



Universidade Federal Rural de Pernambuco
Pró-reitoria de Pesquisa e Pós-graduação
Departamento de Física

Programa de Pós-graduação em Física Aplicada

**Investigação de um modelo para descrever
o comportamento de grupos de Zebrafish
(*Danio rerio*)**

Laedson Luan dos Santos Silva

Dissertação de Mestrado

Recife - PE
23 de abril de 2025

Universidade Federal Rural de Pernambuco
Pró-reitoria de Pesquisa e Pós-graduação
Departamento de Física

Laedson Luan dos Santos Silva

**Investigação de um modelo para descrever o comportamento
de grupos de Zebrafish (*Danio rerio*)**

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-graduação em Física Aplicada do Departamento de Física da Universidade Federal Rural de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Física Aplicada.

Orientadora: Profa. Dra. Viviane Moraes de Oliveira

Recife - PE
23 de abril de 2025

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA APLICADA

**Investigação de um modelo para descrever o comportamento de
grupos de Zebrafish (Danio rerio)**

Laedson Luan dos Santos Silva

Dissertação julgada adequada para obtenção do
título de mestre em Física, defendida e aprovada
por unanimidade em 26/02/2025 pela Comissão
Examinadora.

Orientador:

Profa. Dra. Viviane Moraes de Oliveira
UFRPE

Banca Examinadora:

Dr. Francisco Carol Bonfim Leal
UFPE

Prof. Dr. Alexandre Manoel de Moraes Carvalho
UFAL

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Sistema Integrado de Bibliotecas da UFRPE
Bibliotecário(a): Ana Catarina Macêdo – CRB-4 1781

S586i Silva, Laedson Luan dos Santos.
Investigação de um modelo para descrever o
comportamento de grupos de Zebrafish (Danio rerio)
/ Laedson Luan dos Santos Silva. – Recife, 2025.
65 f.; il.

Orientador(a): Viviane Moraes de Oliveira.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal
Rural de Pernambuco, Programa de Pós-Graduação
em Física Aplicada, Recife, BR-PE, 2025.

Inclui referências.

1. Peixes - Comportamento. 2. Zebrafish (Peixe). 3.
Simulação computacional. I. Oliveira, Viviane
Moraes de, orient. II. Título

CDD 621

“Demore o tempo que for para decidir o que você quer da vida, e depois que decidir não recue ante nenhum pretexto, porque o mundo tentará te dissuadir.”

Friedrich Nietzsche

Dedico esta conquista, assim como todas as demais, a todos que estiveram ao meu lado e me apoiaram durante esses momentos.

Agradecimentos

A realização deste trabalho só foi possível graças ao apoio e incentivo de diversas pessoas, às quais expresso minha profunda gratidão.

Agradeço à minha orientadora, Viviane Moraes de Oliveira, por toda paciência, dedicação e contribuição ao longo do desenvolvimento deste estudo. Sua orientação foi fundamental não apenas para a construção deste trabalho, mas também para o meu crescimento acadêmico.

Também sou imensamente grato a todos os meus familiares, cujo amor e apoio foram essenciais para que eu pudesse seguir nessa jornada. Agradeço por todo incentivo e por sempre compartilharem comigo momentos de alegria, tornando essa caminhada mais significativa.

Gostaria de agradecer, ainda, a todos os meus amigos, que desde o primeiro dia estiveram ao meu lado, compartilhando não apenas a jornada acadêmica, mas também momentos de descontração (e não foram poucos!). A companhia de vocês tornou esse percurso muito mais leve e divertida.

Minha gratidão se estende a todos os professores que, ao longo da minha trajetória, compartilharam seus conhecimentos e foram peças fundamentais para a realização deste trabalho.

Agradeço a todas as pessoas que, de alguma forma, me apoiaram, me incentivaram e contribuíram para o meu crescimento acadêmico e pessoal. Cada gesto de apoio fez a diferença e sou muito grato por isso.

Por fim, agradeço à Facepe pelo apoio financeiro concedido durante este período, o que foi fundamental para o desenvolvimento deste trabalho e permitiu a realização de pesquisas de grande importância para minha formação.

Resumo

O comportamento coletivo de organismos vivos é um fenômeno amplamente estudado em diversas áreas da ciência, incluindo biologia, física e computação. Neste trabalho, investigamos um modelo baseado em forças para descrever a dinâmica de um grupo de Zebrafish (*Danio Rerio*.) em um ambiente controlado. O modelo considera diferentes forças que atuam no peixe e influenciam o movimento dos indivíduos, incluindo propulsão, interação entre peixes, coesão e interações com as bordas do aquário.

Os parâmetros do modelo foram ajustados utilizando o método dos mínimos quadrados recursivos (MQR), permitindo uma calibração eficiente a partir de dados experimentais obtidos via rastreamento computacional (IdTracker). Para validar o modelo, comparamos os resultados das simulações com os dados experimentais, analisando parâmetros como polarização média, que quantifica o alinhamento dos indivíduos no grupo.

Os resultados mostram que a polarização diminui conforme aumenta a densidade populacional, evidenciando mudanças no comportamento coletivo. Além disso, foram analisadas trajetórias e distribuições de velocidade dos indivíduos, demonstrando uma boa concordância entre simulação e experimento. A pesquisa contribui para o entendimento do comportamento coletivo de peixes e pode ter aplicações em áreas como biologia, robótica e simulação de sistemas organizados.

Palavras-chave: comportamento coletivo, zebrafish, simulação computacional.

Abstract

The collective behavior of living organisms is a phenomenon widely studied in various fields of science, including biology, physics, and computing. In this work, we investigate a force-based model to describe the dynamics of a group of Zebrafish (*Danio rerio*) in a controlled environment. The model considers different forces acting on the fish and influencing individual movement, including propulsion, fish-to-fish interaction, cohesion, and interactions with the aquarium boundaries.

The model parameters were adjusted using the recursive least squares (RLS) method, allowing for efficient calibration based on experimental data obtained through computational tracking (IdTracker). To validate the model, we compared the simulation results with experimental data, analyzing parameters such as average polarization, which quantifies the alignment of individuals within the group.

The results show that polarization decreases as population density increases, highlighting changes in collective behavior. Additionally, individual trajectories and velocity distributions were analyzed, demonstrating good agreement between simulation and experiment. This research contributes to understanding the collective behavior of fish and may have applications in fields such as biology, robotics, and the simulation of organized systems.

Keywords: collective behavior, zebrafish, computational simulation

Sumário

1	Introdução	1
2	O modelo matemático do comportamento coletivo	3
2.1	Modelos Matemáticos	3
2.2	Escolha do Modelo Proposto	4
2.3	A descrição do modelo	4
2.4	Estimativa dos parâmetros	7
2.5	Polarização Média como Métrica de Comportamento Coletivo	11
3	Regressão Linear	13
3.1	Regressão Linear Simples	13
3.2	Regressão Linear Múltipla	13
3.3	Comparação entre Regressão Linear Simples e Múltipla	14
3.4	O método dos mínimos quadrados	14
3.4.1	Resolução para a Regressão Linear Simples	15
3.4.2	Resolução para a Regressão Linear Múltipla	15
3.5	Mínimos Quadrados Recursivos	16
3.5.1	Versão Clássica do MQR	17
3.5.2	Características principais do MQR	17
3.5.3	Versão Utilizada do MQR	18
4	Estudo de Caso	19
4.1	Configuração Experimental	19
4.2	Planejamento Experimental	20
4.3	Rastreamento dos Peixes com IdTracker	20
4.4	Processamento dos Dados	21
4.5	Determinação dos Parâmetros de Distância	22
4.6	Convergência dos Parâmetros e Análise dos Resíduos	27
4.6.1	Influência da Zona de Repulsão da Parede nos Parâmetros Dinâmicos	29
5	Resultados e Análises	33
5.1	Análise da Polarização	33
5.2	Trajetórias Observadas	39
5.3	Distribuição de Velocidades (PDF)	40
6	Conclusão	43

Lista de Figuras

2.1	Representação gráfica da polarização de acordo com a equação 2.24 da simulação para 8 peixes.	12
4.1	O peixe <i>Danio rerio</i> , modelo biológico amplamente utilizado. Retirado de [1].	20
4.2	Interface do IdTracker.	21
4.3	Média e desvio padrão dos parâmetros obtidos para 2 peixes usando o método dos mínimos quadrados recursivos	23
4.4	Média e desvio padrão dos parâmetros obtidos para 3 peixes usando o método dos mínimos quadrados recursivos	24
4.5	Média e desvio padrão dos parâmetros obtidos para 5 peixes usando o método dos mínimos quadrados recursivos	24
4.6	Média e desvio padrão dos parâmetros obtidos para 8 peixes usando o método dos mínimos quadrados recursivos	26
4.7	Média e desvio padrão dos parâmetros obtidos para 10 peixes usando o método dos mínimos quadrados recursivos	26
4.8	Média e desvio padrão dos parâmetros obtidos para 13 peixes usando o método dos mínimos quadrados recursivos	27
4.9	Evolução dos parâmetros estimados e resíduos ao longo das iterações para o grupo de 2 peixes.	28
4.10	Evolução dos parâmetros estimados e resíduos ao longo das iterações para o grupo de 5 peixes.	28
4.11	Evolução dos parâmetros estimados e resíduos ao longo das iterações para o grupo de 13 peixes.	29
4.12	Influência da zona de repulsão ($ziwp$) nos parâmetros de atração e cardume para três peixes.	30
4.13	Influência da zona de repulsão ($ziwp$) nos parâmetros de interação (k_b) e propulsão (a) para três peixes.	30
4.14	Influência da zona de repulsão ($ziwp$) no parâmetro de repulsão da parede (K_w^+) para três peixes.	30
5.1	Comparação da PDF da polarização entre simulação e experimento para diferentes valores de N .	34
5.2	Polarização média $\langle P \rangle$ em função da densidade de peixes ρ . As curvas representam os ajustes por leis de potência, enquanto os pontos indicam os valores médios obtidos nos experimentos e simulações.	35

5.3	Série temporal da polarização para 2 peixes nos primeiros 30 segundos da simulação.	36
5.4	Série temporal da polarização para 5 peixes nos primeiros 30 segundos da simulação.	37
5.5	Série temporal da polarização para 13 peixes nos primeiros 30 segundos da simulação.	37
5.6	Trajectoria de 2 peixes em um aquário circular de raio 25 cm durante os primeiros 30 segundos da simulação.	39
5.7	Trajectoria de 5 peixes em um aquário circular de raio 25 cm durante os primeiros 30 segundos da simulação.	39
5.8	Trajectoria de 13 peixes em um aquário circular de raio 25 cm durante os primeiros 30 segundos da simulação.	40
5.9	PDF da velocidade para 3 peixes da simulação.	41
5.10	PDF da velocidade para 5 peixes da simulação.	41
5.11	PDF da velocidade para 13 peixes da simulação.	42

Lista de Tabelas

4.1	Resumo dos experimentos realizados.	20
4.2	Parâmetros de distância para grupos menores(2,3 e 5 peixes.)	23
4.3	Parâmetros de distância ajustados para grupos maiores (8, 10 e 13 peixes).	25
5.1	Parâmetros utilizados na simulação para diferentes valores de N .	33

Introdução

O estudo do comportamento em grupos de seres vivos é um tema de grande interesse, e é bastante explorado em diferentes áreas do conhecimento, como na biologia, física e computação. Esse tipo de comportamento emergente pode ser observado em diferentes sistemas naturais, como bandos de aves, enxames de insetos e cardumes de peixes [28, 6]. Modelos matemáticos têm sido desenvolvidos para descrever esses sistemas, permitindo a análise das interações individuais e coletivas que levam à auto-organização [10, 27].

Dentre as espécies frequentemente utilizadas em experimentos sobre comportamento coletivo, podemos destacar o *Danio rerio* (Zebrafish). Esse peixe tem sido importante para investigações experimentais e computacionais, sendo amplamente utilizado devido à facilidade de manipulação em laboratório, seu comportamento social bem definido e sua resposta a estímulos externos [9, 19]. Estudos experimentais com o Zebrafish permitem a aquisição de dados detalhados sobre suas trajetórias e interações, viabilizando a validação de modelos matemáticos que descrevem sua dinâmica.

O presente trabalho tem como objetivo investigar um modelo matemático baseado em forças para descrever o comportamento coletivo de grupos de *Zebrafish* em um ambiente controlado. O modelo considera diferentes componentes dinâmicos que influenciam o movimento dos indivíduos, incluindo forças de propulsão, interação, coesão e interações com as bordas do aquário. Para ajustar os parâmetros do modelo, utilizamos o método dos mínimos quadrados recursivos, permitindo uma calibração eficiente a partir de dados experimentais. Além da calibração, a validação do modelo foi realizada através da comparação direta entre os resultados simulados e os dados experimentais, garantindo que o modelo reproduza bem o comportamento observado nos experimentos.

Além disso, foi analisada a **polarização média** do grupo como uma métrica para quantificar o grau de alinhamento dos indivíduos ao longo do tempo. A polarização ainda permite avaliar como mudanças na densidade populacional afetam a organização do grupo [28]. Foram também investigadas as trajetórias dos indivíduos e a distribuição das velocidades dos peixes ao longo da simulação, comparando os resultados obtidos por simulação com os dados experimentais.

Dessa forma, este trabalho busca contribuir para o avanço do entendimento sobre a dinâmica de grupos de peixes e aprimorar modelos matemáticos que possam ser aplicados não apenas em sistemas biológicos, mas também em áreas como robótica e simulação de sistemas organizados.

Embora os experimentos incluam até 30 peixes, a complexidade das interações aumenta significativamente com a densidade populacional, tornando difícil isolar os efeitos individuais. Dada a complexidade de definir os parâmetros dinâmicos, a análise se concentrou em grupos de até 13 peixes, permitindo um controle mais rigoroso na escolha dos parâmetros e buscando reduzir a interferência de variáveis que poderiam comprometer a precisão dos resultados. No futuro, seria interessante testar modelos para grupos maiores, considerando novos fatores que podem surgir e influenciar as interações quando há mais indivíduos.

A estrutura desta dissertação está organizada da seguinte forma:

- **Capítulo 2:** Apresenta a formulação matemática do modelo proposto, destacando as forças envolvidas na dinâmica dos peixes e os parâmetros considerados na modelagem.
- **Capítulo 3:** Introduz o método dos mínimos quadrados e sua aplicação para a estimativa dos parâmetros do modelo.
- **Capítulo 4:** Descreve a configuração experimental e os métodos utilizados para a aquisição e processamento dos dados.
- **Capítulo 5:** Apresenta e analisa os resultados obtidos, incluindo a comparação entre os dados experimentais e as simulações.
- **Capítulo 6:** Conclui a dissertação com uma síntese dos principais resultados obtidos e perspectivas para trabalhos futuros.

