . . . .	23
3.4	Poincaré SOS - 3d . . . . .	24
A.1	Esquema de sensores . . . . .	36



# Lista de tabelas

3.1	Parâmetros geométricos . . . . .	19
A.1	Partes eletrônicas usadas no robô . . . . .	33



# Nomeclatura

## Símbolos gregos

$\gamma$	Parâmetro de controle geométrico
$\kappa$	Curvatura da superfície de interação
$\lambda$	Expoente de Lyapunov
$\zeta$	Vetor diferença
$\tau$	Tempo de voo livre
$\theta$	Ângulo de incidência
$\varphi$	Ângulo de reflexão
$\pi$	$\simeq 3.14\dots$

## Outros símbolos

$\dot{\mathbf{x}}$	Vetor de equações diferenciais
$\mathbf{F}$	Função vetorial
$\mathbf{J}$	Matriz jacobiana
$\mathbf{p}$	Momentos generalizados
$\mathbf{q}$	Coordenadas generalizadas
$\mathbf{v}$	Vetor velocidade
$a$	Parâmetro geométrico
$L$	Parâmetro geométrico

$p$  Comprimento de arco na fronteira

$r$  Parâmetro geométrico

$s$  Projeção da velocidade

$t$  Tempo

### **Siglas / Abreviações**

BSB Bilhar de Stadium de Bunimovich

CSB Bilhar de stadium circular

EDO Equação diferencial ordinária

IR Infravermelho

KAM Kolmogorov–Arnol'd-Moser

EL Expoente de Lyapunov

SOS Seção da Superfície

ToF Time-of-Flight

USB Universal Serial Bus

US Ultrassônico

# Capítulo 1

## Introdução

A teoria do caos é historicamente recente, mas possui um volume de contribuições significativo [1]. Em 1889, durante a celebração do 60° aniversário do rei Oscar II, Henri Poincaré demonstrou a impossibilidade de resolver, com a tecnologia da época, o sistema de equações que regia o problema de três corpos [2]. O problema de três corpos, essencial na mecânica celeste, trata do estudo da interação gravitacional entre três corpos em movimento. Em seus trabalhos, Poincaré propôs novos métodos para estudar equações diferenciais não lineares, que foram fundamentais para o desenvolvimento dos sistemas dinâmicos. Entretanto, a sistematização desse problema feita por Poincaré permaneceu sem explicações claras até o início dos anos 1960. Em 1961, na Universidade de Kyoto, o estudante Yoshisuke Ueda identificou “transições aleatória” no comportamento de órbitas não lineares em osciladores periódicos forçados, marcando o início dos maiores avanços na teoria do caos [3].

Em 1963, Edward Lorenz publicou um trabalho pioneiro que elucidou aspectos fundamentais dos sistemas caóticos [4]. Lorenz descobriu que pequenas mudanças nas condições iniciais, em seu modelo de convecção atmosférica, resultavam em comportamentos completamente diferentes em curtos intervalos de tempo. Essa descoberta, chamada de “efeito borboleta” (Fig. 1.1), revelou a sensibilidade extrema dos sistemas caóticos às condições iniciais.

A teoria do caos ultrapassou os limites dos sistemas dinâmicos clássicos, abrangendo áreas como biologia, química, engenharia e robótica [5–14]. Essas disciplinas desenvolveram abordagens distintas para lidar com sistemas complexos ao longo dos últimos 40 anos. Uma das aplicações importantes é nos bilhares dinâmicos clássicos, que consistem em uma partícula livre confinada por uma fronteira, realizando reflexões especulares ao interagir com ela [10, 15, 16]. É amplamente conhecido que o caos nesses sistemas depende exclusivamente da forma geométrica da fronteira [17]. O bilhar do estádio de Bunimovich, Bunimovich stadium billiard (BSB), é composto por duas formas geométricas: dois semicírculos laterais

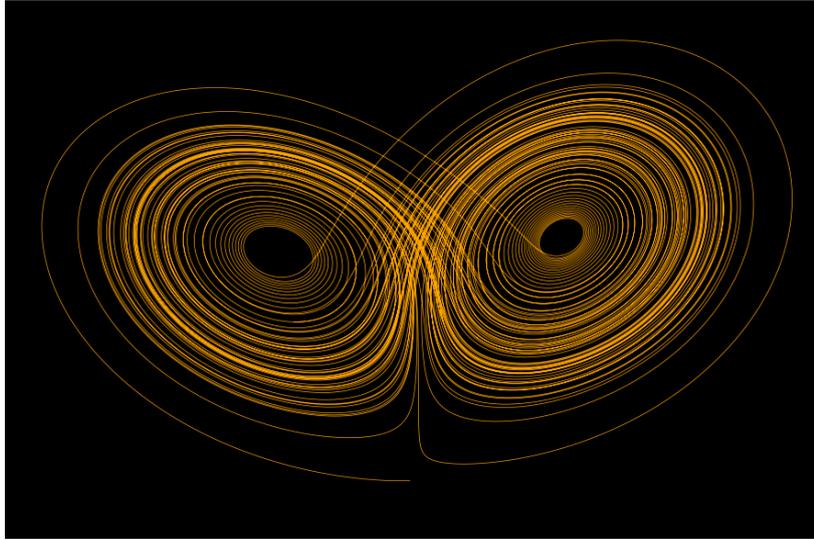


Fig. 1.1 Astrator de Lorenz.

e um retângulo central (Fig. 1.2) [18]. Os semicírculos possuem raio  $r$ , e o lado do retângulo mede  $2a$ . Um parâmetro de controle geométrico  $\gamma$  é definido para medir a deformação do estádio. Quando  $\gamma = 0.0$ , o bilhar assume a forma de um círculo, circular stadium billiard (CSB), onde a dinâmica é regular (Fig. 2.8a) [19]. À medida que  $\gamma > 0$ , a dinâmica torna-se caótica (Fig. 2.8c). Assim, o caos desse sistema está intrinsecamente ligado ao parâmetro geométrico  $\gamma$ .

A evolução da dinâmica desses sistemas deve ser observada no espaço de fases [20]. Nos bilhares, o espaço de fases é representado em coordenadas de Birkhoff [21]. Como os bilhares possuem dois graus de liberdade  $(x, y)$ , o espaço de fases, canônico, correspondente é de quatro dimensões, envolvendo as posições  $(x, y)$  e os momentos associados  $(p_x, p_y)$ . As coordenadas de Birkhoff simplificam essa análise, projetando o espaço de fases em mapas de recorrência [22–24], chamados de Seções da Superfície (SOS) de Poincaré. Esses mapas oferecem uma visão simplificada das características dinâmicas, permitindo o estudo de propriedades que seriam mais complexas no espaço de fases completo. Contudo, as Poincaré SOS oferecem apenas uma visão estática da dinâmica, restringindo-se à análise estatística.

Um observável fundamental para capturar as características dinâmicas de um sistema no espaço de fases é o Expoente de Lyapunov (EL), que chamaremos de  $\lambda$ . Este expoente mede a sensibilidade às condições iniciais, indicando a taxa de divergência entre trajetórias inicialmente próximas (Fig. 1.3) [25]. Valores de  $\lambda \leq 0$  indicam sistemas não caóticos, enquanto  $\lambda > 0$  caracteriza sistemas caóticos. O número de expoentes de Lyapunov corresponde às autodireções do espaço de fases. No caso dos bilhares, existem quatro expoentes, mas medir o maior expoente de Lyapunov é suficiente para caracterizar o caos no sistema.

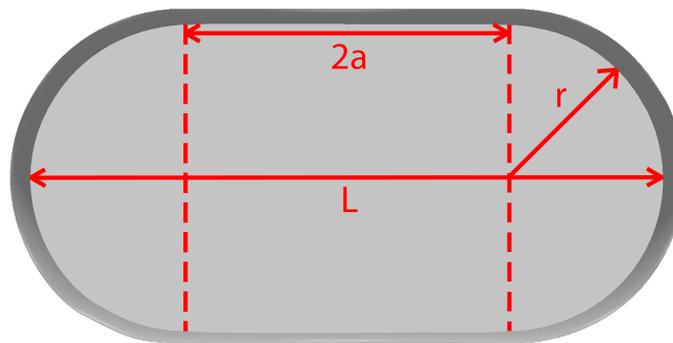


Fig. 1.2 Parâmetros geométricos do BSB.

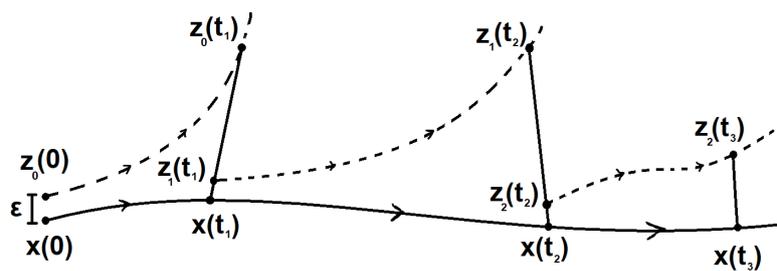


Fig. 1.3 Separação entre duas trajetórias inicialmente próximas, com separação inicial  $\varepsilon$  infinitesimal. Processos de renormalização ocorrem em  $(t_1, t_2, t_3, \dots)$ .

Todo sistema dinâmico é caracterizado por um agente que interage diretamente com o ambiente do sistema. Esse agente pode, por exemplo, ser uma partícula interagindo com um potencial ou cruzando uma região de espalhamento [26, 27]. O objetivo central de estudos nessa área é compreender as características dessas interações e como elas influenciam o comportamento global do sistema. As regras que governam essas interações definem o tipo de sistema, e quando tais regras resultam em respostas não lineares, o sistema é classificado como complexo [28].

Quando o agente do sistema é capaz de converter energia interna ou do ambiente em movimento, ele é denominado "matéria ativa" [29, 30]. Exemplos naturais de sistemas com matéria ativa incluem bandos de pássaros, cardumes de peixes, manadas de animais, o movimento de bactérias em dispersão e o trânsito urbano, etc [31–35]. Além de ser observada na natureza, a matéria ativa tem sido amplamente utilizada em experimentos que modelam sistemas físicos. Estudos sobre comportamento coletivo em grupos de peixes, partículas brownianas ativas e turbulência em sistemas hidrodinâmicos têm demonstrado resultados promissores, evidenciando a versatilidade e a eficácia dessa abordagem em diversas aplicações [36–38].

As tecnologias em matéria ativa possuem diversas ramificações, sendo a robótica uma das mais promissoras. Muitos dos sistemas observados na natureza são mimetizados por robôs [39, 40, 14]. Entre esses sistemas, destaca-se o bilhar dinâmico clássico. Inicialmente, os bilhares dinâmicos clássicos foram concebidos teoricamente, já que, assim como no problema de três corpos, as equações que descrevem o sistema só podem ser resolvidas numericamente. Os primeiros experimentos físicos surgiram no final dos anos 1980, com o uso de cavidades ópticas e de micro-ondas como as principais tecnologias [41, 42]. Esses experimentos apresentam excelente confiabilidade devido às baixas flutuações e à alta quantidade de interações entre a partícula e a superfície em curtos intervalos de tempo [43].

Devido à simplicidade do sistema, ele pode ser reproduzido por um robô que se move em linha reta com velocidade constante e realiza reflexões especulares ao encontrar uma fronteira. Nesse contexto, construímos um robô capaz de reproduzir, com alta fidelidade, o comportamento do BSB.

A construção do robô deve atender à tríade robô-ambiente-tarefa (Fig. 1.4). Essa tríade compreende três elementos principais: o "robô", a "tarefa" e o "ambiente". Alterações em qualquer um desses elementos podem resultar em comportamentos inesperados na interação[39]. O "robô" refere-se à sua construção mecânica, incluindo motores, chassis e sensores. Modificar essa estrutura durante o experimento implica mudanças nos resultados em relação à configuração original. A "tarefa" abrange os algoritmos que controlam o

comportamento do robô; alterações nesses algoritmos também afetam a interação com o ambiente.

Neste trabalho, mantivemos a montagem do robô e sua tarefa em todos os experimentos, concentrando as modificações apenas no ambiente para explorar as características da interação robô-ambiente. O ambiente escolhido foi o estádio de Bunimovich, cujas alterações foram realizadas através do parâmetro de controle geométrico  $\gamma$ . Essa abordagem permite capturar, de maneira controlada, as propriedades dinâmicas desse sistema.

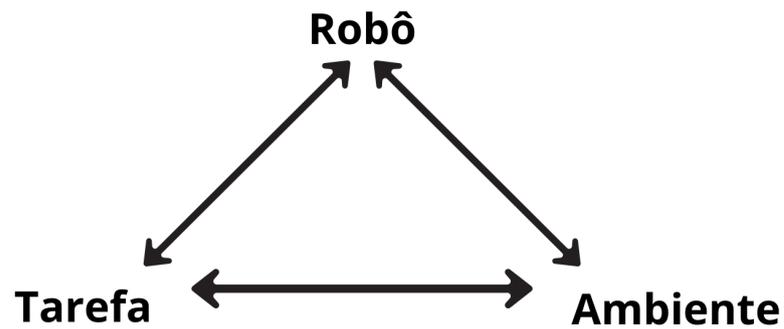


Fig. 1.4 Tríade de experimentos com interação robô-ambiente



# Capítulo 2

## Metodologia

### 2.1 Montagem experimental

Todos os experimentos foram realizados mantendo a mesma programação e montagem do robô, modificando apenas o ambiente de interação.

#### 2.1.1 Montagem do robô

O objetivo do robô é reproduzir o comportamento de uma partícula pontual confinada em uma caixa. Portanto, o robô deve caminhar em linha reta com movimento retilíneo uniforme e realizar reflexões especulares ao encontrar uma parede. Para isso, diferentes motores e sensores foram testados até atingir uma versão confiável.

O robô foi desenvolvido em três versões principais. A primeira versão contava com um chassi retangular e três sensores ultrassônicos dispostos na parte frontal do robô (Fig. 2.1). Dois sensores laterais e um central foram posicionados em ângulos iguais. Essa versão era alimentada por baterias.

A segunda versão sofreu modificações nos sensores (Fig. 2.2). Os sensores laterais foram reposicionados no centro do robô, com dois sensores rotacionados para as laterais em ângulos iguais. Essa mudança buscava reduzir erros causados por ângulos rasos, mas o problema persistiu, inviabilizando os experimentos.

Na terceira versão, os sensores ultrassônicos foram substituídos por sensores infravermelhos (IR), menos sensíveis a ângulos rasos (Fig. 2.3). O chassi foi encurtado, reduzindo o raio de rotação durante as reflexões e permitindo uma melhor exploração do ambiente de interação. Para solucionar problemas com as baterias que causavam muitas oscilações no circuito, o robô foi conectado a uma porta USB. As dimensões finais ficaram: 14 cm de

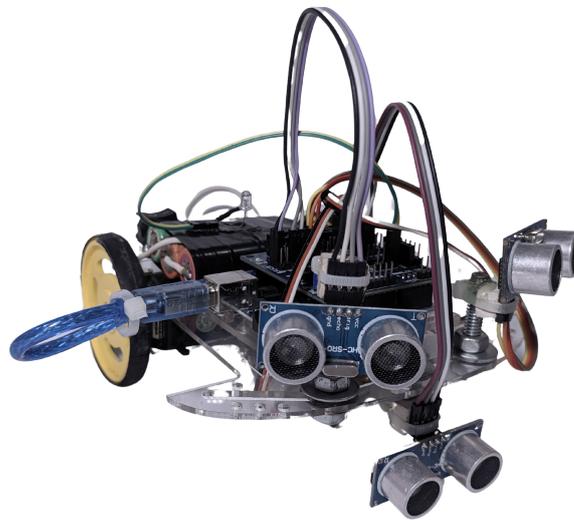


Fig. 2.1 Primeira versão do robô, com chassi retangular e sensores ultrassônicos dispostos na frente. Alimentado por baterias.

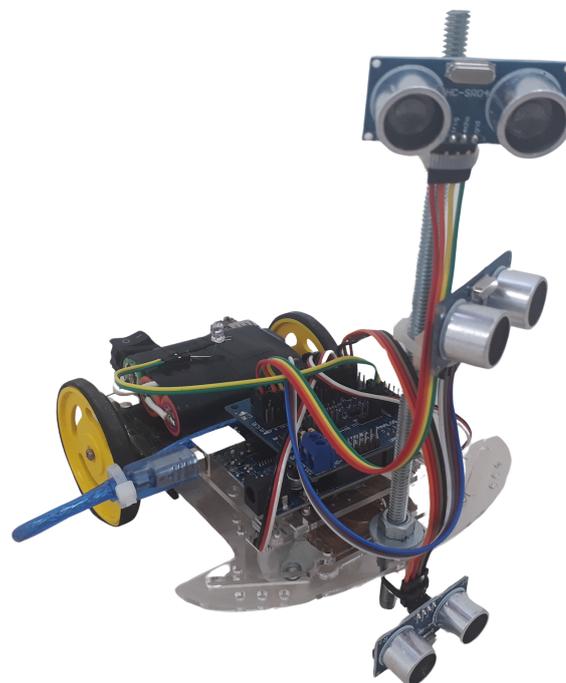


Fig. 2.2 Segunda versão do robô, com sensores ultrassônicos centralizados.

comprimento, 12.5 cm de largura e 16 cm de altura. Mais detalhes da ultima versão do robô são fornecidos na Sec.A.

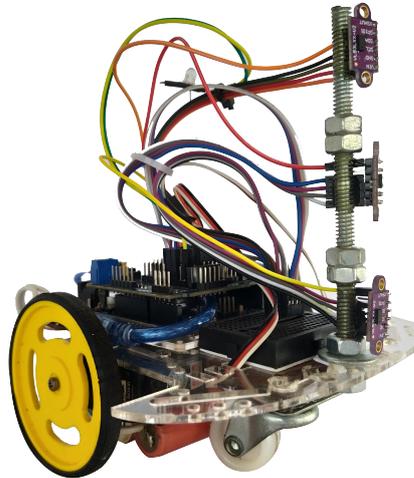


Fig. 2.3 Terceira versão do robô, com chassi reduzido e sensores IR. Alimentado por porta USB.

### 2.1.2 Montagem do experimento

A construção do ambiente de interação foi realizada no piso do laboratório. Todas as formas geométricas que seriam utilizadas foram desenhadas, e, após a verificação das medidas, a barreira foi montada. Inicialmente, a barreira foi construída com fórmica de PVC (Fig. 2.4), utilizando apoios para auxiliar na sustentação do contorno. No entanto, os resultados não foram satisfatórios. Após pouco tempo, a barreira, devido à sua flexibilidade, deformava-se na parte superior, prejudicando a leitura dos sensores do robô, que necessitavam de uma superfície suave.

Optou-se pela utilização de compensado flexível (Fig. 2.5), que possui apenas uma direção de flexibilidade. Assim, o contorno foi montado de acordo com a geometria definida, garantindo que a região de interação apresentasse superfícies suaves. Algumas junções foram necessárias para a montagem da região de interação, mas todas foram realizadas externamente à fronteira, de modo que o robô não interagisse com as junções.

O processo de filmagem foi realizado utilizando uma câmera full HD (1920 × 1080 pixels). A câmera foi posicionada a 2.8 m do experimento, visando evitar distorções ópticas (Fig. 2.5). Nestas configurações, o erro espacial foi estimado em  $\pm 5$  mm.



Fig. 2.4 Experimento com a barreira circular montada com f3rmica de PVC. O rob4o, com o LED amarelo ligado, interage com a barreira (primeira vers4o do rob4o Fig. 2.1).



Fig. 2.5 Bilhar circular montado com compensado flex3vel. O rob4o, com o LED amarelo ligado, interage com a barreira (vers4o final do rob4o Fig. 2.1).