O modelo matemático do comportamento coletivo

Ao longo das últimas décadas, diversos modelos matemáticos têm sido desenvolvidos para descrever o comportamento coletivo de sistemas biológicos, como cardumes de peixes, enxames de insetos e bandos de pássaros. Esses modelos são fundamentais para compreender como as interações entre indivíduos resultam em padrões complexos a nível global.

2.1 Modelos Matemáticos

Os principais modelos utilizados na literatura para descrever comportamentos coletivos incluem:

- **Modelo de Boids:** Proposto por Reynolds (1987) [23], este modelo simula o comportamento coletivo de indivíduos seguindo três regras principais: alinhamento, coesão e separação .
 - **1. Alinhamento:** Cada indivíduo ajusta sua direção com base na direção dos vizinhos próximos. É como se um peixe observasse o que os outros ao seu redor estão fazendo e tentasse imitar a direção deles para manter a organização do cardume, resultando na formação de padrões típicos de cardume.
 - **2. Coesão:** Faz com que os indivíduos se mantenham próximos dos vizinhos, promovendo um movimento coordenado do grupo. Esse comportamento evita que o coletivo se separe e garante que todos se movam juntos.
 - **3. Separação:** Garante que os indivíduos mantenham uma certa distância uns dos outros para evitar colisões.

Quando essas três regras atuam juntas apresentam comportamentos espontâneos de comportamento coletivo. Apesar de descrever bem o padrão de comportamento coletivo, o modelo não considera forças externas.

- **Modelo Vicsek:** Introduzido por Vicsek et al. (1995) [28], este modelo descreve o movimento coletivo de partículas autônomas em um meio ruidoso, onde cada partícula ajusta sua direção com base na média dos vizinhos . É uma das abordagens mais simples para descrever o comportamento coletivo . Ele se baseia na ideia de que os indivíduos ajustam sua direção de movimento com base na média das direções dos vizinhos ao seu redor. Esse processo ocorre de maneira iterativa, resultando em padrões emergentes de alinhamento. Diferente do modelo de Boids, que inclui regras explícitas de separação, coesão e alinhamento, o modelo de Vicsek não apresenta essas regras de forma explícita, tratando a interação entre as partículas de maneira mais simplificada, com foco principal no alinhamento. Cada partícula se move com uma velocidade constante e, a cada passo do

tempo, ajusta seu ângulo de direção de acordo com a média do grupo próximo, somando um certo nível de ruído aleatório. Esse ruído é adicionado a cada indivíduo que faz tornar o comportamento mais realista.

Sendo assim esse modelo descreve bem se o cardume está alinhado ou desordenado, porem o modelo não considerada forças de atração e repulsão que são importantes no nosso modelo.

2.2 Escolha do Modelo Proposto

Entre os modelos apresentados, escolhemos um modelo baseado em forças, seguindo a abordagem de Sannomiya e Matuda [25]. Esse modelo leva em conta diretamente as interações entre os peixes, como atração, repulsão e a influência das bordas do aquário. Além disso, permite incluir efeitos de forças como arrasto e propulsão, tornando a análise mais precisa e quantitativa.

A escolha desse modelo justifica-se por:

- A capacidade de capturar a dinâmica física real do sistema, considerando as forças que atuam sobre cada indivíduo.
- A possibilidade de estimar parâmetros a partir de dados experimentais, permitindo validar e ajustar o modelo com base em observações reais.
- É útil em sistemas com alta densidade populacional, ou seja, quando há muitos indivíduos interagindo em um espaço pequeno, e tanto as interações entre os indivíduos próximos quanto as do grupo todo afetam o comportamento coletivo.

Nas próximas seções detalharemos a formulação matemática do modelo e o método utilizado para ajustar os parâmetros com base nos dados experimentais.

2.3 A descrição do modelo

O modelo matemático foi proposto por Sannomiya e Matuda [25] e tem por objetivo descrever o comportamento de peixes em um aquário, que no nosso caso é circular. Tal modelo trata o peixe como uma partícula individual que está restrita a se mover no espaço bidimensional. A equação que governa o movimento do peixe é dada pela seguinte equação:

$$\mathbf{F}_i(t, \mathbf{x}_i, \dot{\mathbf{x}}_i, \mathbf{x}_j, \dot{\mathbf{x}}_j) = m\ddot{\mathbf{x}}_i(t) \quad (2.1)$$

Na equação acima, os índices i e j representam os indivíduos do sistema, com $i = 1, 2, \dots, N$ e $i \neq j$. O índice i corresponde ao indivíduo para o qual a força $\mathbf{F}_i$ está sendo calculada, enquanto j representa o outro indivíduo com o qual a partícula i interage. $\mathbf{x}_i$ e $\dot{\mathbf{x}}_i$ são a posição e a velocidade, respectivamente do peixe i , N é o número total de peixes e m é a massa do indivíduo. Na equação (2.1) $\mathbf{F}_i$ é a força externa e ela é a principal causa dos movimentos dos peixes. Ela é decomposta em sete diferentes forças, que descreveremos a seguir:

1. **Força de arrasto:** Representa a resistência do meio ao movimento do peixe, atuando no sentido contrário à sua velocidade. Esta força é dada por:

$$\mathbf{F}_{\text{arrasto}} = -v|\dot{\mathbf{x}}_i|\dot{\mathbf{x}}_i, \quad (2.2)$$

onde:

- v é o coeficiente de resistência do meio;
- $|\dot{\mathbf{x}}_i|$ é o módulo da velocidade do peixe i ;
- $\dot{\mathbf{x}}_i$ é a velocidade do peixe i .

2. **Força propulsiva:** É a força gerada pelo movimento do peixe, permitindo que ele mantenha sua velocidade. A força propulsiva é expressa por:

$$\mathbf{F}_{\text{propulsiva}} = a \frac{\dot{\mathbf{x}}_i}{v_i}, \quad (2.3)$$

onde:

- a é o coeficiente de força propulsiva (a ser determinado posteriormente);
- $v_i = |\dot{\mathbf{x}}_i|$ é o módulo da velocidade do peixe i .

3. **Força interativa:** Modela as interações entre os peixes no grupo, podendo ser de atração ou repulsão, dependendo da distância entre eles. É dada por:

$$\mathbf{F}_{\text{Interativa}} = K_b \sum_{j=1}^N \left(\frac{r_{ij} - \alpha}{(r_{ij} - \alpha)^2 + \beta^2} \right) \frac{\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i}{r_{ij}}, \quad (2.4)$$

onde:

- K_b é o coeficiente de interação (a ser determinado posteriormente);
- $r_{ij} = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}$ é a distância entre os peixes i e j ;
- α é o parâmetro que define o limite entre atração e repulsão;
- β controla a intensidade da transição entre atração e repulsão.

Peixes se repelem quando $r_{ij} < \alpha$ e se atraem quando $r_{ij} > \alpha$.

4. **Força de cardume:** Representa o comportamento coletivo, mantendo o grupo unido e coordenado. Essa força é expressa como:

$$\mathbf{F}_{\text{cardume}} = K_c \sum_{j=1}^M c(r_{ij}) \frac{\dot{\mathbf{x}}_j - \dot{\mathbf{x}}_i}{M_i}, \quad (2.5)$$

com:

$$c(r_{ij}) = 1 - \left[\frac{1 - \cos\left(\frac{\pi r_{ij}}{\delta}\right)}{2} \right]^2,$$

onde:

- K_c é o coeficiente de força de cardume (a ser determinado posteriormente);
- M_i é o número de peixes no raio de interação δ ;
- $c(r_{ij})$ é uma função que modula a intensidade da força com base na distância r_{ij} . Se $r_{ij} > \delta$, $c(r_{ij})$ é igual a 0.

5. **Força repulsiva da parede:** Evita que os peixes colidam com as bordas do tanque, direcionando-os para o espaço interno. É dada por:

$$\mathbf{F}_{\text{repulsiva}} = K_w^+ \mathbf{v}_{il} \frac{d^+ - d_{il}}{d^+}, \quad \text{se } \mathbf{v}_{il} > 0 \text{ e } d_{il} < d^+, \quad (2.6)$$

onde:

- K_w^+ é o coeficiente de repulsão da parede (a ser determinado posteriormente);
- d_{il} é a distância do peixe i à parede;
- d^+ é a zona de limite de atuação da força repulsiva;
- $\mathbf{v}_{il}$ é a componente da velocidade do peixe i na direção da parede, usada para determinar se o peixe está se aproximando ou se afastando da parede.

6. **Força atrativa da parede:** Mantém os peixes próximos às bordas do tanque, modelando interações com o limite. É expressa como:

$$\mathbf{F}_{\text{atrativa}} = K_w^- \mathbf{v}_{il} \frac{d^- - d_{il}}{d^-}, \quad \text{se } \mathbf{v}_{il} < 0 \text{ e } d_{il} < d^-, \quad (2.7)$$

onde:

- K_w^- é o coeficiente de atração da parede (a ser determinado posteriormente);
- d_{il} é a distância do peixe i à parede;
- d^- é a zona de limite de atuação da força atrativa;
- $\mathbf{v}_{il}$ é a componente da velocidade do peixe i na direção da parede, usada para determinar se o peixe está se aproximando ou se afastando da parede.

7. **Força aleatória:** Representa fatores ambientais não modelados que influenciam a dinâmica do peixe. É dada por:

$$\mathbf{F}_{\text{aleatoria}} = \varepsilon_i, \quad (2.8)$$

onde ε_i é um termo aleatório associado ao indivíduo i , introduzindo variabilidade no modelo.

2.4 Estimativa dos parametros

A partir das equações, observamos que os seguintes parâmetros devem ser determinados:

- m : Massa do peixe (g).
- v : Coeficiente de arrasto (g/cm).
- α : Distância máxima em que a força de repulsão entre dois peixes atua (cm).
- β : Parâmetro de suavização da força de atração entre dois peixes (cm).
- δ : Distância crítica da força de cardume (cm).
- d^+ : Distância limite em que a força de repulsão da parede atua (cm).
- d^- : Distância limite em que a força de atração da parede atua (cm).
- a : Coeficiente da força propulsiva (g · cm/s²).
- K_b : Coeficiente da força de interação (atração ou repulsão) entre dois peixes (g · cm²/s²).
- K_c : Coeficiente da força de cardume, responsável por modelar a coesão social (g/s).
- K_w^+ : Coeficiente de repulsão da borda do aquário (g/s).
- K_w^- : Coeficiente de atração da borda do aquário (g/s).

A partir da equação 2.1, consideramos que estamos trabalhando com instantes de tempo bem definidos, ou seja, $t = n\Delta t$ ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$), onde Δt representa o intervalo de tempo entre dois instantes consecutivos. Dessa forma, a posição do peixe no instante n pode ser definida como $x_i(n)$, que representa a posição do peixe i no tempo discreto. A partir da posição do peixe, podemos determinar sua velocidade e aceleração no tempo discreto, conforme as expressões a seguir:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_i &\approx \frac{\mathbf{x}_i(n+1) - \mathbf{x}_i(n)}{\Delta t}, \\ \ddot{\mathbf{x}}_i &\approx \frac{\mathbf{x}_i(n+2) - 2\mathbf{x}_i(n+1) + \mathbf{x}_i(n)}{(\Delta t)^2}.\end{aligned}\tag{2.9}$$

Substituindo as expressões da equação 2.9 na equação 2.1, obtemos:

$$\mathbf{F}_i \left[n\Delta t, \mathbf{x}_i(n), \frac{\mathbf{x}_i(n+1) - \mathbf{x}_i(n)}{\Delta t}, \mathbf{x}_j(n), \frac{\mathbf{x}_j(n+1) - \mathbf{x}_j(n)}{\Delta t} \right] = m \frac{\mathbf{x}_i(n+2) - 2\mathbf{x}_i(n+1) + \mathbf{x}_i(n)}{(\Delta t)^2}.$$

A partir disso, podemos reescrever a equação na forma explícita para a posição no instante $n+2$:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_i(n+2) &= 2\mathbf{x}_i(n+1) - \mathbf{x}_i(n) + \frac{(\Delta t)^2}{m} \left\{ \mathbf{F}_i \left[n\Delta t, \mathbf{x}_i(n), \frac{\mathbf{x}_i(n+1) - \mathbf{x}_i(n)}{\Delta t}, \mathbf{x}_j(n), \frac{\mathbf{x}_j(n+1) - \mathbf{x}_j(n)}{\Delta t} \right] \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon_i(n) \right\}.\end{aligned}\tag{2.10}$$

A equação (2.10) representa a posição individual do peixe i no cardume no instante $n + 2$, considerando tanto as interações com os demais peixes quanto a contribuição de forças externas e um termo estocástico $\varepsilon_i(n)$, que modela variações imprevisíveis do ambiente.

Alguns dos parâmetros a serem estimados, mostrados anteriormente, são definidos com base na observação do comportamento do cardume de peixes dentro do aquário circular. Entre esses parâmetros estão os de distâncias: α , β , δ , d^+ e d^- , que podem ser determinados diretamente a partir de observações experimentais realizadas durante o estudo do movimento coletivo dos peixes. A definição dos parâmetros dinâmicos no modelo proposto é realizada com base na análise dos vides dos experimentos de cardumes de peixe, conforme descrito em [1]. Os experimentos são conduzidos em um aquário circular de raio = 25 cm, onde os peixes são observados em condições controladas. A dinâmica dos indivíduos no cardume é capturada por meio de gravações de vídeo em alta resolução, permitindo o rastreamento das posições e velocidades de cada peixe ao longo do tempo.

As gravações são processadas utilizando técnicas de análise de imagem, a partir do software IDTracker, que identificam a posição de cada peixe em cada instante de tempo. A partir desses dados, é possível calcular as distâncias relativas entre os peixes e as bordas do aquário, além das velocidades e acelerações individuais. Essas informações são então utilizadas para determinar os parâmetros de distância (α , β , δ , d^+ e d^-), os quais são extraídos diretamente das observações experimentais.

Os dados experimentais não apenas fornecem os parâmetros de entrada necessários para calibrar o modelo, mas também servem como base para validar sua precisão. Comparando as trajetórias simuladas com as observadas, podemos avaliar a adequação do modelo em descrever o comportamento coletivo dos peixes, refinando os coeficientes conforme necessário para representar fielmente as interações e dinâmicas do cardume.

Por outro lado, os demais parâmetros, como a (intensidade da força propulsiva), K_b (coeficiente de interação), K_c (coeficiente da força de cardume), K_w^+ (coeficiente de repulsão da borda do aquário) e K_w^- (coeficiente de atração da borda do aquário), não podem ser obtidos diretamente por observações experimentais. Esses parâmetros precisam ser obtidos usando os dados experimentais e utilizando métodos de ajustes.

A abordagem envolve comparar os resultados simulados pelo modelo com os dados reais obtidos dos experimentos, ajustando iterativamente os valores dos parâmetros até minimizar o erro entre os dois. Esse processo de ajuste utiliza métodos como mínimos quadrados.