### 2.1.3 Digitalização

A digitalização dos vídeos experimentais foi realizada em duas etapas. Na primeira, utilizou-se a ferramenta multiplataforma de imagem e vídeo *ffmpeg* para separar o vídeo em seus respectivos quadros (*frames*). Na segunda etapa, o software Matlab foi empregado para identificar e rastrear a posição do robô em cada quadro. Para isso, desenvolveu-se um código personalizado que seguia os seguintes passos: abrir as imagens na ordem correta, converter cada imagem para preto e branco, identificar o ponto de máxima luminosidade próximo à posição inicial ou anterior do robô, e finalmente armazenar os dados em um arquivo. Este processo será detalhado na subseção seguinte. O algoritmo de rastreamento possui eficiência de aproximadamente 1 s para cada segundo de vídeo.

#### Tratamento de imagens

As imagens digitais são formadas no sensor de uma câmera, que capta a intensidade luminosa e a converte em correntes elétricas de diferentes intensidades, criando assim a imagem. Estas são compostas por matrizes, onde o número de linhas e colunas dependem das definições e do tamanho do sensor da câmera. Por exemplo, uma filmagem Full HD gera três matrizes com 1080 linhas e 1920 colunas. Um dos padrões adotados na geração de imagem colorida corresponde à associar a cada uma das cores primárias (vermelho, verde e azul) uma matriz correspondendo à sua intensidade. Esse é o chamado padrão RGB para imagens, ver Fig. 2.6. Cada elemento das três matrizes possui 8 bits, com valores que variam de 0 a 255, representando a intensidade das cores em diferentes regiões da imagem. Em imagens preto e branco (P&B), apenas uma matriz é utilizada ao invés das três do padrão RGB. A conversão de RGB para preto e branco não é única, podendo ser personalizada conforme a necessidade. Nas imagens P&B, cada ponto da matriz expressa a intensidade luminosa. Utilizando os mesmos 8 bits das imagens coloridas RGB, definimos o 0 como sendo preto e 255 como sendo branco. Em nosso caso, adotamos a fórmula (ver RGB2Gray)

$$P\&B = 0.299 * R + 0.587 * G + 0.114 * B \quad (2.1)$$

Como as imagens analisadas são em preto e branco, as três matrizes com tamanho  $1920 \times 1080$  que compõem cada quadro dos vídeos dos experimentos foram transformadas em apenas uma, em que os valores representam uma escala de cinza, poupando muita memória e tempo de processamento.

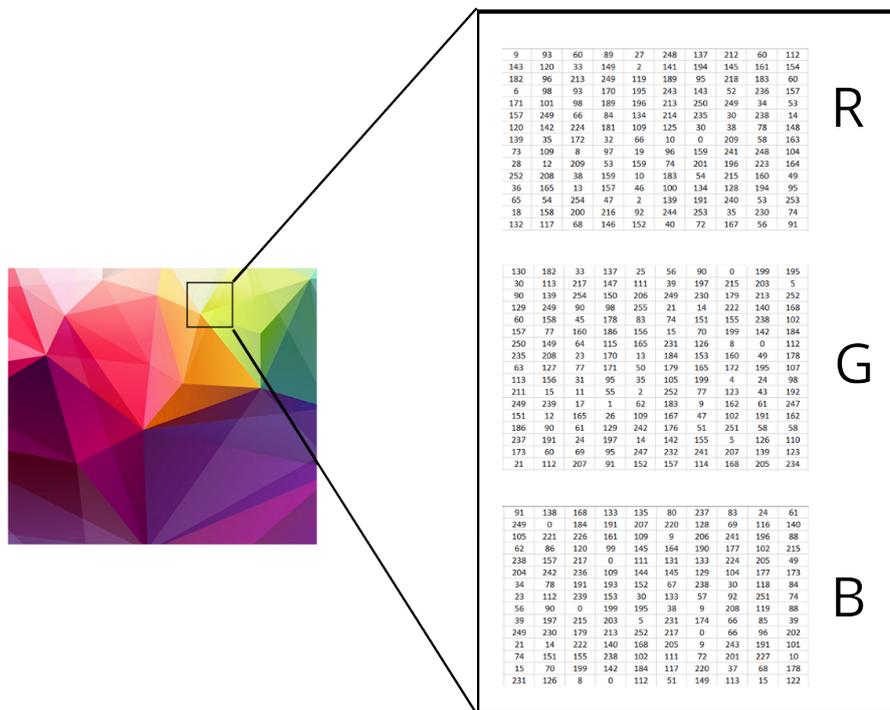


Fig. 2.6 Matrizes RGB que compõem uma imagem de 8 bits por pixel. (Valores meramente ilustrativos)

### 2.1.4 Conjunto experimental

Para construir o ensemble experimental, foram configuradas 6 diferentes geometrias de bilhares (BSB), conforme ilustrado na Tab. 3.1. Cada configuração incluiu 5 realizações experimentais distintas, com duração de 15 minutos cada, sendo as condições iniciais aleatórias em cada realização. O tempo de duração foi escolhido de forma a garantir a convergência dos expoentes de Lyapunov para cada experimento. Este intervalo permitiu, em média, a ocorrência de 200 reflexões em cada configuração do BSB.

## 2.2 Abordagem teórica

### 2.2.1 Bilhar dinâmico clássico

Os bilhares dinâmicos clássicos são sistemas extremamente simples em sua construção, porém ricos em sua dinâmica [16]. Esses sistemas consistem em uma partícula pontual confinada por uma fronteira bem definida, onde a partícula realiza reflexões especulares, conforme ilustrado na Fig. 2.7.

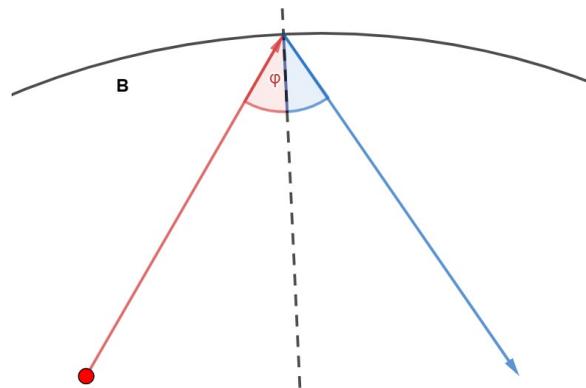


Fig. 2.7 Reflexão típica de um bilhar com sua fronteira  $B$ . As reflexões são sempre especulares, ou seja, o ângulo de incidência  $\varphi$  é igual ao ângulo de reflexão.

A dinâmica do sistema está intrinsecamente ligada à geometria da fronteira. Os bilhares podem apresentar dinâmicas regulares, caóticas ou do tipo "mixing", conforme mostrado na Fig. 2.8. O caso "mixing" é caracterizado pela coexistência de regiões regulares e caóticas no espaço de fases [11].

A riqueza da dinâmica dos bilhares resulta das interações com suas fronteiras. Assim, as informações mais relevantes concentram-se nos pontos de reflexão, e as equações que regem

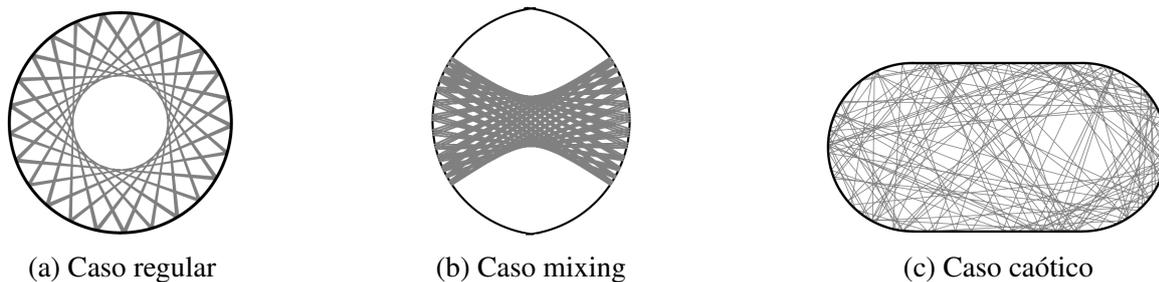


Fig. 2.8 Exemplos de bilhares dinâmicos com diferentes propriedades dinâmicas.

a dinâmica na região livre são:

$$d\mathbf{q} = d\mathbf{q}' + \tau d\mathbf{p}, \quad (2.2)$$

$$d\mathbf{p} = d\mathbf{p}', \quad (2.3)$$

onde  $\mathbf{q}$  são as coordenadas generalizadas,  $\mathbf{p}$  são os momentos generalizados e  $\tau$  é o tempo entre reflexões.

Como mencionado, toda a informação dos bilhares está contida nas interações com a fronteira. Assim, a dinâmica obedece às seguintes equações:

$$d\mathbf{q} = -d\mathbf{q}', \quad (2.4)$$

$$d\mathbf{p} = -d\mathbf{p}' - \frac{2\kappa}{\cos \varphi} |\mathbf{v}| d\mathbf{q}', \quad (2.5)$$

onde  $|\mathbf{v}| = 1$  e  $\kappa$  é o raio de curvatura no ponto de incidência do ângulo  $\varphi$  (Fig. 2.7).

A geometria do bilhar estudado neste trabalho é o estádio de Bunimovich. Esse estádio é formado pela junção de dois semicírculos de raio  $r$ , conectados por dois segmentos de reta de comprimento  $2a$  (Fig. 1.2). O parâmetro de controle geométrico  $\gamma$  é definido como  $\gamma = \frac{a}{r}$ .

Quando  $\gamma = 0$  temos o CSB Fig. 2.8a, a evolução da dinâmica gera uma série temporal regular, em que todos os ângulos de reflexão permanecem constantes e a curvatura da fronteira não varia em nenhuma região. À medida que  $\gamma > 0$ , a evolução das posições torna-se mais complexa (Fig. 2.8c). As séries temporais dos ângulos de incidência  $\varphi$  e da curvatura  $\kappa$  nos pontos de reflexão deixam de ser regulares. Essa complexidade é a origem do caos no estádio de Bunimovich. Por outro lado, quando  $\gamma \rightarrow \infty$ , a geometria aproxima-se de um retângulo, e a partícula interage apenas com as regiões retas entre os semicírculos, retomando uma dinâmica regular.