Os parâmetros de interação (K_b) e de coesão social (K_c) são especialmente críticos para descrever o comportamento coletivo, como a formação de cardumes ou a manutenção da coordenação do grupo. Já os coeficientes K_w^+ e K_w^- têm impacto direto nas interações dos peixes com as bordas do aquário, controlando a proximidade ou o afastamento dos indivíduos em relação às paredes. Essa distinção entre parâmetros diretamente observáveis e aqueles que requerem estimativas indiretas ressalta a importância de um modelo bem calibrado para capturar com precisão as dinâmicas de movimento do cardume.

Após observar os comportamentos dos cardumes de peixe a partir de vídeos, os parâme-

tros de distância (α , β , δ , d^+ , e d^-) foram definidos com base nas medições experimentais realizadas durante a análise do movimento dos peixes. Esses parâmetros descrevem as zonas de interação, atração e repulsão entre os indivíduos, bem como sua relação com as bordas do aquário.

Uma vez definidos os parâmetros de distância, a equação (2.10) pode ser expressa como:

$$\mathbf{x}_i(n+2) = 2\mathbf{x}_i(n+1) - \mathbf{x}_i(n) + \frac{(\Delta t)^2}{m} (\mathbf{v} \cdot f_{di} + a \cdot f_a + K_b \cdot f_b + K_c \cdot f_c + K_w^+ \cdot f_{w^+} + K_w^- \cdot f_{w^-} + \varepsilon_i(n)), \quad (2.11)$$

onde f_{di} , f_a , f_b , f_c , f_{w^+} e f_{w^-} são funções conhecidas que dependem das posições $x_i(n)$, velocidades $\dot{x}_i(n)$ e interações com outros peixes ou com as bordas do aquário.

Inicialmente, o coeficiente de arrasto $\mathbf{v}$ foi incluído no método dos mínimos quadrados para ser estimado junto com os outros parâmetros do modelo. Durante o ajuste, encontramos um valor aproximado de $\mathbf{v} = 0.05$, que garantiu estabilidade nas simulações e esteve de acordo com os dados experimentais. Após essa análise, decidimos fixar esse valor, já que ele estava bem ajustado aos dados, e optamos por não tratá-lo mais como um parâmetro livre.

Cada parâmetro a , K_b , K_c , K_w^+ e K_w^- multiplica diretamente uma função conhecida (f_a , f_b , etc.), tornando a equação linear nesses parâmetros. Essa linearidade permite reorganizar a equação como uma soma de termos lineares, facilitando a aplicação de métodos de ajuste, como os mínimos quadrados [2, 22], amplamente utilizados em sistemas dinâmicos. Além disso, essa abordagem é consistente com outros estudos de modelagem de comportamento coletivo [5, 29].

A equação 2.11 pode ser reescrita como:

$$\mathbf{x}_i(n+2) = H_i + aH_{ai} + K_bH_{bi} + K_cH_{ci} + K_w^+H_{wi}^+ + K_w^-H_{wi}^- + \varepsilon_i(n) \quad (2.12)$$

Onde os termos auxiliares H_i , H_{ai} , H_{bi} , H_{ci} , H_{wi}^+ e H_{wi}^- são definidos como:

$$H_i = 2\mathbf{x}_i(n+1) - \mathbf{x}_i(n) + \frac{(\Delta t)^2}{m} \mathbf{v} f_{di}, \quad (2.13)$$

$$H_{ai} = \frac{(\Delta t)^2}{m} f_a, \quad (2.14)$$

$$H_{bi} = \frac{(\Delta t)^2}{m} f_b, \quad (2.15)$$

$$H_{ci} = \frac{(\Delta t)^2}{m} f_c, \quad (2.16)$$

$$H_{wi}^+ = \frac{(\Delta t)^2}{m} f_w^+, \quad (2.17)$$

$$H_{wi}^- = \frac{(\Delta t)^2}{m} f_w^-. \quad (2.18)$$

Percebe-se que a força de arrasto f_{di} , que aparecia na equação (2.11), foi incorporada no termo auxiliar H_i . Isso foi feito reorganizando a equação, de forma que H_i reúna todos os termos que não dependem diretamente dos parâmetros ajustáveis (a , K_b , K_c , etc.). Dessa maneira, a equação fica mais estruturada e facilita a aplicação do método dos mínimos quadrados.

Como a equação é linear em relação aos parâmetros a , K_b , K_c , K_w^+ e K_w^- , é possível aplicar métodos como os *mínimos quadrados* para ajustar os valores desses coeficientes com base nos dados experimentais $x_i(n+2)$ medidos.

Além disso, as funções f_a , f_b , f_c , f_{w^+} e f_{w^-} são conhecidas a partir das condições iniciais ou da dinâmica observada nos experimentos. Assim, o problema de estimar os coeficientes se reduz a resolver um sistema de equações lineares.

Portanto, a linearidade da equação 2.12 em relação aos parâmetros facilita significativamente o processo de ajuste e calibração do modelo, conectando diretamente as observações experimentais às forças modeladas.

Então, a equação 2.12 pode ser reescrita de forma compacta como:

$$y(n) = z^T(n)\theta + \varepsilon(n), \quad (2.19)$$

onde definimos novas variáveis para facilitar a manipulação e interpretação do modelo:

1. A variável $y(n)$ representa o vetor de diferenças entre as posições estimadas e as observadas, dada por:

$$y(n) = (x_1^T(n) - H_1^T(n), \dots, x_N^T(n) - H_N^T(n))^T. \quad (2.20)$$

2. A matriz $z^T(n)$ contém os coeficientes associados às forças que influenciam a dinâmica do sistema, expressa como:

$$z^T(n) = (H_{ai}(n) \ H_{bi}(n) \ H_{ci}(n) \ H_{wi}^+(n) \ H_{wi}^-(n)). \quad (2.21)$$

3. O vetor de parâmetros θ , que será estimado, é dado por:

$$\theta = (a, k_b, k_c, K_w^+, K_w^-)^T. \quad (2.22)$$

4. O vetor de erros $\varepsilon(n)$ contém as discrepâncias para cada indivíduo e é definido como:

$$\varepsilon(n) = (\varepsilon_1^1(n-2), \varepsilon_1^2(n-2), \dots, \varepsilon_N^1(n-2), \varepsilon_N^2(n-2)). \quad (2.23)$$

Para estimar os parâmetros θ , utilizamos os dados experimentais previamente adquiridos. Esses dados representam uma grande quantidade de informações coletadas ao longo do tempo e incluem as posições observadas dos peixes e os termos associados às forças que influenciam sua dinâmica.

Devido ao volume significativo de dados, é inviável realizar os cálculos manualmente. Assim, utilizamos programas computacionais especializados para resolver a equação 2.19 de forma eficiente. Esses programas implementam métodos de otimização, como os mínimos quadrados, para ajustar os parâmetros θ e minimizar o erro $\varepsilon(n)$. Método esse que será discutido nos próximos capítulos.

2.5 Polarização Média como Métrica de Comportamento Coletivo

Além dos parâmetros dinâmicos, a polarização média foi selecionada como uma métrica fundamental para descrever o comportamento coletivo do grupo.

A polarização é amplamente utilizada em estudos de comportamento coletivo para descrever como indivíduos interagem e se alinham em resposta a estímulos locais [6, 28]

Fisicamente, a polarização reflete a tendência do grupo de seguir uma direção dominante, associada a comportamentos como fuga de predadores ou busca por alimentos[15, 11]. Biologicamente, essa métrica está relacionada à eficiência energética do deslocamento coletivo, uma vez que movimentos coordenados tendem a reduzir o gasto de energia.

A polarização média P é uma métrica fundamental para descrever o alinhamento das direções de movimento dos indivíduos em um dado instante. Ela é definida como:

$$P = \frac{1}{N} \left| \sum_{i=1}^N \frac{\vec{v}_i}{|\vec{v}_i|} \right|, \quad (2.24)$$

onde N é o número total de indivíduos no grupo e $\vec{v}_i$ é o vetor velocidade do i -ésimo indivíduo.

A polarização P varia entre 0 e 1, sendo:

- $P = 1$: todos os indivíduos estão perfeitamente alinhados na mesma direção;
- $P = 0$: as direções de movimento são completamente desordenadas.

A polarização é uma métrica utilizada para avaliar o grau de alinhamento de um grupo de partículas em relação a uma direção comum. Quando o valor de polarização P é igual a 1, isso indica que todas as partículas estão completamente alinhadas, com seus vetores velocidade apontando na mesma direção. Nesse caso, o grupo apresenta um alto grau de coesão em relação ao movimento coletivo.

À medida que as partículas começam a se movimentar em direções diferentes, o alinhamento do grupo diminui, resultando em uma redução no valor da polarização. Em situações onde o movimento das partículas ocorre de maneira completamente desordenada e aleatória, o valor de P será próximo de zero, indicando a ausência de uma direção comum ou coesão no grupo.

A polarização está intrinsecamente ligada aos parâmetros dinâmicos do modelo, como o coeficiente de cardume (K_c) e os limites de interação (α , β , δ). Ajustes nesses parâmetros podem impactar diretamente os valores de polarização observados, fornecendo informações sobre como as interações locais afetam o comportamento coletivo global.

Na Figura 2.1, apresentamos uma representação visual da polarização para um grupo de 8 peixes. As setas pretas indicam a direção dos vetores velocidade $\vec{v}_i$ de cada indivíduo em um determinado instante de tempo. A polarização é calculado a partir da média normalizada desses vetores. Quando mais esses vetores estão alinhados entre si, mais a

polarização se aproxima de 1, indicando que o cardume se move de maneira ordenada, já se esses vetores apontam para direções diferentes, a polarização se aproxima de zero, sugerindo que os indivíduos estão se movendo de forma desordenada.

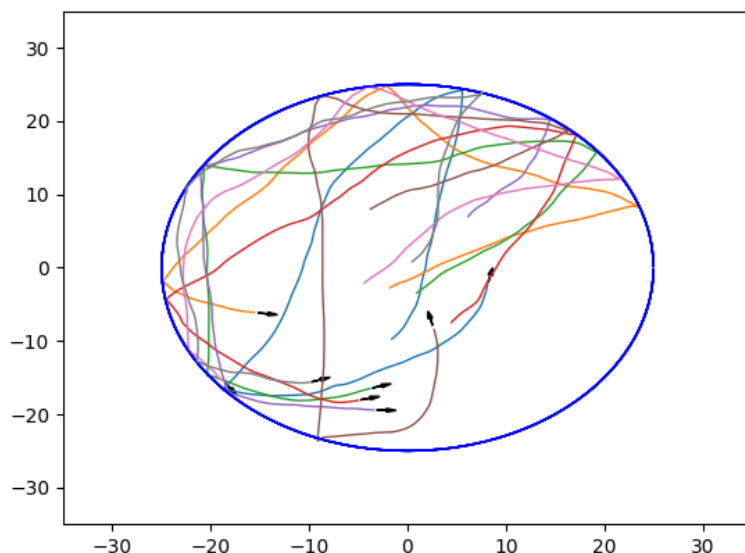


Figura 2.1: Representação gráfica da polarização de acordo com a equação 2.24 da simulação para 8 peixes.

Assim, a polarização média não apenas oferece uma visão quantitativa do alinhamento do grupo, mas também fornece uma métrica essencial para validar a eficácia do modelo e para compreender como interações locais levam à formação de padrões globais

Regressão Linear

A análise de regressão é uma técnica estatística amplamente utilizada para estudar a relação entre uma variável dependente (Y) e uma ou mais variáveis independentes (X). Neste capítulo, baseamos nossa descrição nos trabalhos clássicos de Montgomery et al. [20] e Draper e Smith [8], com aplicação específica em dados experimentais, abordando tanto a regressão linear simples quanto múltipla.

3.1 Regressão Linear Simples

Inicialmente, apresentamos a regressão linear simples, que descreve a relação entre uma variável dependente Y e uma única variável independente X . Essa relação é representada pelo modelo:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon, \quad (3.1)$$

onde:

- X é a variável independente (ou preditora);
- Y é a variável dependente (ou resposta);
- β_0 é o intercepto no eixo Y , representando o valor esperado de Y quando $X = 0$;
- β_1 é a inclinação da reta, indicando a variação esperada em Y para cada unidade de variação em X ;
- ε é o termo de erro, representando as discrepâncias entre os valores observados e ajustados.

3.2 Regressão Linear Múltipla

Para casos com mais de uma variável independente, utiliza-se a regressão linear múltipla. Nesse contexto, a relação entre Y e as variáveis independentes é representada pelo modelo:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \cdots + \beta_k X_k + \varepsilon, \quad (3.2)$$

onde:

- $X_1, X_2, \dots, X_k$ são as variáveis independentes;
- $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ são os coeficientes que quantificam a influência de cada variável independente sobre Y .

Os dados utilizados para a análise de regressão múltipla podem ser representados como:

$$(y_1, x_{11}, x_{21}, \dots, x_{k1}), (y_2, x_{12}, x_{22}, \dots, x_{k2}), \dots, (y_n, x_{1n}, x_{2n}, \dots, x_{kn}). \quad (3.3)$$

3.3 Comparação entre Regressão Linear Simples e Múltipla

1. Número de variáveis independentes: - A regressão linear simples considera apenas uma variável independente. - A regressão linear múltipla pode incluir duas ou mais variáveis.
2. Forma do modelo:
 - Simples: $Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon$.
 - Múltipla: $Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \dots + \beta_k X_k + \varepsilon$.
3. Interpretação dos coeficientes: - Na regressão múltipla, cada coeficiente β_j representa o impacto de X_j sobre Y , mantendo todas as outras variáveis constantes.
4. Complexidade computacional: - A regressão múltipla requer operações matriciais, enquanto a simples pode ser resolvida com expressões fechadas.
5. Aplicações: - A regressão linear simples é frequentemente usada em estudos iniciais para entender o impacto de uma única variável preditora, como a relação entre temperatura e consumo de energia. - A regressão linear múltipla é mais adequada para modelos complexos que envolvem várias variáveis independentes, como prever a performance acadêmica de alunos com base em horas de estudo, nível socioeconômico e frequência escolar.

Entender as diferenças entre as regressões linear simples e múltipla é essencial, pois o método dos mínimos quadrados pode ser aplicado de forma eficiente em ambos os casos, como será discutido a seguir.

3.4 O método dos mínimos quadrados

Para encontrar as soluções para a regressão linear, existem algumas técnicas. Entre elas, destaca-se o Método dos Mínimos Quadrados (MMQ), amplamente conhecido por sua simplicidade e eficiência para resolver problemas envolvendo dados experimentais. A seguir, detalhamos sua aplicação em regressões linear simples e múltipla.

O Método dos Mínimos Quadrados (MMQ) foi introduzido por Karl Friedrich Gauss no final do século XVIII, com o objetivo de prever a trajetória de planetas e cometas utilizando dados observacionais imprecisos [4]. Esse método é amplamente utilizado em diversas áreas, como física, engenharia e economia, por sua simplicidade e eficiência em ajustar modelos matemáticos aos dados experimentais.

Esse método consiste em escolher os parâmetros $(\beta_0, \beta_1, \dots)$ da equação da regressão linear de modo que o nosso "erro" (ε) seja o menor possível. Os erros (ε_i) são as diferenças entre os valores observado (Y_i) e os valores preditos pelo modelo.

$$\varepsilon_i = Y_i - (\beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \dots). \quad (3.4)$$

A função de soma dos quadrados dos resíduos S é então dada por:

$$S(\beta_0, \beta_1, \dots) = \sum_{i=1}^n [Y_i - (\beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \dots)]^2. \quad (3.5)$$

3.4.1 Resolução para a Regressão Linear Simples

O MMQ consiste em encontrar os parâmetros β_0 e β_1 que minimizam a soma dos quadrados dos erros:

$$S(\beta_0, \beta_1) = \sum_{i=1}^N (\varepsilon_i)^2 = \sum_{i=1}^N (Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_i)^2. \quad (3.6)$$

A minimização do erro é feita derivando e igualando a zero as derivadas parciais da função $S(\beta_0, \beta_1)$:

$$\frac{\partial S}{\partial \beta_0} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial \beta_1} = 0. \quad (3.7)$$

As soluções são dadas por:

$$\beta_0 = \bar{Y} - \beta_1 \bar{X}, \quad (3.8)$$

$$\beta_1 = \frac{\sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^2}. \quad (3.9)$$

3.4.2 Resolução para a Regressão Linear Múltipla

Quando a nossa variável dependente é relacionada com duas ou mais variáveis independentes. Os dados para a análise da regressão são da forma:

$$(y_1, x_{11}, x_{21}, \dots, x_{k1}), (y_2, x_{12}, x_{22}, \dots, x_{k2}), \dots, (y_n, x_{1n}, x_{2n}, \dots, x_{kn}) \quad (3.10)$$

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \dots + \beta_k X_k + \varepsilon_i \quad (3.11)$$

O problema pode ser escrito em forma matricial:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (3.12)$$

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1k} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

onde:

- $\mathbf{Y}$ é o vetor de respostas ($n \times 1$);
- $\mathbf{X}$ é a matriz de preditores ($n \times (k + 1)$), incluindo uma coluna de 1's para o intercepto, que representa o valor da variável dependente quando todas as variáveis independentes são iguais a zero.
- β é o vetor de coeficientes ($(k + 1) \times 1$);
- ε é o vetor de erros ($n \times 1$).

A solução dos coeficientes pelo MMQ é dada por:

$$\sum_{i=1}^N (\varepsilon)^2 = (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\beta)^t (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\beta) \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}^t \mathbf{Y} - \beta^t \mathbf{X}^t \mathbf{Y} - \mathbf{Y}^t \mathbf{X} \beta + \beta^t \mathbf{X}^t \mathbf{X} \beta \\ \mathbf{Y}^t \mathbf{Y} - 2\beta^t \mathbf{X}^t \mathbf{Y} + \beta^t \mathbf{X}^t \mathbf{X} \beta \\ - 2\mathbf{X}^t \mathbf{Y} + 2\mathbf{X}^t \mathbf{X} \beta = 0 \\ \mathbf{X}^t \mathbf{X} \beta = \mathbf{X}^t \mathbf{Y} \end{aligned}$$

$$\beta = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{Y}. \quad (3.14)$$

Essa abordagem permite ajustar o modelo mesmo em situações com múltiplas variáveis independentes, utilizando álgebra linear para simplificar os cálculos.

Embora o Método dos Mínimos Quadrados seja eficaz para ajustar modelos quando todos os dados estão disponíveis, em cenários onde os dados chegam sequencialmente ou o sistema varia com o tempo, utilizamos uma abordagem adaptativa conhecida como Método dos Mínimos Quadrados Recursivos (MQR), que será discutido na próxima seção.

3.5 Mínimos Quadrados Recursivos

O Método dos Mínimos Quadrados Recursivos (MQR) é uma extensão do Método dos Mínimos Quadrados (MMQ) que permite atualizar os parâmetros de um modelo de regressão de forma contínua. Isso significa que, ao invés de recalcular toda a solução a cada nova observação, o MQR ajusta os parâmetros de maneira contínua, com base apenas nos dados mais recentes [12, 18]. Esse método se tornou essencial para aplicações onde os dados chegam dinamicamente, como em sistemas adaptativos e aprendizado online [13].

No MMQ tradicional, a solução dos coeficientes é obtida por meio da inversa da matriz de covariância $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$, o que pode ser computacionalmente inviável para grandes conjuntos de dados ou sistemas em tempo real. O MQR resolve esse problema utilizando um processo recursivo de atualização dos parâmetros, permitindo ajustes contínuos sem necessidade de armazenar todos os dados passados.

3.5.1 Versão Clássica do MQR

Na formulação clássica, a atualização dos coeficientes segue a equação:

$$\theta_n = \theta_{n-1} + K_n (y_n - z^T(n) \theta_{n-1}), \quad (3.15)$$

onde:

- θ_n representa o vetor de coeficientes no instante n
- y_n é a observação mais recente
- $z(n)$ é o vetor de entrada (preditores)
- K_n é o ganho recursivo, calculado como:

$$K_n = P_{n-1} z(n) (\lambda + z^T(n) P_{n-1} z(n))^{-1}. \quad (3.16)$$

A matriz de covariância P_n é atualizada conforme:

$$P_n = P_{n-1} - K_n z^T(n) P_{n-1}. \quad (3.17)$$

O parâmetro λ , conhecido como fator de esquecimento, pode ser introduzido para permitir que o modelo reaja melhor a mudanças no sistema:

$$P_n = \frac{1}{\lambda} (P_{n-1} - K_n z^T(n) P_{n-1}). \quad (3.18)$$

Essa abordagem permite que o modelo se ajuste continuamente conforme novos dados chegam, sendo amplamente utilizada em sistemas de controle adaptativo, processamento de sinais e previsões financeiras. No entanto, pode ser computacionalmente custosa, pois envolve a atualização contínua da matriz P_n , que pode crescer rapidamente dependendo do número de variáveis.

3.5.2 Características principais do MQR

- **Atualização incremental:** Os parâmetros são recalculados dinamicamente a cada nova observação.
- **Eficiência computacional:** Evita o processamento repetitivo de todo o conjunto de dados.
- **Flexibilidade:** Permite lidar com sistemas dinâmicos e variáveis no tempo.
- **Armazenamento eficiente:** Apenas os dados mais recentes e as estatísticas intermediárias precisam ser armazenados.

3.5.3 Versão Utilizada do MQR

Para aplicar o método, foi utilizada a versão apresentada no nosso artigo de referência [25], na qual não foi empregado o fator de esquecimento λ , que basicamente determina o peso das observações anteriores. Quanto mais próximo de 1, mais importantes são os dados recentes, enquanto valores menores de λ conferem mais importância aos dados passados. Além disso, assume-se que a matriz de covariância P_n pode ser aproximada diretamente como a inversa de uma matriz de acumulação de informações R_n . Inicialmente, define-se $R_0 = \varepsilon I$ (com $0 < \varepsilon \ll 1$) e $\theta_0 = 0$, sendo I a matriz identidade, o que garante uma implementação mais eficiente sem comprometer significativamente a precisão das estimativas. A partir disso, a matriz R_n é atualizada da seguinte forma:

$$R_n = R_{n-1} + z(n)z^T(n), \quad (3.19)$$

R_n é a matriz que irá armazenar as informações do sistema, ou seja, irá armazenar as forças que são aplicadas no peixe a cada instante de tempo.

$$P_n = R_n^{-1}. \quad (3.20)$$

P_n é a matriz que irá armazenar os meus parâmetros.

Com essa simplificação, a equação dos coeficientes permanece a mesma:

$$\theta_n = \theta_{n-1} + K_n (y_n - z^T(n)\theta_{n-1}), \quad (3.21)$$

onde agora o ganho K_n é definido como:

$$K_n = P_n z(n). \quad (3.22)$$

Essa versão elimina a necessidade de atualizações complexas da matriz de covariância, tornando o método mais rápido e adequado para aplicações onde pequenas imprecisões são aceitáveis. No entanto, pode sofrer instabilidade numérica se a matriz R_n se tornar mal condicionada, especialmente se os dados forem altamente correlacionados.

Neste capítulo, exploramos os conceitos fundamentais da Regressão Linear, abordando tanto a regressão linear simples quanto múltipla. Apresentamos o Método dos Mínimos Quadrados (MMQ) como a principal técnica para estimar coeficientes, demonstrando sua aplicação em diversos contextos.

A seguir, introduzimos o Método dos Mínimos Quadrados Recursivos (MQR) como uma extensão do MMQ, destacando sua importância para sistemas dinâmicos onde os parâmetros podem variar no tempo.

Estudo de Caso

Neste capítulo, detalharemos como foi feita a obtenção dos parâmetros experimentais, utilizando o Método dos Mínimos Quadrados Recursivos (MQR) e dados coletados em experimentos realizados em 2022 na Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE) por [1]. A seguir vamos detalhar os passos da realização dos experimentos até o momento de utilizar os dados experimentais para obter os parâmetros pretendidos.

4.1 Configuração Experimental

Os experimentos foram realizados em um recipiente circular de plástico com raio $R = 25\text{ cm}$ e uma lâmina de água de 5 cm . Essa configuração restringe os movimentos dos peixes a duas dimensões, aproximando o cenário experimental ao modelo proposto, que considera movimentos apenas em x e y . O recipiente foi produzido com material que minimiza reflexos nas bordas, criando um ambiente mais natural e reduzindo interferências no comportamento dos peixes.

O peixe utilizado nos experimentos foi o *Danio rerio* (veja Fig. 4.1), amplamente reconhecido como modelo biológico devido ao seu comportamento social em cardume, facilidade de manipulação em laboratório e elevada similaridade genética com os seres humanos [26, 17]. Além disso, sua transparência durante as fases iniciais de desenvolvimento permite estudos detalhados de processos biológicos e fisiológicos. O zebrafish possui uma alta taxa de reprodução, permitindo estudos em larga escala, e tem sido amplamente utilizado em pesquisas científicas desde a década de 1970 [16]. Sua versatilidade torna-o ideal para estudos nas áreas de neurociência, genética, toxicologia e biologia do desenvolvimento [26].

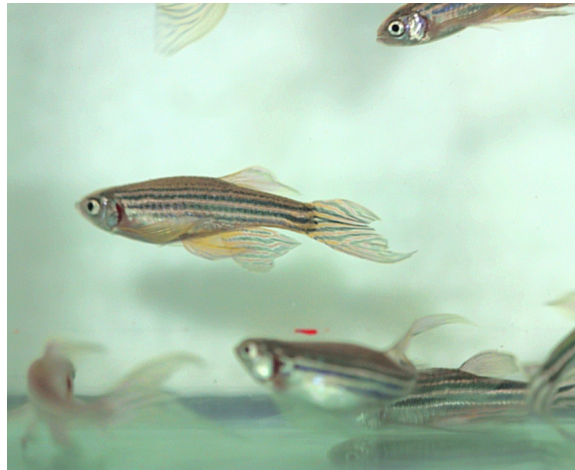


Figura 4.1: O peixe *Danio rerio*, modelo biológico amplamente utilizado. Retirado de [1].

4.2 Planejamento Experimental

O ambiente experimental foi preparado com antecedência para garantir a padronização entre os experimentos. Foram realizados cinco experimentos para cada grupo de peixes, variando o número de indivíduos em $N = \{2, 3, 5, 8, 10, 13, 15, 18, 20, 25, 30\}$. A quantidade de indivíduos N foi selecionada para abranger uma quantidade diferente de densidade, desde grupos menores (como $N=2$), até grupos maiores onde o comportamento coletivo se torna mais aparente. Cada experimento teve duração aproximada de 6 minutos, totalizando 55 experimentos.

Tabela 4.1: Resumo dos experimentos realizados.

Grupo (N)	Número de Experimentos	Duração (min)	Total de Pontos
2	5	6	58.500
3	5	6	58.500
...	...	...	...
30	5	6	58.500

4.3 Rastreamento dos Peixes com IdTracker

Após o tratamento inicial, os vídeos foram processados pelo software **IdTracker** [21], que identifica e rastreia cada peixe no grupo experimental. O programa utiliza algoritmos de visão computacional para:

- Identificar indivíduos de forma única, mesmo em densidades elevadas.
- Rastrear as posições x e y de cada peixe ao longo do tempo.

A escolha deste software se deve à sua facilidade de uso e à precisão no rastreamento dos indivíduos, uma tarefa que seria de grande dificuldade se realizada manualmente.

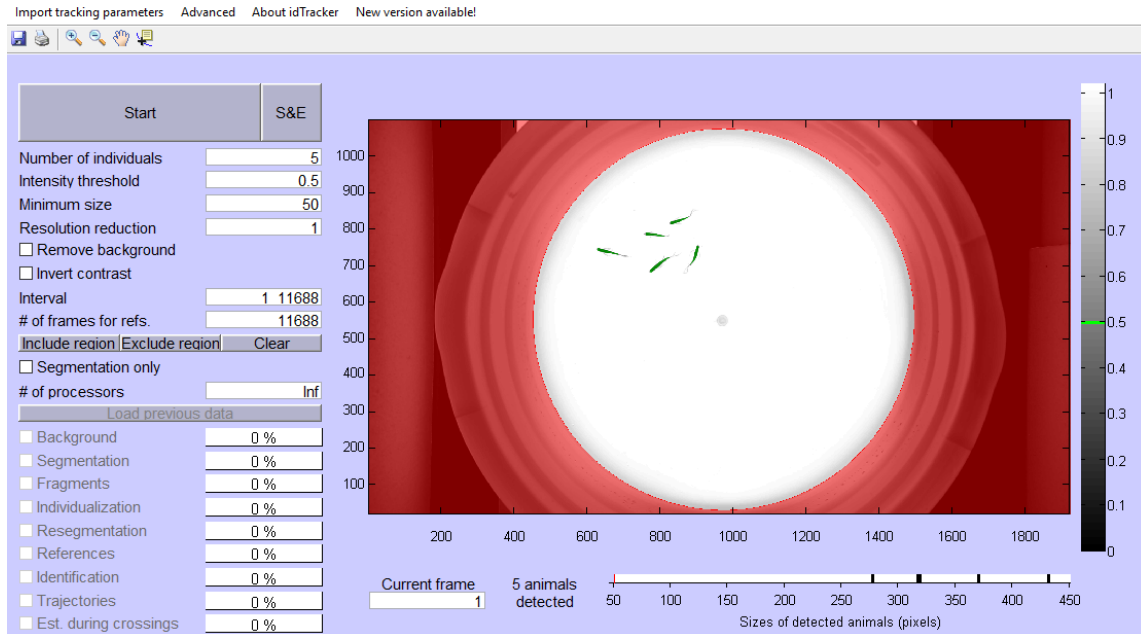


Figura 4.2: Interface do IdTracker.