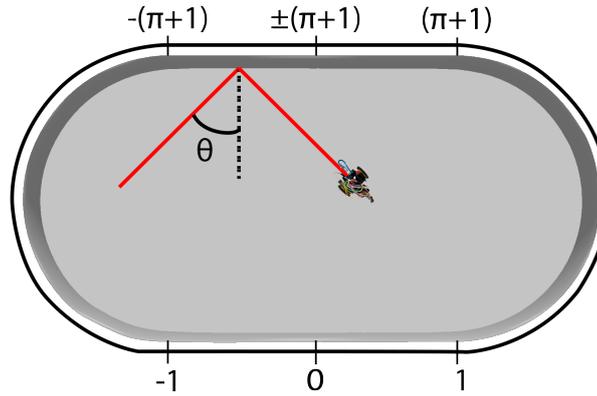


Fig. 2.9 O Estádio de Bunimovich em coordenadas de Birkhoff  $(p, s)$ . Aqui,  $p \in [-2a - \pi r, +2a + \pi r]$  representa a fronteira do bilhar, e  $s = \sin \theta_i \in [-1, +1]$  corresponde à projeção da velocidade, onde  $\theta$  é o ângulo de incidência.

O espaço de fases reflete as características dinâmicas do sistema. A geometria do sistema pode gerar expansão (caso caótico), contração (caso com a soma dos expoentes de Lyapunov negativa) ou estabilidade (caso com expoentes nulos) no espaço de fases.

O espaço de fases pode ser descrito utilizando as coordenadas de Birkhoff (Fig. 2.9) Ref.[21]. Essas coordenadas consideram apenas os pontos de interação com a fronteira, os quais contêm todas as informações da dinâmica do sistema. As coordenadas de Birkhoff geram as SOS de Poincaré. As simetrias geométricas do estádio de Bunimovich estão diretamente relacionadas às simetrias emergentes no espaço de fases. Por exemplo, as simetrias de reflexão em torno dos eixos horizontal e vertical do estádio geram padrões simétricos nas SOS de Poincaré. Portanto, é possível estudar a riqueza dos bilhares num espaço com dimensão reduzida sem que haja perda de características do sistema [22–24, 44].

### 2.2.2 Expoentes de Lyapunov

Sistemas caóticos apresentam sensibilidade às condições iniciais. Pequenas modificações nessas condições geram soluções no espaço de fases que rapidamente divergem das soluções originais [45]. Assim, torna-se extremamente difícil realizar previsões em sistemas caóticos, pois, dependendo do sistema e das ferramentas usadas para solucioná-lo, os erros procedimentais podem perturbar a dinâmica. A divergência entre trajetórias no espaço de fases é do tipo exponencial e pode ser representada por  $|\zeta(t)| \sim |\zeta_0| \exp(\lambda t)$ , onde  $\zeta$  é o vetor diferença entre as trajetórias divergentes. Define-se, então, os expoentes de Lyapunov como:

$$\lambda = \lim_{\substack{t \rightarrow \infty \\ |\zeta_0| \rightarrow 0}} \frac{1}{t} \ln \left( \frac{|\zeta(t)|}{|\zeta_0|} \right). \quad (2.6)$$

Note que o vetor  $\zeta$  pertence ao espaço de fases  $n$ -dimensional. Portanto, teremos  $n$  expoentes de Lyapunov de acordo com os graus de liberdade do sistema. Cada expoente de Lyapunov está associado a uma autodireção do espaço de fases, sendo assim o conjunto de todos os expoentes chamado de espectro de Lyapunov [25]:

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n. \quad (2.7)$$

Quantificamos o caos ao observarmos que, no espectro de Lyapunov, ao menos um dos expoentes apresenta valor positivo. O valor positivo indica uma divergência em uma das autodireções do sistema no espaço de fases. Se mais de um expoente for positivo, chamamos esses sistemas de hipercaóticos. Já nos casos em que todos os expoentes são não positivos, o sistema é dito regular.

Considere um sistema dinâmico genérico regido pelas seguintes equações diferenciais ordinárias (EDOs):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_N), \\ &\vdots \\ \dot{x}_N &= f_N(x_1, x_2, \dots, x_N), \end{aligned} \quad (2.8)$$

ou, de forma mais compacta:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)), \quad (2.9)$$

onde  $\mathbf{x}(t) = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ .

Dada uma condição inicial  $\mathbf{x}(0)$  e qualquer outra próxima a ela, diferindo apenas por um valor infinitesimal  $\delta\mathbf{x}(0)$ , a evolução das diferenças pode ser escrita como:

$$\delta\mathbf{x}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t) + \delta\mathbf{x}(t)) - \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)) \approx \left. \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*} \delta\mathbf{x}(t). \quad (2.10)$$

A equação (2.10) é equivalente a:

$$\delta\dot{\mathbf{x}} = J(\mathbf{x}, t) \delta\mathbf{x}, \quad (2.11)$$

onde  $J(\mathbf{x}, t)$  é a matriz jacobiana que contém as primeiras derivadas parciais da função vetorial  $\mathbf{F}(\mathbf{x}(t))$ . Essa matriz fornece os coeficientes do sistema de equações. A solução da equação (2.11) será:

$$\delta\mathbf{x}(t) = H(\mathbf{x}_0, t) \delta\mathbf{x}(0), \quad (2.12)$$

onde:

$$H(\mathbf{x}, t) = \exp\left(\int_0^t J(\mathbf{x}, t') dt'\right). \quad (2.13)$$

Com as equações (2.6) e (2.13), conseguimos estimar os expoentes de Lyapunov de qualquer sistema dinâmico que possua equações do tipo (2.8).

Existem diversos métodos na literatura para a obtenção dos LE. Neste trabalho, dado que possuímos as equações do sistema como em (2.8), utilizamos o método do mapa tangente [46]. Esse método é considerado extremamente confiável, pois mede os expoentes de Lyapunov diretamente das equações que descrevem as variações em cada autodireção do sistema. Assim, evitamos problemas como ortogonalização e definição de parâmetros arbitrários, necessários em outros métodos.

No método do mapa tangente, a cada passo de tempo, as matrizes jacobianas da equação (2.11) são reescritas de acordo com as configurações do bilhar. Algumas simplificações neste sistema, descritas em [17], reduzem essas matrizes de  $4 \times 4$  para matrizes  $2 \times 2$ . Quando não há colisões, a matriz jacobiana é:

$$J_0 = \begin{bmatrix} 1 & \tau \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.14)$$

onde  $\tau$  é o tempo de voo livre entre duas reflexões. Quando existem colisões, o comportamento das diferenças é dado por:

$$J_r = - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2\kappa}{\cos\phi} & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.15)$$

O sistema possui dois possíveis valores para  $\kappa$ . Quando a reflexão ocorre na região reta, temos  $\kappa = 0$ , e, caso contrário,  $\kappa = \frac{1}{R}$ , onde  $R$  é o raio de curvatura da superfície.

Assim, utilizamos as equações acima para modelar as interações robô-ambiente. Nosso interesse está no maior expoente de Lyapunov do sistema, pois este já é suficiente para revelar informações sobre a caoticidade do sistema. As informações necessárias para o cálculo incluem o tempo entre colisões, os ângulos de incidência, os raios de curvatura e as velocidades entre as colisões. Todas essas informações serão retiradas das séries temporais de posição temporal da interação robô-ambiente. Para garantir consistência, o sistema deve ser normalizado para que a média do módulo da velocidade seja unitária, conforme usado no modelo.



# Capítulo 3

## Resultados e Discussões

A Fig. 3.1 apresenta o resultado da digitalização de um experimento com 15 minutos de duração, totalizando, em média, 27.000 pontos no plano  $(x, y)$  da trajetória (pontos vermelhos na imagem). O BSB da Fig. 3.1 possui o parâmetro  $\gamma = 1.56$ , e observa-se uma região próxima à fronteira que é inacessível ao robô. Isso ocorre devido ao tamanho físico do robô. Note que, na Fig. 2.3, o LED de rastreamento está posicionado próximo ao eixo dos motores, enquanto os sensores de distância estão localizados na frente do robô. Isso gera um comprimento característico de reflexão (aproximadamente 6.5 cm), que impede o robô de se aproximar da fronteira a uma distância menor que este comprimento sem contato físico.

Esse comprimento característico cria um BSB efetivo para a trajetória realizada pelo robô durante o experimento. Como ilustrado na Fig. 3.1, a trajetória em vermelho apresenta um parâmetro geométrico  $r$  menor que o BSB montado, gerando um novo parâmetro de controle geométrico efetivo. Este será referido como  $\gamma_{eff}$ , obtido diretamente das trajetórias realizadas pelo robô. Observa-se que  $\gamma_{eff} > \gamma$ , com uma diferença média de aproximadamente 5%.

Table 3.1 Parâmetros geométricos utilizados nos experimentos, conforme a Fig. 1.2. Em todos os conjuntos de parâmetros, a área é mantida constante e igual a  $A_0 = r_0^2 (\pi + 4) = 2.57 \text{ m}^2$ . As colunas apresentam, da esquerda para a direita: o raio  $r$ , o comprimento lateral  $a$ , o comprimento total  $L = 2a + 2r$ , o parâmetro de controle experimental  $\gamma$ , o parâmetro efetivo  $\gamma_{eff}$ , bem como os expoentes de Lyapunov numéricos  $\lambda_{num}$  e experimentais  $\lambda_{exp}$ .

$r$ (cm)	$a$ (cm)	$L$ (m)	$\gamma$	$\gamma_{eff}$	$\lambda_{num}$	$\lambda_{exp}$
90.0	0.0	1.80	0.00	0.00	$0.00 \pm 0.01$	$0.03 \pm 0.03$
70.0	37.0	2.14	0.53	0.55	$0.40 \pm 0.01$	$0.36 \pm 0.01$
60.0	60.0	2.40	1.00	1.08	$0.43 \pm 0.01$	$0.47 \pm 0.02$
50.0	89.0	2.78	1.79	1.84	$0.43 \pm 0.01$	$0.42 \pm 0.03$
45.0	107.0	3.04	2.39	2.50	$0.42 \pm 0.01$	$0.39 \pm 0.03$
40.0	129.0	3.38	3.23	3.65	$0.40 \pm 0.02$	$0.43 \pm 0.03$

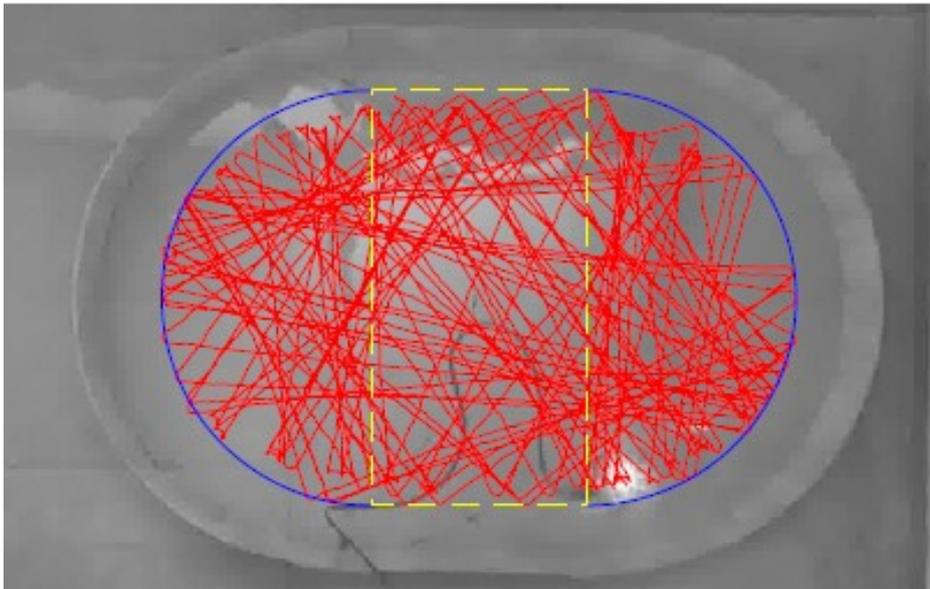


Fig. 3.1 Imagem em preto e branco do BSB para o parâmetro de controle  $\gamma_{eff} = 0.56$ . Em vermelho, é mostrada a trajetória do robô ao longo de 15 minutos, registrada a 30 quadros por segundo. Em azul, destacam-se as fronteiras semicirculares efetivas, e, em amarelo, o retângulo central com comprimento lateral igual a  $2a$ .

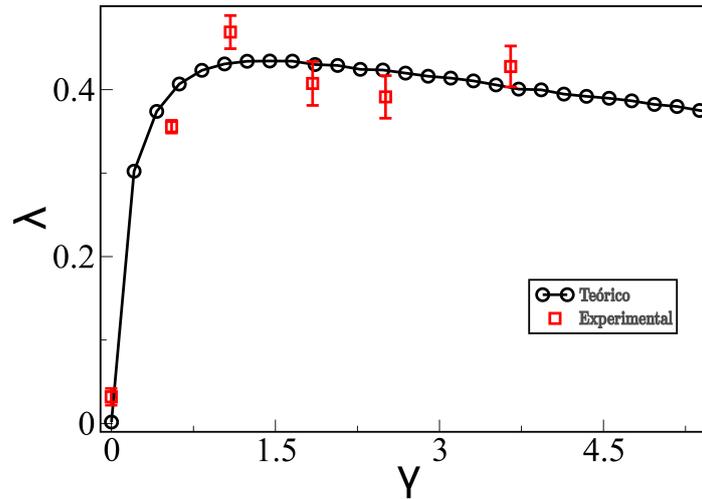


Fig. 3.2 EL  $\lambda$  em função do parâmetro de controle  $\gamma$ . Os círculos pretos abertos representam os resultados numéricos para a BSB teórico. Os quadrados vermelhos abertos correspondem aos resultados experimentais do BSB.

Embora o tamanho físico do robô imponha algumas limitações, ele pode ser aproximado a uma partícula pontual, dado que suas dimensões são muito menores que as da região de interação. O robô possui uma área de  $1.75 \times 10^{-3} \text{ m}^2$ , o que equivale a apenas 1% da área total  $A$  da região de interação, como indicado na Tabela 3.1. Portanto, ele é uma ferramenta adequada para modelar o BSB.

Na Fig. 3.2, observa-se que o BSB experimental reproduz, com fidelidade, o comportamento do BSB resolvido numericamente, reportado por Benettin e Strelcyn Ref.[9]. Os círculos pretos representam os resultados numéricos do expoente de Lyapunov para o BSB teórico, enquanto os quadrados vermelhos representam o BSB experimental. O resultado experimental foi calculado usando um método numérico, mapa tangente, sendo as matrizes jacobianas 2.14 e 2.15 alimentadas com dados experimentais. Esta é a única maneira de quantificar caos de sistemas experimentais usando o método do mapa tangente. O erro experimental foi calculado com base na média das realizações experimentais, conforme descrito na Sec. 2.1. O comportamento não caótico é evidente quando  $\gamma_{eff} \approx 0$ , com o expoente de Lyapunov crescendo rapidamente até atingir um máximo em  $\gamma_{eff} \approx 1.0$ , seguido por uma redução quando  $\gamma_{eff} \rightarrow \infty$ , consistente com as previsões teóricas mostradas Sec.2.2.1. Este experimento representa uma das primeiras demonstrações macroscópicas que reproduzem, de maneira fiel, os bilhares dinâmicos clássicos.

As flutuações experimentais são observadas de diversas formas, sendo uma delas através das SOS de Poincaré. As SOS capturam variações nos ângulos e nos pontos de reflexão ao longo da fronteira do bilhar. Na Fig. 3.3, apresentamos um conjunto de SOS de Poincaré. A

Fig. 3.3a mostra o resultado teórico para duas condições iniciais diferentes no CSB teórico, como esperado [23]. Nos pontos positivos do eixo  $y$ , as reflexões ocorrem apenas no sentido anti-horário, com  $s = \sin \varphi$  permanecendo constante, mesmo com interações ao longo de toda a fronteira ( $p$ ). Já os pontos negativos do eixo  $y$  indicam reflexões exclusivamente no sentido horário. No CSB experimental, representado na Fig. 3.3b, há flutuações significativas nos ângulos de reflexão; no entanto, a maior densidade dos pontos se mantém em regiões específicas ao longo do eixo  $y$ . Essas flutuações geram orbitas quase periódicas no espaço de fases, mas estas permanecem limitadas sem divergirem umas das outras, confirmando assim as características previstas pelo teorema de Kolmogorov–Arnol’d-Moser (KAM) [5, 47]. Um resultado semelhante já foi reportado em uma experimento com cavidade óptica [5].

Para aumentar a densidade dos pontos nas SOS experimentais, utilizamos as simetrias do bilhar de Bunimovich: reversão temporal e simetria de quadrantes. A reversão temporal permite inverter o sinal de  $s$ , enquanto as simetrias geométricas garantem que reflexões em um quadrante sejam equivalentes em todos os demais. Dessa forma, as simetrias são aplicadas como:  $(p, s) \rightarrow (p, -s) \rightarrow (-p, s) \rightarrow (-p, -s)$ . Com isso, os dados das SOS, que inicialmente possuíam 200 pontos de reflexão, são ampliados para 800 pontos.

As Fig. 3.3c e Fig. 3.3d mostram as SOS do BSB teórico e experimental, respectivamente. No BSB teórico (Fig. 3.3c), o SOS de Poincaré é completamente preenchido em uma única realização, validando a hipótese ergódica para o sistema. No BSB experimental (Fig. 3.3d), observa-se um comportamento semelhante, exceto por algumas regiões específicas. A região em  $(p \approx 0, s \approx 0)$  corresponde a reflexões perpendiculares nas semi-retas do BSB, criando ilhas de estabilidade no espaço de fases. Outras regiões, como  $(p \approx \pm(1 + \pi/2), s \approx \pm 1)$ , representam os polos semicirculares, onde reflexões em ângulos rasos são impedidas pelas dimensões físicas do robô. Apesar dessas limitações, as SOS do CSB e BSB experimental mantêm características dinâmicas equivalentes às do CSB e BSB teórico.

Para revelar algumas propriedades efetivas dos sistemas [5], discutidas na Sec.2.2.2, construímos as SOS de Poincaré temporais. Na Fig. 3.4, analisamos como duas trajetórias inicialmente próximas evoluem no espaço de fases, representado pelas SOS de Poincaré. Para o CSB teórico (Fig. 3.4a), as trajetórias mantêm-se próximas ao longo do tempo, confirmando a ausência de comportamento caótico. Já no CSB experimental (Fig. 3.4b), as flutuações nos ângulos e nas posições de reflexão geradas experimentalmente não são suficientes para causar divergência entre as trajetórias vizinhas, em concordância com o teorema de KAM [5, 47].