Com base nos dados processados pelo IdTracker, foram computados parâmetros importantes como:

- Posições x e y de cada peixe.
- Velocidade de cada indivíduo.
- Distâncias entre os peixes do cardume.

4.4 Processamento dos Dados

Os dados de posição extraídos pelo IdTracker foram convertidos de pixels para centímetros, utilizando o raio efetivo do recipiente como referência. Foi adotado um intervalo de tempo de $\Delta t = 1/30s$, correspondente à taxa de quadros dos vídeos. Para centralizar o sistema, as posições foram redefinidas com o ponto $R = 0$ coincidente com o centro do recipiente.

Cada experimento gerou uma série temporal de 11.688 pontos, correspondendo às trajetórias individuais dos peixes. Ao final, os cinco registros por grupo totalizaram aproximadamente 58.500 pontos por parâmetro analisado. Com esses dados foi possível inicialmente plotar a trajetória dos peixes dentro do aquário.

Os dados obtidos forneceram informações detalhadas sobre o comportamento coletivo do cardume. A centralização dos dados e a conversão de unidades foram essenciais para

padronizar as análises, garantindo consistência nos resultados. Esses parâmetros serão utilizados como entrada no Método dos Mínimos Quadrados Recursivos, possibilitando a estimativa de coeficientes dinâmicos que descrevem o comportamento coletivo dos peixes.

4.5 Determinação dos Parâmetros de Distância

Os parâmetros de distância apresentados na Tabela 4.2 foram definidos com base na observação dos vídeos experimentais, analisando como os peixes interagiam entre si e com as bordas do aquário, ou seja, não foi feita uma medição exata, esses valores foram definidos fazendo observações a partir dos vídeos dos experimentos. Embora não tenhamos feito medições diretas, conseguimos estimar esses valores ao observar a movimentação dos peixes. A seguir, explicamos como cada um desses parâmetros foi definido:

- **α (distância mínima para interação de repulsão):** Notamos que os peixes evitavam chegar muito perto uns dos outros. Sendo assim estimamos um valor considerável para ser a distância mínima para ocorra essa reação.
- **β (fator de suavização para a transição entre atração e repulsão):** A faixa de distâncias em que não há uma clara interação de atração ou repulsão foi analisada. O parâmetro β foi ajustado para garantir uma transição suave entre os regimes.
- **δ (raio de interação para o comportamento de cardume):** Esse parâmetro foi estimado observando o quanto os peixes se mantinham próximos uns dos outros enquanto nadavam juntos. Basicamente, ele define até que distância o peixe ainda tenta se alinhar com o seu vizinho para manter um movimento coordenado.
- **d^+ (limite de atuação da força de repulsão na borda):** Nos vídeos, percebemos que os peixes não esperavam tocar na parede para mudar de direção. Eles começavam a virar antes, e esse parâmetro reflete a distância em que isso acontece.
- **d^- (limite de atuação da força de atração na borda):** Alguns peixes pareciam gostar de ficar perto da borda, sem necessariamente fugir dela. Esse parâmetro foi definido com base na distância em que eles se mantinham próximos à parede sem se afastar de imediato.

Não tínhamos a massa exata dos peixes utilizados nos experimentos. Por isso, adotamos um valor aproximado de $m = 0.35$ g [3], que se mostrou uma boa estimativa. Esse valor é fundamental para a modelagem das forças que atuam no sistema.

Para os demais parâmetros dinâmicos, como a (coeficiente de força propulsiva), k_b (coe-

Tabela 4.2: Parâmetros de distância para grupos menores(2,3 e 5 peixes.)

Parâmetro	Valor	Descrição
α	1.0 cm	Distância mínima para interação de repulsão entre indivíduos.
β	6.0 cm	Fator de suavização para a transição entre atração e repulsão.
δ	10.0 cm	Raio de interação para o comportamento de cardume.
d^+	5.0 cm	Limite de atuação da força de repulsão na borda.
d^-	10.0 cm	Limite de atuação da força de atração na borda.

ficiente de interação), k_c (coeficiente de cardume), K_w^+ (coeficiente de repulsão da parede) e K_w^- (coeficiente de atração da parede), será utilizado um programa computacional que implementa o Método dos Mínimos Quadrados Recursivos. Este método permite ajustar os valores desses parâmetros de forma eficiente, utilizando as trajetórias observadas como entrada e minimizando os erros entre as posições medidas e as calculadas pelo modelo.

A seguir, os gráficos apresentam as médias e os desvios padrão dos parâmetros dinâmicos para grupos de 2, 3 e 5 peixes. A análise dessas métricas permite compreender como a variabilidade nas interações individuais impacta a dinâmica do grupo.

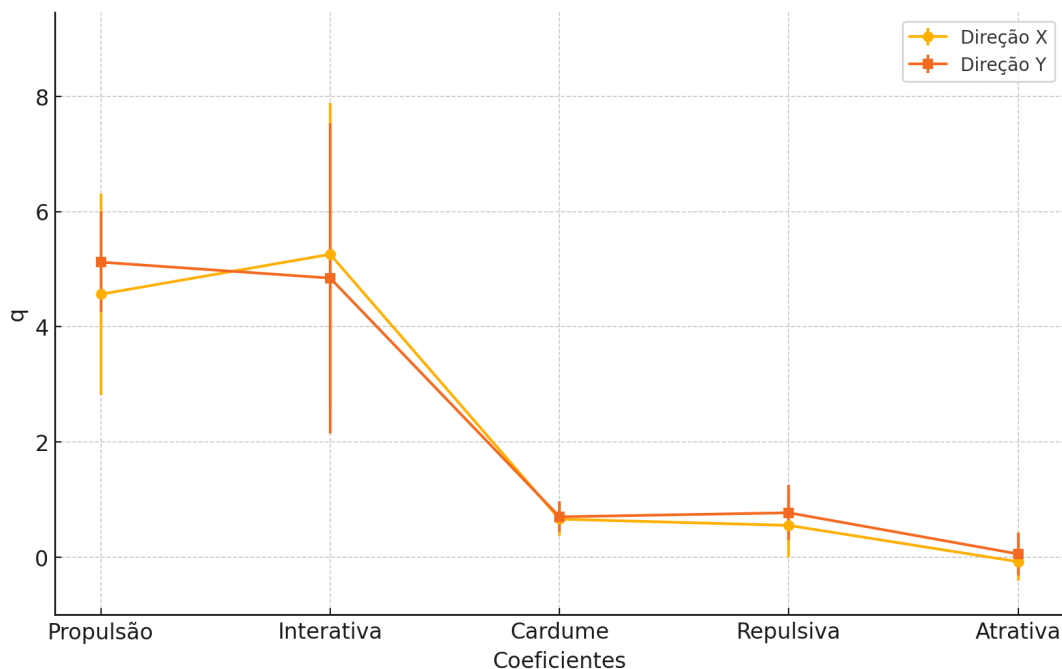


Figura 4.3: Média e desvio padrão dos parâmetros obtidos para 2 peixes usando o método dos mínimos quadrados recursivos

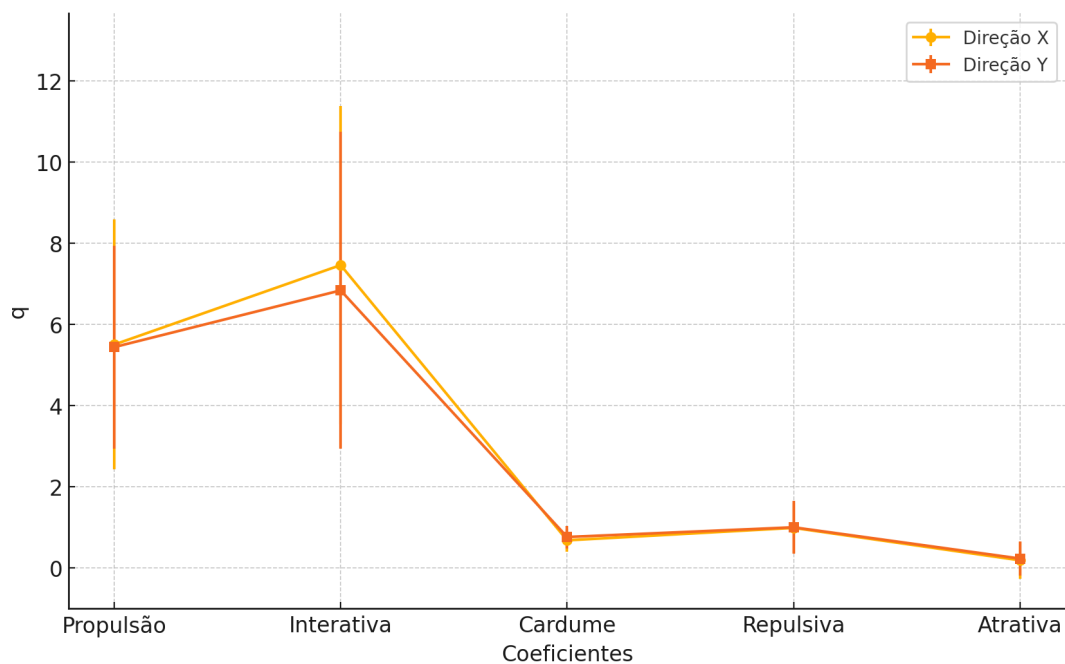


Figura 4.4: Média e desvio padrão dos parâmetros obtidos para 3 peixes usando o método dos mínimos quadrados recursivos

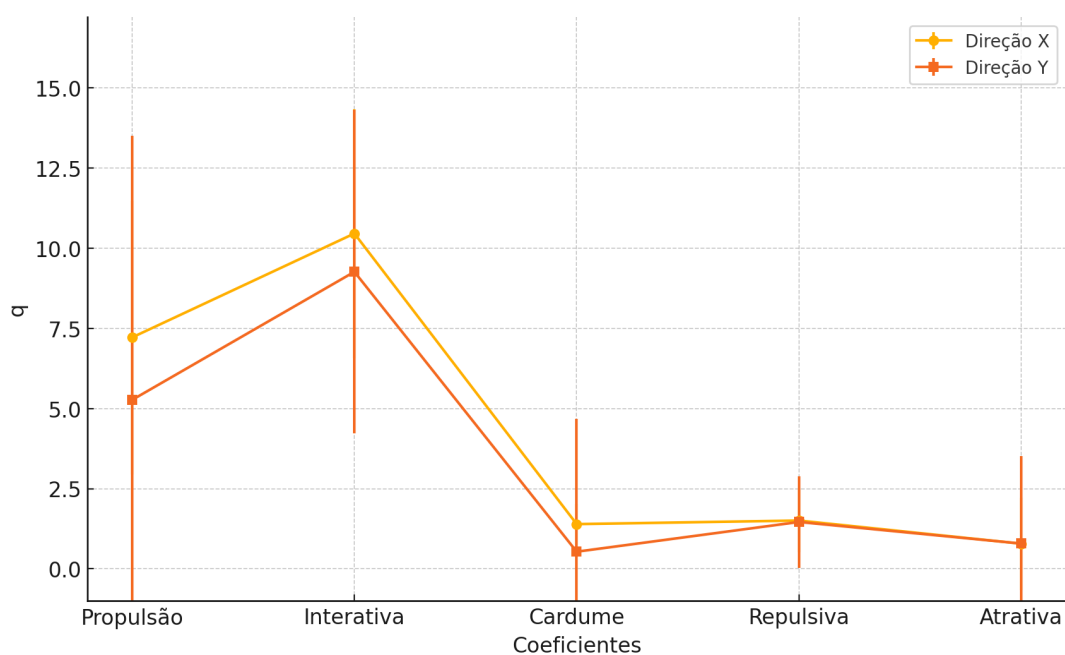


Figura 4.5: Média e desvio padrão dos parâmetros obtidos para 5 peixes usando o método dos mínimos quadrados recursivos

É possível perceber que, para $N = 5$ peixes, o coeficiente da força de propulsão já varia

significativamente, o que indica possivelmente que o peixe começa a ajustar sua velocidade para se alinhar mais estreitamente com o grupo e evitar se distanciar.

Os resultados indicam que, à medida que o número de peixes no grupo aumenta, a variabilidade nos parâmetros de interação tende a mudar, refletindo possíveis alterações nas dinâmicas do cardume.

Conforme o número de peixes no grupo aumenta, as interações entre eles ficam mais complexas, e novos padrões de comportamento começam a surgir. Em grupos maiores, os peixes parecem ajustar naturalmente as distâncias de atração e repulsão para manter o cardume coeso e evitar colisões desnecessárias. Para representar melhor essa adaptação no modelo, foi preciso reajustar os parâmetros de distância, garantindo que eles fizessem sentido para diferentes tamanhos de grupo. A Tabela 4.3 mostra esses ajustes feitos para grupos maiores. Essas mudanças ajudaram a capturar de forma mais fiel como os peixes se organizam no espaço e reduziram as diferenças entre os dados experimentais e as simulações.

Tabela 4.3: Parâmetros de distância ajustados para grupos maiores (8, 10 e 13 peixes).

Parâmetro	Valor	Descrição
α	3.0cm	Distância mínima para interação de repulsão entre indivíduos.
β	12cm	Fator de suavização para a transição entre atração e repulsão.
δ	5.0cm	Raio de interação para o comportamento de cardume.
d^+	4.0cm	Limite de atuação da força de repulsão na borda.
d^-	2.0cm	Limite de atuação da força de atração na borda.

Observa-se que, para grupos maiores, foi necessário ajustar os coeficientes de distância de forma a refletir melhor as interações coletivas observadas experimentalmente. O aumento da distância mínima de repulsão (α) de 1.0cm para 3.0cm sugere que, em grupos maiores, os peixes mantêm um maior espaçamento individual para evitar colisões.

Além disso, o fator de suavização da transição entre atração e repulsão (β) aumentou, indicando que a passagem entre esses dois regimes ocorre de maneira mais gradual, possivelmente devido ao aumento da complexidade das interações no cardume.

Por outro lado, o raio de interação do cardume (δ) foi reduzido de 10.0cm para 5.0cm, sugerindo que, em grupos maiores, os peixes ajustam suas trajetórias com base em interações mais locais, sem a necessidade de monitorar indivíduos mais distantes.

Finalmente, os coeficientes d^+ e d^- , que controlam as forças de interação com a borda, foram reduzidos, o que pode indicar que, com mais peixes no grupo, a influência das bordas sobre o comportamento do cardume diminui, visto que a interação entre os próprios indivíduos se torna predominante.