Nas Figs. 3.4c e 3.4d, analisamos o comportamento no BSB teórico e experimental, respectivamente. Para o BSB teórico com  $\gamma = 1.0$  (Fig. 3.4c), observa-se que, após poucas interações, as trajetórias inicialmente próximas divergem rapidamente, caracterizando a

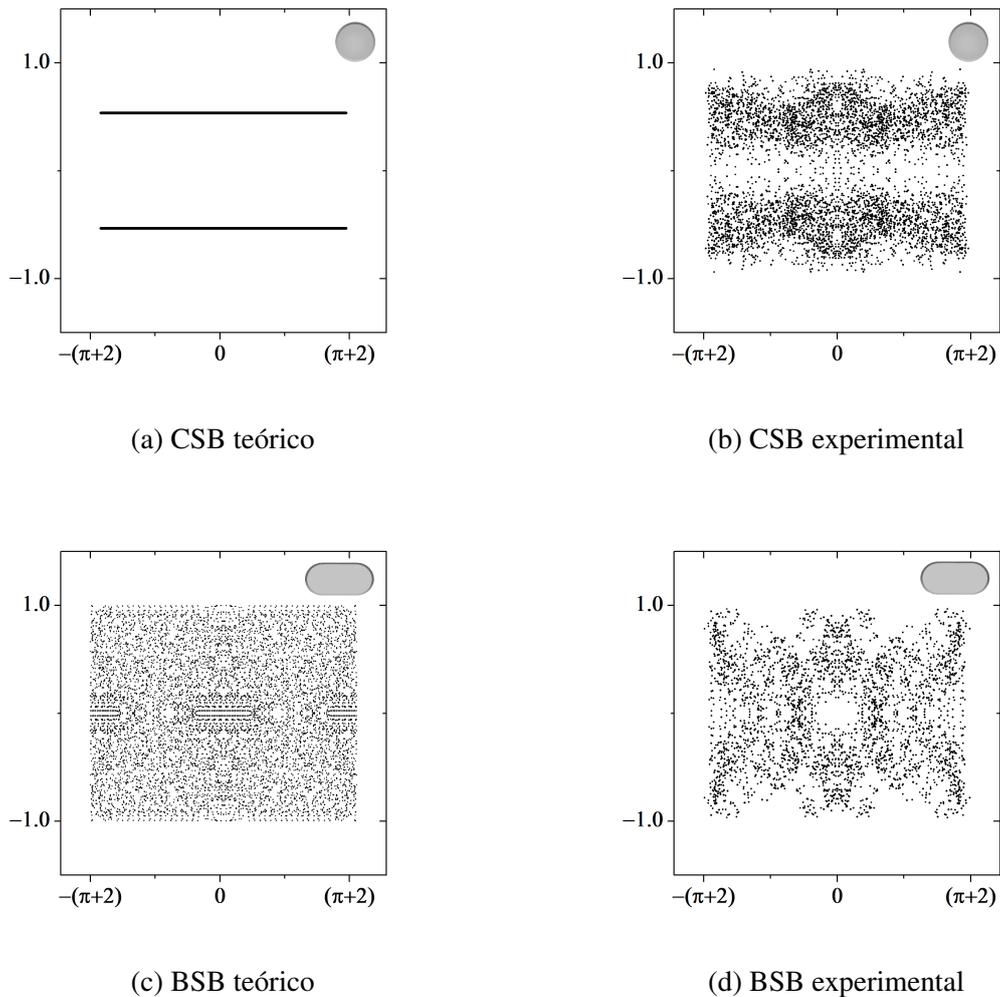
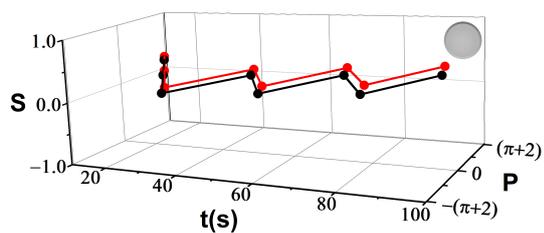
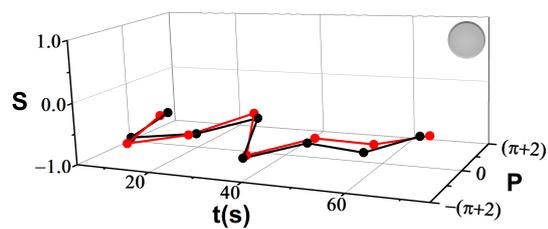


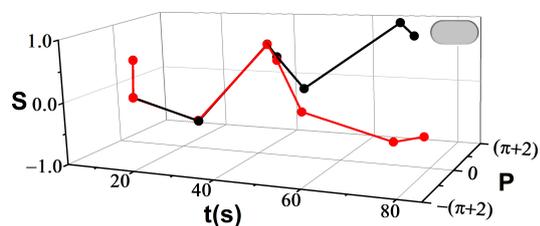
Fig. 3.3 Poincaré SOS para: (a) CSB teórico, (b) CSB experimental, (c) BSB teórico e (d) BSB experimental. Utilizamos as coordenadas de Birkhoff  $(p, s)$ , onde  $p$  é o comprimento de arco na fronteira, e  $s$  é a projeção do vetor velocidade. O domínio dessas variáveis é  $p \in [-2a - \pi r, +2a + \pi r]$ . Para detalhes geométricos, consulte a Fig. 1.2.



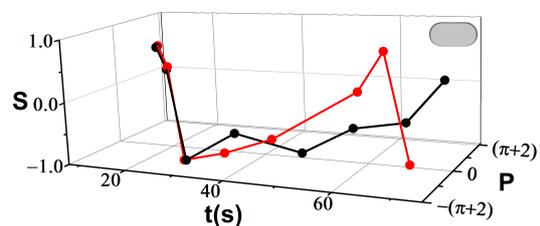
(a) CSB teórico



(b) CSB experimental



(c) BSB teórico



(d) BSB experimental

Fig. 3.4 Dinâmica das SOS para as primeiras oito colisões na parede, considerando duas condições iniciais próximas (vermelho e preto). Os gráficos (a) e (b) correspondem a um CSB, enquanto (c) e (d) referem-se a um BSB.

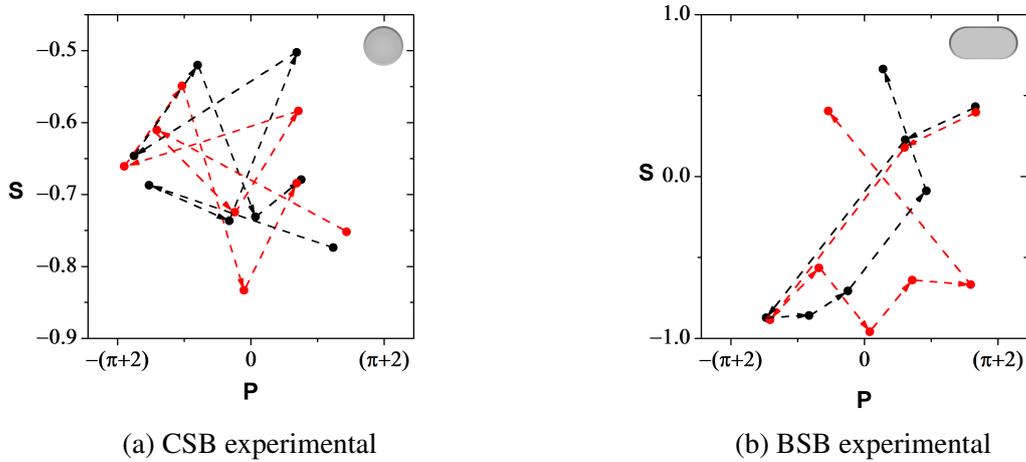


Fig. 3.5 Representação das SOS de Poincaré para as trajetórias do CSB e BSB experimentais. As trajetórias no CSB experimental (a) mostram flutuações limitadas em  $s$ , enquanto as do BSB experimental (b) divergem rapidamente, evidenciando comportamento caótico.

dinâmica caótica do sistema. Um comportamento análogo é visto no BSB experimental com  $\gamma_{eff} = 1.08$  (Fig. 3.4d), onde a divergência entre trajetórias é evidente já nas primeiras três reflexões.

As Figs. 3.5a e 3.5b mostram a evolução da distribuição dos pontos nas SOS de Poincaré para o CSB e BSB experimentais, respectivamente. No caso do CSB experimental, as trajetórias apresentam pequenas flutuações nos valores de  $s$ , mas permanecem próximas nos valores de  $p$ , indicando um comportamento regular. Por outro lado, as trajetórias no BSB experimental divergem rapidamente tanto em  $p$  quanto em  $s$ , exibindo um comportamento caracteristicamente caótico [5].

Com base nas análises apresentadas, o comportamento dinâmico observado nos experimentos é consistente com as propriedades ergódicas e caóticas esperadas para bilhares de Bunimovich [11, 5]. As SOS obtidas experimentalmente reproduzem as características teóricas dos sistemas teóricos, mesmo considerando as limitações físicas do robô e as flutuações inerentes ao processo experimental. Essas observações reforçam a aplicabilidade do método de interação robô-ambiente como modelo experimental para o estudo de bilhares dinâmicos clássicos em escalas macroscópicas.



# Capítulo 4

## Conclusão

Neste trabalho conseguimos mimicar a dinâmica da partícula no estádio de Bunimovich experimentalmente [48]. Seis experimentos, com configurações diferentes, mostram que as características dinâmicas do sistema são presentes nos experimentos. Quantificamos os expoentes de Lyapunov dos dados experimentais, via método do mapa tangente, e estes mostram completo acordo com o estabelecido na literatura.

Completamos a caracterização do sistema com a construção dos seus espaço de fases via Poincaré SOS. Os espaços de fases mostram um desvio entre o bilhar experimental e o teórico. Mostramos que os desvios no espaço de fases são derivados de flutuações, nas reflexões e nos voos livres entre colisões, e devido à limitação física do robô, que limita o acesso a algumas regiões do espaço de fases. O espaço de fases em função do tempo mostra a divergência entre trajetórias inicialmente vizinhas no BSB e, no CSB, as trajetórias, apesar de flutuarem, não divergem.

Este trabalho mostra que a tecnologia de interação robô-ambiente é uma boa plataforma para reproduzir sistemas dinâmicos complexos. O sucesso experimental nos bilhares dinâmicos clássicos mostram um novo caminho experimental a ser desbravado. Novas formas geométricas, bilhares com paredes elásticas, problemas de escapamento, novas regras de reflexão, etc. Nossos resultados mostram que os problemas teóricos agora podem ser bem validados experimentalmente com as interações robô-ambiente.



# Referências

- [1] Takashi Hikihara, Philip Holmes, Tsutomu Kambe, and Giuseppe Rega. Introduction to the focus issue: Fifty years of chaos: Applied and theoretical. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 22(4):047501, 12 2012.
- [2] H Poincaré. Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique *acta mathematica. Acta Mathematica*, 13(1-2), 1890.
- [3] Yoshisuke Ueda, Ralph H Abraham, and H Bruce Stewart. *The road to chaos*. Aerial Press, 1992.
- [4] Edward N. Lorenz. Deterministic nonperiodic flow. *J. Atmos. Sci.*, 20(2):130–141, mar 1963.
- [5] Linran Fan, Xiaodong Yan, Han Wangand, and Lihong V. Wang. Real-time observation and control of optical chaos. *Sci. Adv.*, 7(3):eabc8448, 2021.
- [6] A. Z. Ivanović, Ž. D. Čupić, M. M. Janković, Lj. Z. Kolar-Anić, and S. R. Anić. The chaotic sequences in the bray–liebhaufsky reaction in an open reactor. *Phys. Chem. Chem. Phys.*, 10:5848–5858, 2008.
- [7] Nelson De Leon and B.J. Berne. Reaction dynamics in an ergodic system: the siamese stadium billiard. *Chem. Phys. Lett.*, 93(2):162–168, 1982.
- [8] Xizhe Zang, Sajid Iqbal, Yanhe Zhu, Xinyu Liu, and Jie Zhao. Applications of chaotic dynamics in robotics. *Int. J. Adv. Robot. Syst.*, 13(2):60, mar 2016.
- [9] G. Benettin and J. M. Strelcyn. Numerical experiments on the free motion of a point mass moving in a plane convex region: Stochastic transition and entropy. *Phys. Rev. A*, 17:773–785, Feb 1978.
- [10] Ch. Dellago and H. A. Posch. Lyapunov exponents of systems with elastic hard collisions. *Phys. Rev. E*, 52:2401–2406, Sep 1995.
- [11] Ch. Dellago and H.A. Posch. Kolmogorov-Sinai entropy and Lyapunov spectra of a hard-sphere gas. *Physica A*, 240(1):68–83, 1997.
- [12] Vasily Kantsler, Jörn Dunkel, Marco Polin, and Raymond E. Goldstein. Ciliary contact interactions dominate surface scattering of swimming eukaryotes. *PNAS*, 110(4):1187–1192, 2013.
- [13] Xiaojian Yu and Yu Zhang. Ray chaos in an architectural acoustic semi-stadium system. *Chaos*, 23(1):013107, 2013.

- [14] Lorenzo Garattoni and Mauro Birattari. Autonomous task sequencing in a robot swarm. *Sci. Robot.*, 3(20):eaat0430, jul 2018.
- [15] Carl P. Dettmann and Orestis Georgiou. Survival probability for the stadium billiard. *Physica D*, 238(23-24):2395–2403, dec 2009.
- [16] Yakov G Sinai. Dynamical systems with elastic reflections. *Russ. Math. Surv.*, 25(2):137–189, apr 1970.
- [17] N. Chernov and R. Markarian. *Chaotic Billiards*. Mathematical Surveys and Monographs. American Mathematical Society, 2023.
- [18] L. A. Bunimovich. On ergodic properties of certain billiards. *Funct. Anal. its Appl.*, 8(3):254–255, 1974.
- [19] Michael Drexler and Martin J. Gander. Circular billiard. *SIAM Review*, 40(2):315–323, jan 1998.
- [20] M.W. Hirsch, S. Smale, and R.L. Devaney. *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos*. Pure and Applied Mathematics - Academic Press. Elsevier Science, 2004.
- [21] George D. Birkhoff. On the periodic motions of dynamical systems. *Acta Math.*, 50(0):359–379, 1927.
- [22] Gregor Tanner. How chaotic is the stadium billiard? A semiclassical analysis. *J. Phys. A*, 30(8):2863–2888, 1997.
- [23] V. Lopac, I. Mrkonjić, N. Pavin, and D. Radić. Chaotic dynamics of the elliptical stadium billiard in the full parameter space. *Physica D*, 217(1):88–101, 2006.
- [24] Juan Carlos Albahaca. *Analytical and Numerical Study of the Poincaré; Map with Applications on the Computation of Periodic Orbits*. PhD thesis, Uppsala University, Applied Mathematics and Statistics, 2015.
- [25] Arkady Pikovsky and Antonio Politi. *Lyapunov Exponents: A Tool to Explore Complex Dynamics*. Cambridge University Press, 2016.
- [26] Anderson L. R. Barbosa, Tiago H. V. de Lima, Iván R. R. González, Nathan L. Pessoa, Antônio M. S. Macêdo, and Giovani L. Vasconcelos. Turbulence hierarchy and multifractality in the integer quantum hall transition. *Phys. Rev. Lett.*, 128:236803, Jun 2022.
- [27] Diego B. Fonseca, Anderson L. R. Barbosa, and Luiz Felipe C. Pereira. Lévy flight for electrons in graphene in the presence of regions with enhanced spin-orbit coupling. *Phys. Rev. B*, 110:075421, Aug 2024.
- [28] Alexander F. Siegenfeld and Yaneer Bar-Yam. An introduction to complex systems science and its applications. *Complexity*, 2020(1):6105872, 2020.
- [29] Sriram Ramaswamy. The mechanics and statistics of active matter. *Annual Review of Condensed Matter Physics*, 1(Volume 1, 2010):323–345, 2010.

- [30] Suraj Shankar, Anton Souslov, Mark J Bowick, M Cristina Marchetti, and Vincenzo Vitelli. Topological active matter. *Nature Reviews Physics*, 4(6):380–398, 2022.
- [31] Clemens Bechinger, Roberto Di Leonardo, Hartmut Löwen, Charles Reichhardt, Giorgio Volpe, and Giovanni Volpe. Active particles in complex and crowded environments. *Reviews of modern physics*, 88(4):045006, 2016.
- [32] Hangjian Ling, Guillam E McIvor, Kasper van der Vaart, Richard T Vaughan, Alex Thornton, and Nicholas T Ouellette. Costs and benefits of social relationships in the collective motion of bird flocks. *Nature ecology & evolution*, 3(6):943–948, 2019.
- [33] Andrea Cavagna, Alessio Cimorelli, Irene Giardina, Giorgio Parisi, Raffaele Santagati, Fabio Stefanini, and Massimiliano Viale. Scale-free correlations in starling flocks. *PNAS*, 107(26):11865–11870, 2010.
- [34] Michele Ballerini, Nicola Cabibbo, Raphael Candelier, Andrea Cavagna, Evaristo Cisbani, Irene Giardina, Alberto Orlandi, Giorgio Parisi, Andrea Procaccini, Massimiliano Viale, et al. Empirical investigation of starling flocks: a benchmark study in collective animal behaviour. *Animal behaviour*, 76(1):201–215, 2008.
- [35] Kilian Dietrich, Nick Jaensson, Ivo Buttinoni, Giorgio Volpe, and Lucio Isa. Microscale marangoni surfers. *Physical review letters*, 125(9):098001, 2020.
- [36] Antonio R de C Romaguera, João VA Vasconcelos, Luis G Negreiros-Neto, Nathan L Pessoa, Jadson F da Silva, Pabyton G Cadena, Aduino JF de Souza, Viviane M de Oliveira, and Anderson LR Barbosa. Multifractal fluctuations in zebrafish (danio rerio) polarization time series. *The European Physical Journal E*, 47(5):29, 2024.
- [37] Pawel Romanczuk, Markus Bär, Werner Ebeling, Benjamin Lindner, and Lutz Schimansky-Geier. Active brownian particles: From individual to collective stochastic dynamics. *The European Physical Journal Special Topics*, 202:1–162, 2012.
- [38] Igor S Aranson. Bacterial active matter. *Reports on Progress in Physics*, 85(7):076601, jun 2022.
- [39] Ulrich Nehmzow and Keith Walker. Quantitative description of robot–environment interaction using chaos theory. *Robot. Auton. Syst.*, 53(3):177–193, 2005.
- [40] Ch.K. Volos, I.M. Kyprianidis, and I.N. Stouboulos. A chaotic path planning generator for autonomous mobile robots. *Robot. Auton. Syst.*, 60(4):651–656, 2012.
- [41] RE Prange and Shmuel Fishman. Experimental realizations of kicked quantum chaotic systems. *Physical review letters*, 63(7):704, 1989.
- [42] H-J Stöckmann and J Stein. “quantum”chaos in billiards studied by microwave absorption. *Physical review letters*, 64(19):2215, 1990.
- [43] Linran Fan, Xiaodong Yan, Han Wang, and Lihong V Wang. Real-time observation and control of optical chaos. *Sci. Adv.*, 7(3):eabc8448, 2021.
- [44] Hui Cao and Jan Wiersig. Dielectric microcavities: Model systems for wave chaos and non-hermitian physics. *Rev. Mod. Phys.*, 87(1):61–111, jan 2015.

- 
- [45] A. Vulpiani, F. Cecconi, and M. Cencini. *Chaos: From Simple Models To Complex Systems*. Series On Advances In Statistical Mechanics. World Scientific Publishing Company, 2009.
- [46] Diogo C. Soriano, Filipe I. Fazanaro, Ricardo Suyama, José Raimundo De Oliveira, Romis Attux, and Marconi K. Madrid. A method for Lyapunov spectrum estimation using cloned dynamics and its application to the discontinuously-excited FitzHugh-Nagumo model. *Nonlinear Dyn.*, 67(1):413–424, 2012.
- [47] Jens U. Nöckel and A. Douglas Stone. Ray and wave chaos in asymmetric resonant optical cavities. *Nature*, 385:45–47, 1997.
- [48] JVA Vasconcelos, LH Miranda-Filho, AJF de Souza, AR de C. Romaguera, and ALR Barbosa. Interaction between a robot and bunimovich stadium billiards. *Scientific Reports*, 12(1):4983, 2022.

# Apêndice A

## Desenvolvimento do robô

### A.1 Descrição do robô

Precisamos desenvolver um robô móvel que seja fiel ao comportamento de uma partícula em uma caixa bidimensional, ou seja, o robô deve se mover livremente em linha reta, com velocidade constante, e realizar reflexões especulares ao atingir os limites.

### A.2 Plataforma de prototipagem eletrônica

Utilizamos a plataforma Arduino, tanto software quanto hardware, para o desenvolvimento do robô Fig.2.3. As partes usadas no robô são detalhadas na Tab.A.1.

Table A.1 Partes eletrônicas usadas na construção do robô

<b>Arduino UNO</b>	Placa microcontroladora.
<b>Shield V5.0</b>	Extensor de conexões.
<b>43R Servo (360°)</b>	Servo-motor de passo.
<b>Infrared sensor VL53L0X</b>	Time-of-Flight (ToF) módulo laser.
<b>Mini breadboard</b>	Extensor de conexões.