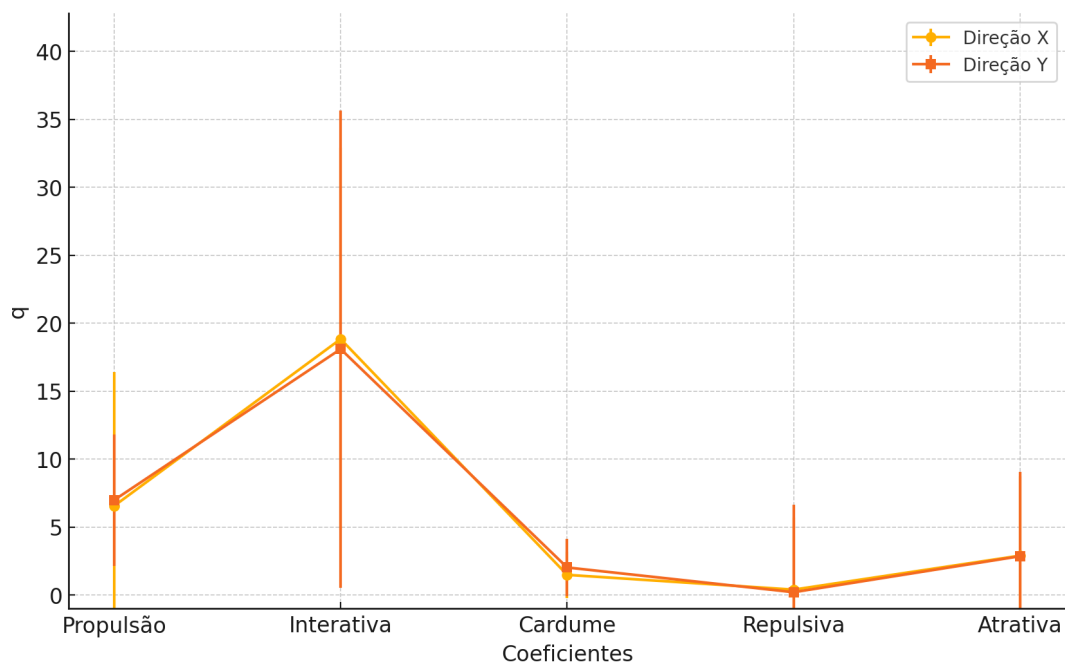


Figura 4.6: Média e desvio padrão dos parâmetros obtidos para 8 peixes usando o método dos mínimos quadrados recursivos

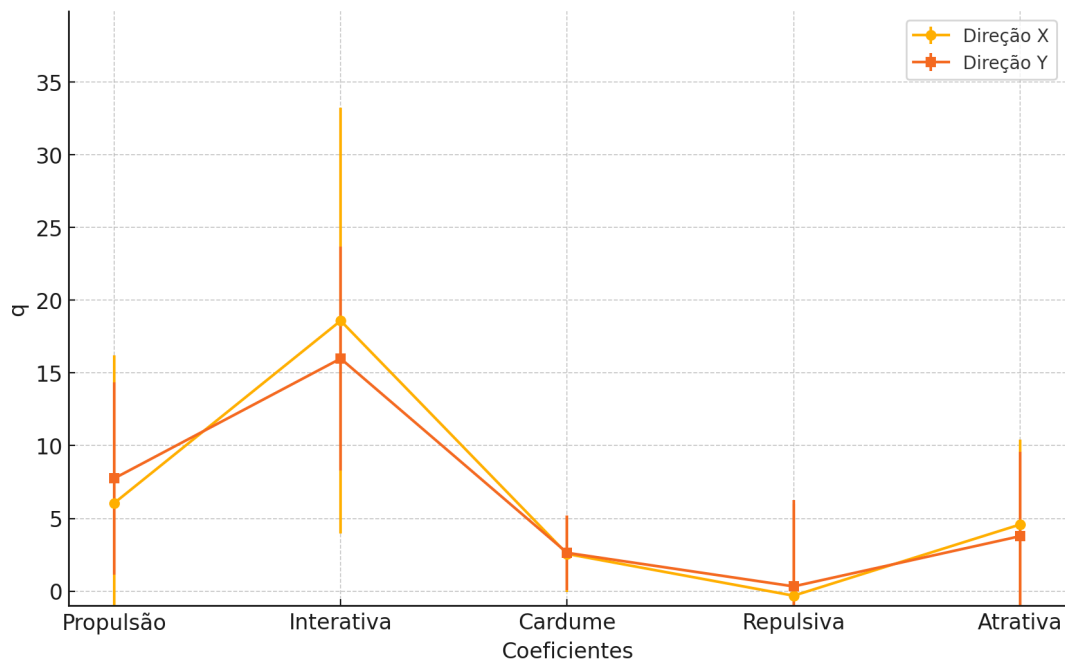


Figura 4.7: Média e desvio padrão dos parâmetros obtidos para 10 peixes usando o método dos mínimos quadrados recursivos

Os resultados obtidos para grupos maiores de 8, 10 e 13 peixes indicam mudanças sig-

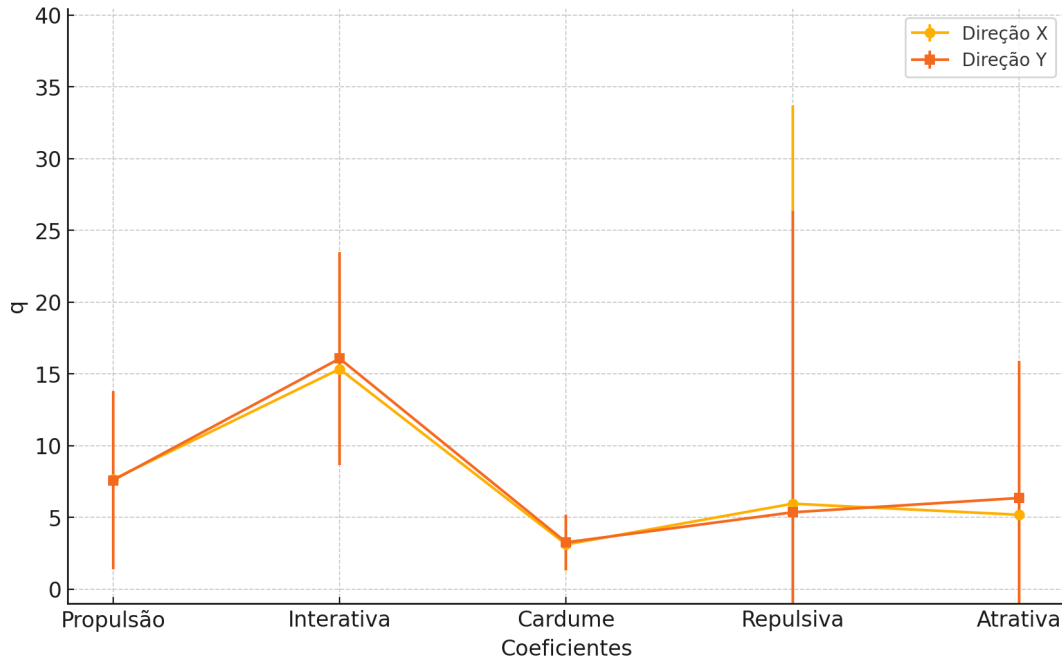


Figura 4.8: Média e desvio padrão dos parâmetros obtidos para 13 peixes usando o método dos mínimos quadrados recursivos

nificativas nas interações entre os indivíduos. Em comparação com grupos menores, observa-se uma maior variabilidade em alguns coeficientes, especialmente nos relacionados à atração e repulsão. Isso sugere que, à medida que o tamanho do grupo aumenta, os peixes ajustam suas estratégias de movimentação para otimizar a coesão do cardume e evitar colisões.

4.6 Convergência dos Parâmetros e Análise dos Resíduos

Para garantir que o ajuste dos parâmetros do modelo aos dados experimentais foi realizado de maneira eficaz, analisamos a convergência dos parâmetros estimados ao longo do processo de otimização. A convergência indica que o método de ajuste conseguiu encontrar valores estáveis para os coeficientes, minimizando os erros entre os dados observados e simulados.

Além disso, avaliamos os resíduos do ajuste, definidos como a diferença entre as posições medidas e as posições previstas pelo modelo. Matematicamente, os resíduos e_i são calculados como:

$$e_i = y_i - \hat{y}_i \quad (4.1)$$

onde y_i representa os valores observados e $\hat{y}_i$ representa os valores previstos pelo modelo.

Um comportamento adequado dos resíduos, distribuídos de forma aleatória e sem padrões sistemáticos, sugere que o modelo captura corretamente a dinâmica do sistema sem viés significativo.

Os gráficos apresentados a seguir ilustram a evolução dos parâmetros ao longo das iterações do algoritmo de otimização, bem como os resíduos do ajuste para diferentes tamanhos de grupo.

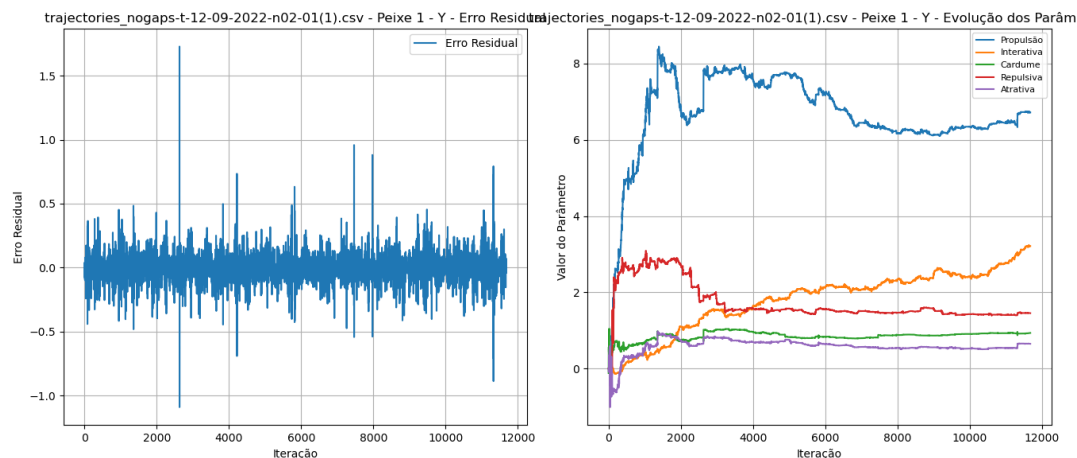


Figura 4.9: Evolução dos parâmetros estimados e resíduos ao longo das iterações para o grupo de 2 peixes.

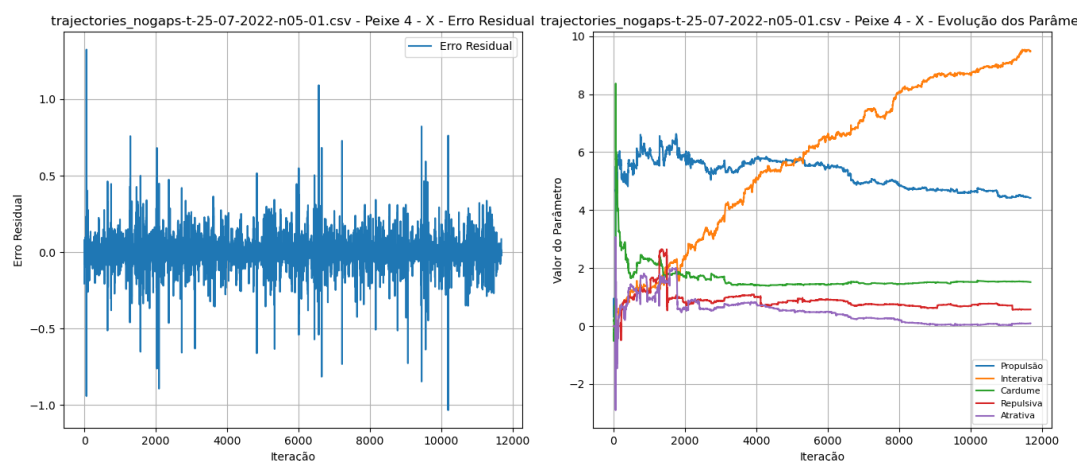


Figura 4.10: Evolução dos parâmetros estimados e resíduos ao longo das iterações para o grupo de 5 peixes.

A Figura 4.9 apresenta os resultados para o grupo de 2 peixes, enquanto as Figuras 4.10 e 4.11 mostram a evolução dos parâmetros e os resíduos para os grupos de 5 e 13 peixes, respectivamente.

Observa-se que os resíduos apresentam um comportamento oscilatório em torno de zero, sem tendências sistemáticas, o que indica que o modelo é capaz de capturar corretamente

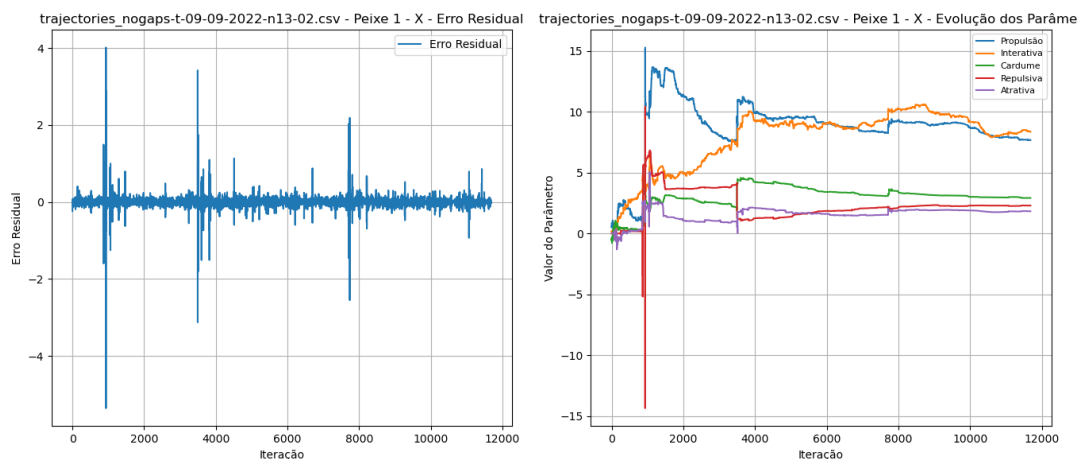


Figura 4.11: Evolução dos parâmetros estimados e resíduos ao longo das iterações para o grupo de 13 peixes.

as dinâmicas individuais e coletivas dos peixes. Além disso, os parâmetros estimados convergem para valores estáveis ao longo das iterações do ajuste, sugerindo que o algoritmo de otimização encontrou soluções consistentes para cada cenário analisado.

Outro ponto relevante é a diferença na estabilização dos parâmetros conforme o tamanho do grupo aumenta. Para grupos menores (Figura 4.9), a convergência ocorre de maneira mais rápida, enquanto para grupos maiores (Figura 4.11), há flutuações mais pronunciadas antes da estabilização, o que pode indicar um aumento na complexidade das interações entre os indivíduos.

Esses resultados demonstram que o modelo proposto é robusto e consegue representar com precisão os padrões de comportamento coletivo dos peixes, independentemente do tamanho do grupo.

4.6.1 Influência da Zona de Repulsão da Parede nos Parâmetros Dinâmicos

A escolha dos parâmetros de distância é um aspecto fundamental na modelagem do comportamento dos peixes, sendo um processo desafiador devido à complexidade das interações individuais e coletivas. Pequenas variações nesses parâmetros podem afetar significativamente a dinâmica do grupo, tornando essencial sua definição cuidadosa.

Para ilustrar essa complexidade, realizamos um estudo específico para três peixes, no qual a zona de repulsão da parede ($ziwp$) foi sistematicamente variada de 1.0 a 8.0. O objetivo dessa análise foi investigar como essa variação impacta os diferentes parâmetros dinâmicos, proporcionando uma melhor compreensão dos mecanismos de interação dos peixes com o ambiente.

Os gráficos a seguir mostram como a zona de repulsão da parede influencia os parâmetros de atração, cardume, interação, propulsão e repulsão da parede.

Os gráficos indicam que:

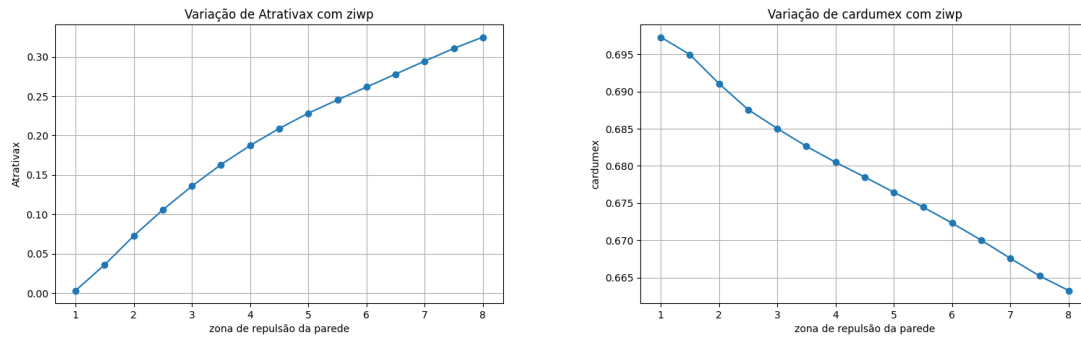


Figura 4.12: Influência da zona de repulsão ($ziwp$) nos parâmetros de atração e cardume para três peixes.

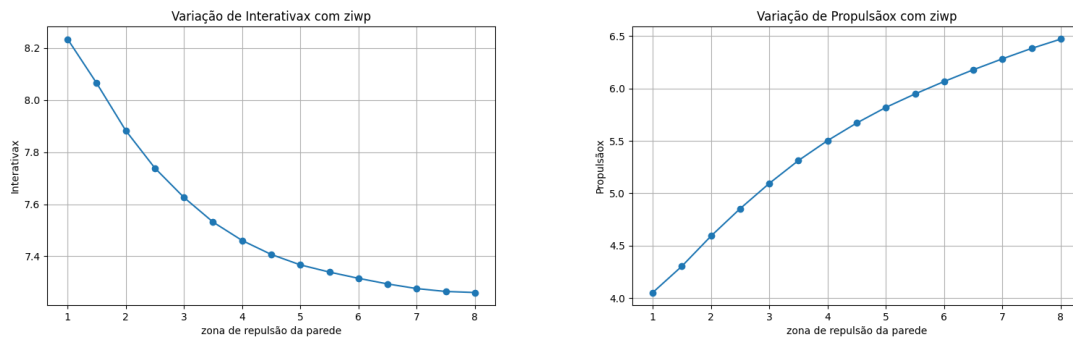


Figura 4.13: Influência da zona de repulsão ($ziwp$) nos parâmetros de interação (k_b) e propulsão (a) para três peixes.

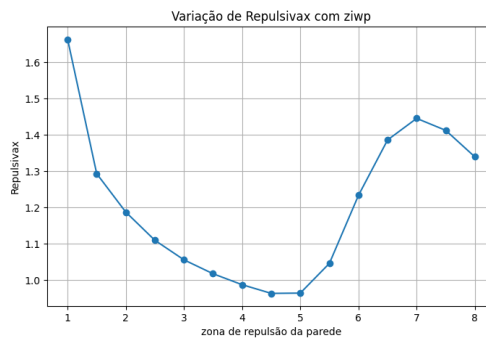


Figura 4.14: Influência da zona de repulsão ($ziwp$) no parâmetro de repulsão da parede (K_w^+) para três peixes.

- À medida que a zona de repulsão aumenta, o parâmetro de atração também cresce. Ou seja, o modelo ajusta os parâmetros Para manter a coesão do cardume, isso implica em um aumento de atração entre eles.
- O parâmetro de cardume tende a diminuir com o aumento de $ziwp$, indicando que a

coesão do grupo é menor quando a repulsão da parede atua sobre uma área maior.

- O parâmetro de interação (k_b) tende a diminuir a medida que $ziwp$ aumenta, sugerindo que com a zona de repulsão da parede sendo sentido a distancia maiores os peixes procuram interagir mais com as bordas do aquário do que entre si.
- O parâmetro de propulsão (a) aumenta conforme $ziwp$ cresce, indicando que os peixes nadam mais rapidamente à medida que o ambiente se torna mais restritivo.
- O parâmetro de repulsão da parede (K_w^+) apresenta um comportamento diferente dos outros: quando $ziwp$ é pequeno, o valor de K_w^+ é alto, sugerindo que a força de repulsão precisa ser mais intensa, pois os peixes só percebem a borda quando estão muito próximos dela. Conforme $ziwp$ aumenta, K_w^+ diminui, indicando que os peixes começam a sentir a influência da parede a uma distância maior e, portanto, a força necessária para evitar a borda se reduz. No entanto, após $ziwp = 5$, o parâmetro de repulsão volta a crescer, possivelmente porque uma zona de repulsão maior começa a impactar a organização do grupo, onde os peixes se sentem mais atraídos para a borda do aquário.

Esses resultados sugerem que a zona de repulsão da parede desempenha um papel crucial na organização do grupo, modulando a força das interações e afetando a dinâmica geral do cardume.

Além de regular as interações dos peixes com as bordas do aquário, a zona de repulsão da parede afeta diretamente a organização do grupo, alterando a intensidade das interações entre os indivíduos. Essa análise destaca a complexidade na escolha dos parâmetros de distância, evidenciando que pequenas variações podem levar a ajustes significativos nos coeficientes dinâmicos.

Os resultados obtidos reforçam a importância de considerar cuidadosamente os efeitos ambientais e espaciais na modelagem do comportamento coletivo dos peixes.

CAPÍTULO 5

Resultados e Análises

Neste capítulo apresentaremos as análises e resultados obtidos a partir de simulações computacionais de diversos grupos de peixes. Para realizar as simulações, foram utilizados os parâmetros obtidos a partir do método dos mínimos quadrados. A Tabela 5.1 apresenta os valores usados na simulação para cada grupo de peixes analisado ($N = 2$ até $N = 13$).

Tabela 5.1: Parâmetros utilizados na simulação para diferentes valores de N .

Nº de Peixes (N)	Propulsão (a) [g·cm/s ²]	Interativa (K_b) [g·cm ² /s ²]	Cardume (K_c) [g/s]	Repulsão Parede (K_w^+) [g/cm]	Atração Parede (K_w^-) [g/cm]
2	5.60	4.92	0.72	1.08	0.17
3	5.90	6.46	0.58	0.98	0.23
5	5.25	7.74	0.85	1.48	0.78
8	6.03	13.23	1.10	0.68	1.10
10	5.13	14.75	1.65	0.43	2.26
13	4.72	15.03	2.02	2.27	4.11

Para verificar a validação das nossas simulações, realizamos uma comparação da polarização média com os resultados apresentados por [24]. Por fim, verificamos como se dá a influência do comportamento dos peixes conforme aumentamos a densidade do grupo.

5.1 Análise da Polarização

A partir dos dados obtidos na simulação computacional, foi calculada a polarização média para os diferentes grupos de peixes. A Figura 5.1 apresenta a comparação da PDF da polarização entre simulação e experimento para diferentes valores de N .

A polarização é um dos principais indicadores do comportamento coletivo dos peixes e reflete o nível de alinhamento do grupo em uma direção comum. Valores próximos de $P = 1$ indicam um movimento altamente coordenado, enquanto valores menores representam maior desorganização dos indivíduos no grupo. Dessa forma, a análise da polarização permite avaliar como a densidade influencia o alinhamento e a coesão do cardume.

Nos gráficos apresentados a seguir, espera-se observar que a polarização média diminui à medida que o número de peixes aumenta. Isso pode estar relacionado ao aumento das interações sociais e à maior variedade nas direções individuais de nado. Essa tendência já foi observada em estudos experimentais, como os realizados por [24].

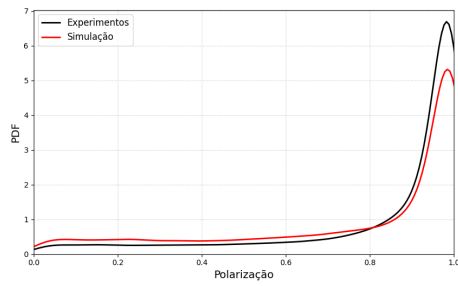
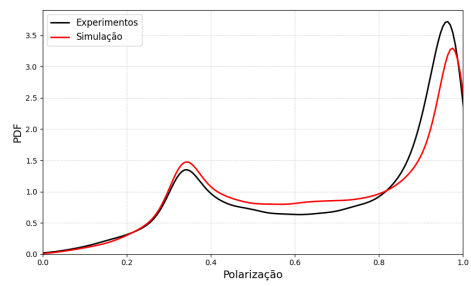
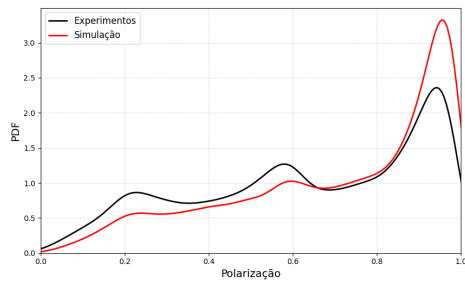
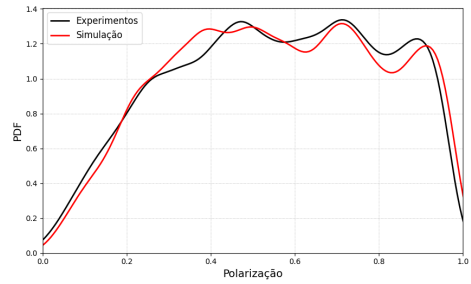
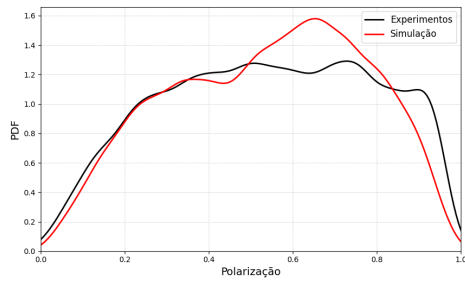
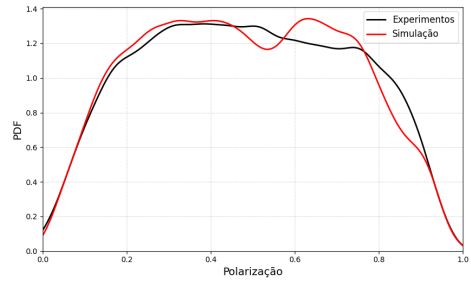
(a) $N = 2$ peixes(b) $N = 3$ peixes(c) $N = 5$ peixes(d) $N = 8$ peixes(e) $N = 10$ peixes(f) $N = 13$ peixes

Figura 5.1: Comparação da PDF da polarização entre simulação e experimento para diferentes valores de N .

A Figura 5.2 apresenta os valores médios da polarização $\langle P \rangle$ em função da densidade $\rho = \frac{N}{A}$ de peixes. Os dados experimentais foram extraídos do artigo [24], enquanto os dados simulados foram obtidos a partir do desenvolvimento deste trabalho.

Ambas as curvas foram ajustadas por leis de potência da forma:

$$\langle P \rangle \propto \rho^{-\beta} \quad (5.1)$$

onde o expoente β foi estimado para cada conjunto de dados. As barras de erro representam as incertezas associadas às médias experimentais e simuladas.

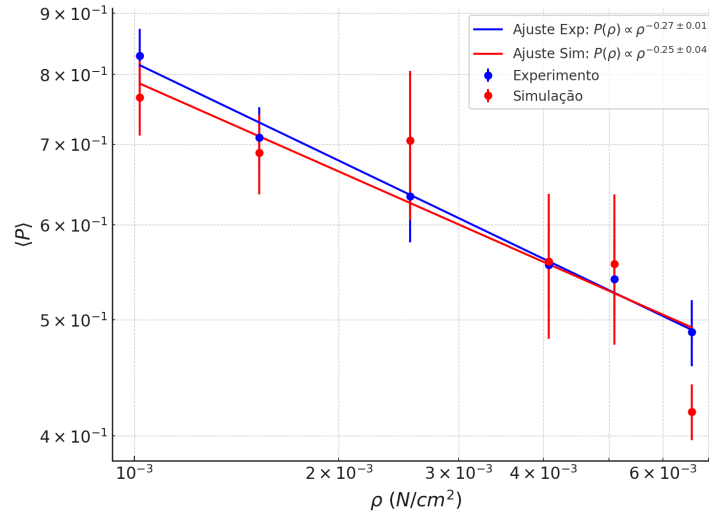


Figura 5.2: Polarização média $\langle P \rangle$ em função da densidade de peixes ρ . As curvas representam os ajustes por leis de potência, enquanto os pontos indicam os valores médios obtidos nos experimentos e simulações.

Os resultados apresentados na figura 5.2 indicam que ambas as curvas do experimento e da simulação seguem padrões semelhantes de diminuição da polarização com o aumento da densidade dos peixes. Isso significa que em grupos menores os peixes tendem a nadar mais alinhados, mantendo um movimento mais organizado. Já em grupos maiores essa organização diminui possivelmente porque cada peixe precisa reagir a mais vizinhos ao mesmo tempo, tornando o alinhamento mais difícil. Esse comportamento faz sentido já que quanto mais indivíduos no grupo, mais complexas se tornam as interações entre eles. Onde podemos destacar que o intervalo de incerteza da simulação abrange o valor experimental, indicando que o modelo consegue representar bem a relação entre organização do cardume e densidade de peixes.