#### A.2.1 Arduino UNO

O Arduino UNO foi a placa de prototipagem escolhida para o nosso robô. Esta, é facilmente programável através do software de código aberto Arduino IDE. A programação baseia-se em uma versão simplificada do C++, mas a programação é feita inteiramente

na linguagem própria do Arduino. O IDE possui suas próprias bibliotecas e funções para integrar dispositivos microcontroladores.

### **A.2.2 Shield V5.0 e Mini breadboard**

O Shield funciona como uma extensão das conexões do Arduino UNO, permitindo o uso dos motores sem a necessidade de muitos cabos. A breadboard também desempenha esse papel, além de estender as conexões, permite ligações em série e em paralelo.

### **A.2.3 Servo 43R (360°)**

O uso de um motor de passo aumenta significativamente a precisão do deslocamento e das reflexões do robô. Ele nos permite controlar seu comportamento por meio de uma biblioteca no IDE. Os passos de velocidade estão em uma faixa linear de 0 a 180 unidades.

### **A.2.4 Sensor infravermelho VL53L0X**

O sensor de distância escolhido foi do tipo infravermelho (IR). Este evita um problema comum nos sensores ultrassônicos (US), que é o alcance lateral de detecção. Outro problema que o sensor IR evita é a precisão na medição de distância; sensores US medem distâncias na ordem de centímetros, enquanto sensores IR medem na ordem de milímetros. Sensores IR e US são sensores de ToF, ou seja, emitem uma onda e calculam o tempo de voo para, então, obter a distância percorrida. Assim, o sensor IR é mais preciso, pois utiliza ondas eletromagnéticas, que são menos suscetíveis a variações causadas pelo ambiente.

O sensor IR VL53L0X emite um laser VCSEL com comprimento de onda  $\lambda = 940nm$ , mede distâncias de até 2m com um campo de visão de 25 graus, não depende da refletância do alvo, pode fornecer valores a cada  $20\mu s$  e pode ser configurado para medições com intervalo de tempo mais longo e mais preciso. Nesse modo, o sensor realiza medições a cada  $200\mu s$  e apresenta uma incerteza de  $\pm 3\%$  para medições a  $1.2m$ .

## **A.3 Tarefa do Robô**

Utilizamos bibliotecas no Arduino IDE para controlar os sensores IR e os motores. Assim, colocamos três sensores IR com 25 graus de rotação entre eles, calculamos a reflexão com base nos valores de distância fornecidos pelos sensores e alteramos a trajetória de acordo com o ângulo da reflexão.

O robô não toca nas paredes; ele é programado para refletir quando qualquer um dos três sensores detecta a parede a  $112mm$ , o que, associado ao campo de visão de 25 graus, garante que o robô realize todas as reflexões em nossos experimentos. O ângulo de incidência  $\theta_i$  e o ângulo de reflexão  $\theta_r$  são obtidos por meio de considerações geométricas, descritas na Fig. A.1.

Os vetores  $S_2$  e  $S_3$  permitem determinar a curvatura da borda na região de colisão, enquanto o vetor  $S_1$  fornece a direção do robô. O vetor tangente à borda da superfície na região de colisão é dado por:

$$\hat{\mathbf{e}}_T = \frac{\mathbf{S}_3 - \mathbf{S}_2}{|\mathbf{S}_3 - \mathbf{S}_2|}, \quad (\text{A.1})$$

e a direção normal é dada por uma rotação de  $\pi/2$  do vetor tangente, temos

$$\hat{\mathbf{e}}_N = R_{\pi/2}(\hat{\mathbf{e}}_T). \quad (\text{A.2})$$

Podemos agora expressar a posição do robô  $S_2$  em suas componentes tangencial e normal

$$\mathbf{S}_1 = S_{1N}\hat{\mathbf{e}}_N + S_{1T}\hat{\mathbf{e}}_T, \quad (\text{A.3})$$

$$S_{1N} = \mathbf{S}_1 \cdot \hat{\mathbf{e}}_N, \quad (\text{A.4})$$

$$S_{1T} = \mathbf{S}_1 \cdot \hat{\mathbf{e}}_T. \quad (\text{A.5})$$

Uma vez que conhecemos  $S_1$  nesse novo sistema de coordenadas, podemos calcular os ângulos de interesse:

$$\varphi = \cos^{-1}\left(\frac{|\mathbf{S}_1|}{S_{1N}}\right), \quad (\text{A.6})$$

$$\theta_i = \pi - \varphi \quad (\text{A.7})$$

Por fim, conhecendo o ângulo  $\theta_i$  conseguimos, por meio de uma função linear, rotacionar o robô relacionando ângulo de rotação com a rotação dos motores.

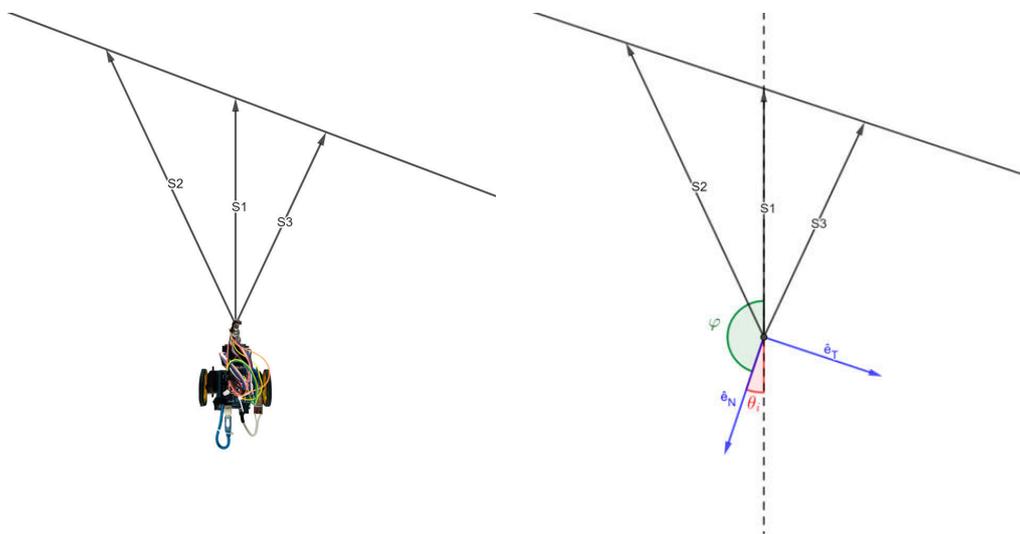


Fig. A.1 Esquema dos sensores do robô e ilustração do procedimento matemático para calcular  $\theta_i$ .

# Apêndice B

## Curriculum Vitae

### B.1 Trabalhos apresentados em eventos

- *XXXVI* Encontro de Física do Norte e Nordeste - Fortaleza, novembro de 2022;
  - Interaction between a robot and Bunimovich stadium billiards.
- Brazilian Physics Society Autumn Meeting - Ouro Preto, Maio de 2023;
  - Interaction between a robot and Bunimovich stadium billiards.
- *XXXVII* Encontro de Física do Norte e Nordeste - Salvador, Novembro de 2023;
  - Multifractal-to-monofractal behavior in fish dynamics,
  - Topological arrangement of self-propelled particles in confined potentials.
- *XXXVIII* Encontro de Física do Norte e Nordeste - Aracaju, Novembro de 2024
  - Multifractal Fluctuations in Zebrafish (*Danio Rerio*) Polarization Time Series;
  - Speckle statistics as a tool to distinguish collective behaviors of Zebrafish shoals;
  - Confining hexbugs in 3D printed potentials;
  - Exploring Dynamics of BEAM Robots in Complex Potentials Using 3D Printed Models,
  - From Lévy flights to the brownian movement in schools of Zebrafish (*Danio Rerio*).

## B.2 Menções honrosas

- Interaction between a robot and Bunimovich stadium billiards,

**Nota:** Menção honrosa ao pôster da área temática temática "Nonlinear Dynamics and Chaos" no evento Encontro de Outono da Sociedade brasileira de Física realizado em Ouro Preto, MG, em maio de 2023.

- Topological arrangement of self-propelled particles in confined potentials.

**Nota:** Menção honrosa ao pôster da área temática "Soft Matter" no XXXVIII Encontro de Física do Norte e Nordeste realizado em Aracaju, SE, Novembro de 2024.

## B.3 Artigos publicados

1. Vasconcelos, J.V.A., Miranda-Filho, L.H., de Souza, A.J.F. et al. Interaction between a robot and Bunimovich stadium billiards. *Sci Rep* 12, 4983 (2022). doi.org/10.1038/s41598-022-08897-4.
2. Gomes, S.d.S.; da Silva, J.F.; Padilha, R.M.O.; de Vasconcelos, J.V.A.; Negreiros Neto, L.G.d.; Marrs, J.A.; Cadena, P.G. Behavioral Effects of the Mixture and the Single Compounds Carbendazim, Fipronil, and Sulfentrazone on Zebrafish (*Danio rerio*) Larvae. *Biomedicines* 2024, 12, 1176. doi.org/10.3390/biomedicines12061176.
3. Romaguera, A.R.d.C., Vasconcelos, J.V.A., Negreiros-Neto, L.G. et al. Multifractal fluctuations in zebrafish (*Danio rerio*) polarization time series. *Eur. Phys. J. E* 47, 29 (2024). doi.org/10.1140/epje/s10189-024-00423-w.
4. de Souza, A.J.F., Romaguera, A.R.d.C., Vasconcelos, J.V.A. et al. Speckle statistics as a tool to distinguish collective behaviors of Zebrafish shoals. *Sci Rep* 14, 15835 (2024). doi.org/10.1038/s41598-024-64229-8.
5. Fransisco C.B. Leal, João V.A. Vasconcelos, Luis G. Negreiros-Neto, Viviane M. de Oliveira, Adauto J.F. de Souza, Anderson L.R. Barbosa, Antonio R. de C. Romaguera, Avalanche dynamics of zebrafish schools: Unveiling self-organization and phase transitions, *Physica A* 651, 130040, (2024), doi.org/10.1016/j.physa.2024.130040.