Na figura 5.1 observamos que para os casos com $N = 2$ e $N = 3$, a distribuição de polarização apresenta picos mais elevados em valores próximos de $P = 1$, indicando um comportamento altamente alinhado entre os peixes. No entanto, à medida que N cresce, observa-se uma maior dispersão na distribuição da polarização, sugerindo que os indivíduos possuem maior liberdade para variar suas direções de nado.

Essa transição no comportamento coletivo é consistente com observações experimentais, como discutido por [24]. Nesses experimentos, foi constatado que, para grupos pequenos, os peixes tendem a nadar de forma mais coordenada, enquanto para grupos grandes o comportamento se torna mais desorganizado devido à diversidade de interações entre os indivíduos.

Além disso, observa-se que, para grupos com maior densidade ($N = 10$ e $N = 13$), a distribuição da polarização se torna mais uniforme e apresenta menos picos. Isso sugere que, em grupos grandes, pode haver maior diversidade de padrões de movimentação, o que reduz a probabilidade de alinhamento total do cardume. Esse resultado reforça a ideia de que o comportamento coletivo dos peixes depende da densidade do grupo, influenciando a forma como os indivíduos interagem e tomam decisões sobre a direção de deslocamento.

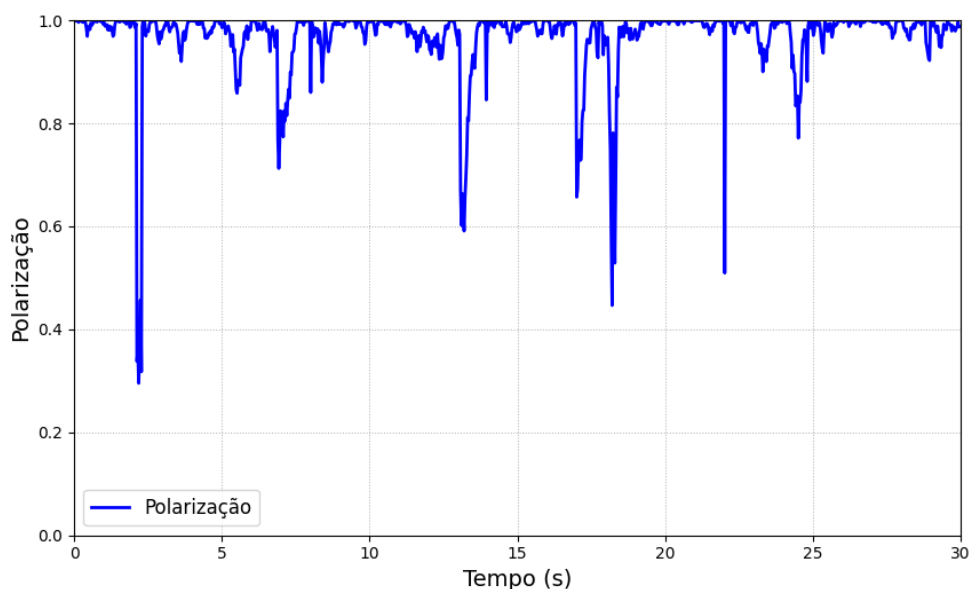


Figura 5.3: Série temporal da polarização para 2 peixes nos primeiros 30 segundos da simulação.

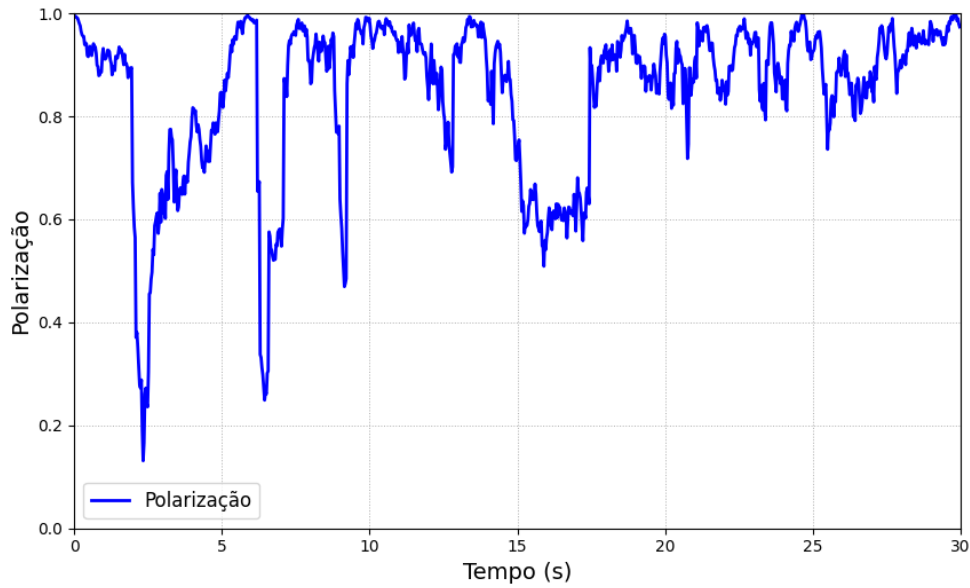


Figura 5.4: Série temporal da polarização para 5 peixes nos primeiros 30 segundos da simulação.

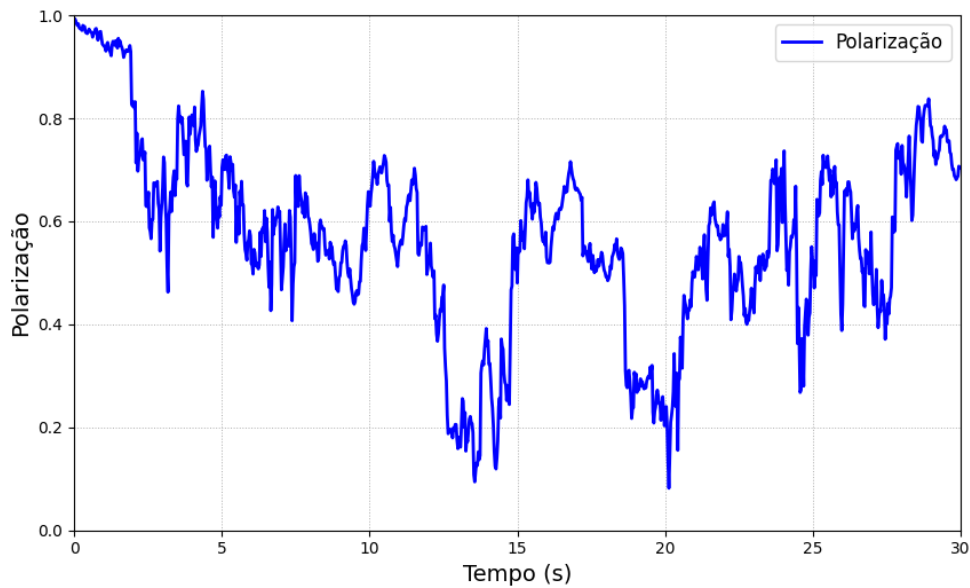


Figura 5.5: Série temporal da polarização para 13 peixes nos primeiros 30 segundos da simulação.

As Figuras 5.3, 5.4 e 5.5 mostram a evolução da polarização ao longo dos primeiros 30 segundos da simulação para grupos de 2, 5 e 13 peixes, respectivamente. Cada gráfico representa um exemplo de simulação, ilustrando como a organização do grupo se desenvolve com o tempo. Observa-se que, para $N=2$, a polarização tende a oscilar em valores mais altos, o que indica um maior alinhamento entre os indivíduos ao longo do tempo. Esse comportamento pode ser atribuído à ausência de interações complexas, permitindo que os peixes mantenham trajetórias mais coordenadas.

Com o aumento do número de peixes para $N=5$, as oscilações na polarização tornam-se mais evidentes, sugerindo momentos de organização seguidos por períodos de reorientação dentro do grupo. A interação entre os indivíduos começa a influenciar de maneira mais significativa a dinâmica do sistema, o que resulta em uma maior variabilidade nos valores de polarização.

No caso de $N=13$, a polarização exibe uma tendência a valores menores e mais irregulares, indicando uma redução na coerência do movimento coletivo. Isso sugere que, à medida que o número de peixes aumenta, a presença de interações múltiplas e variações individuais no comportamento levam a uma maior dispersão na direção do movimento do grupo.

Esses resultados reforçam a influência do tamanho do grupo na organização coletiva, sugerindo que, em sistemas com baixa densidade, os indivíduos tendem a se alinhar mais facilmente, enquanto em grupos maiores as interações complexas podem reduzir a polarização global.

5.2 Trajetórias Observadas

Nesta seção, apresentamos as trajetórias observadas para diferentes grupos de peixes. As trajetórias ilustram como os indivíduos interagem entre si e com o ambiente, destacando padrões característicos de movimentação, como alinhamento, coesão e dispersão. As figuras a seguir mostram as trajetórias coletadas durante os primeiros 30 segundos da simulação.

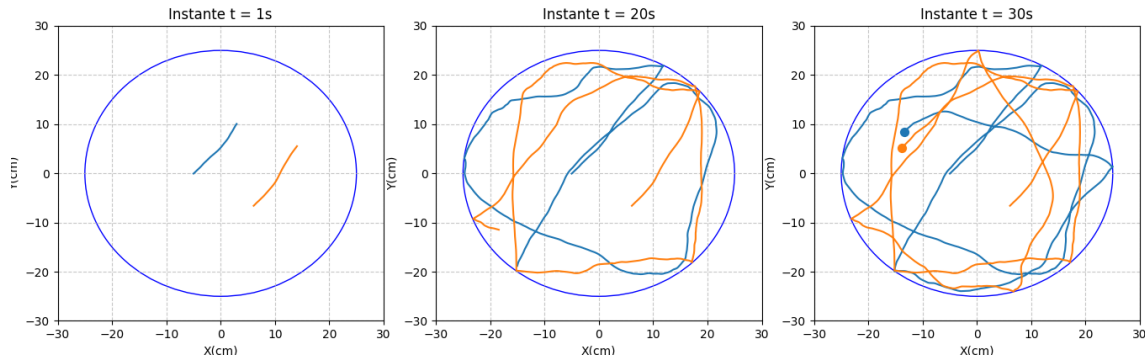


Figura 5.6: Trajetória de 2 peixes em um aquário circular de raio 25 cm durante os primeiros 30 segundos da simulação.

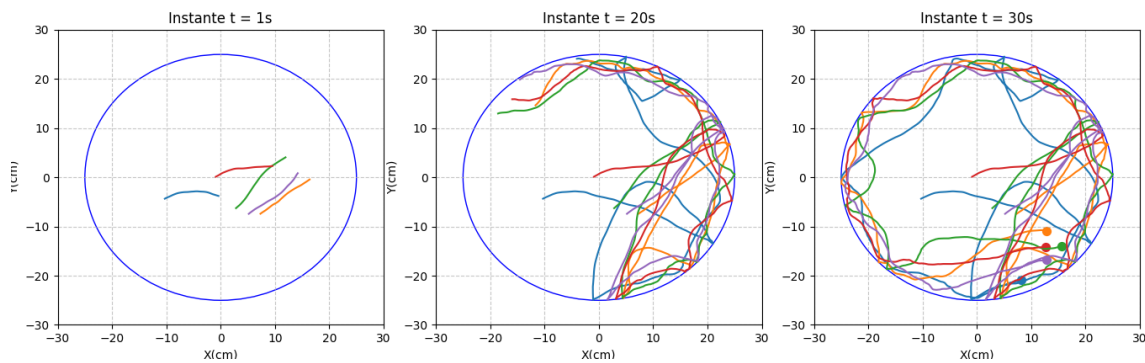


Figura 5.7: Trajetória de 5 peixes em um aquário circular de raio 25 cm durante os primeiros 30 segundos da simulação.

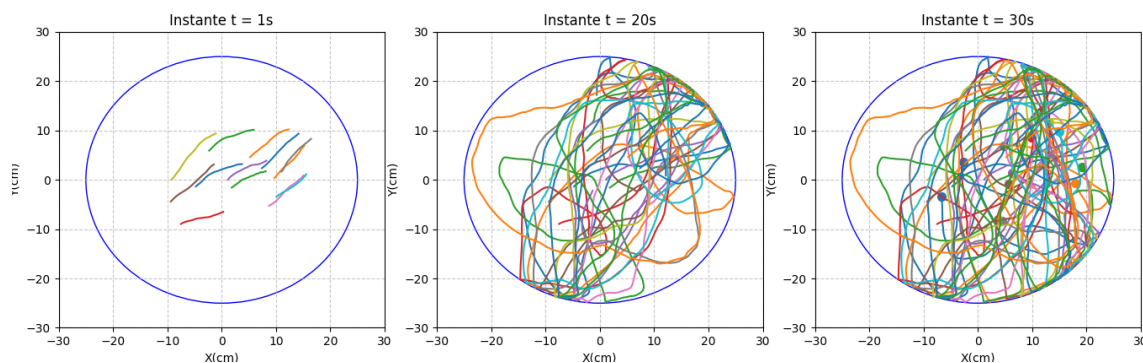


Figura 5.8: Trajetória de 13 peixes em um aquário circular de raio 25 cm durante os primeiros 30 segundos da simulação.

As figuras 5.6, 5.7 e 5.8 mostram as trajetórias dos peixes em diferentes configurações de densidade populacional. Observa-se que, para $N=2$, os peixes têm maior liberdade de movimento, com trajetórias bem definidas. À medida que o número de peixes aumenta ($N=5$ e $N=13$), as trajetórias tornam-se mais complexas devido à intensificação das interações coletivas e à influência das forças interativas.

Para $N=5$, os peixes ainda apresentam trajetórias que refletem alguma individualidade, mas já é possível notar o início de padrões coletivos emergentes. No caso de $N=13$, a alta densidade leva a uma dinâmica mais complexa, com trajetórias que frequentemente se cruzam, evidenciando um comportamento de grupo mais forte.

Esses resultados são consistentes com a expectativa de que o comportamento coletivo dos peixes se intensifica à medida que a densidade populacional aumenta. Isso reflete o papel das interações locais e das forças de cardume na organização dos indivíduos dentro do espaço confinado do aquário.

5.3 Distribuição de Velocidades (PDF)

A análise da distribuição de velocidades dos peixes fornece insights sobre a variabilidade e a dinâmica do movimento coletivo. A função densidade de probabilidade (PDF) foi utilizada para descrever como as velocidades individuais estão distribuídas em diferentes situações. Resultados que indicam distribuições estreitas estão associados a movimentos mais uniformes, enquanto distribuições mais amplas refletem maior variabilidade no comportamento dos indivíduos.

As figuras apresentadas mostram a PDF (Densidade de Probabilidade) da velocidade resultante para grupos de 3, 5 e 13 peixes. A linha azul representa os resultados da simulação, enquanto a linha vermelha mostra os dados experimentais.

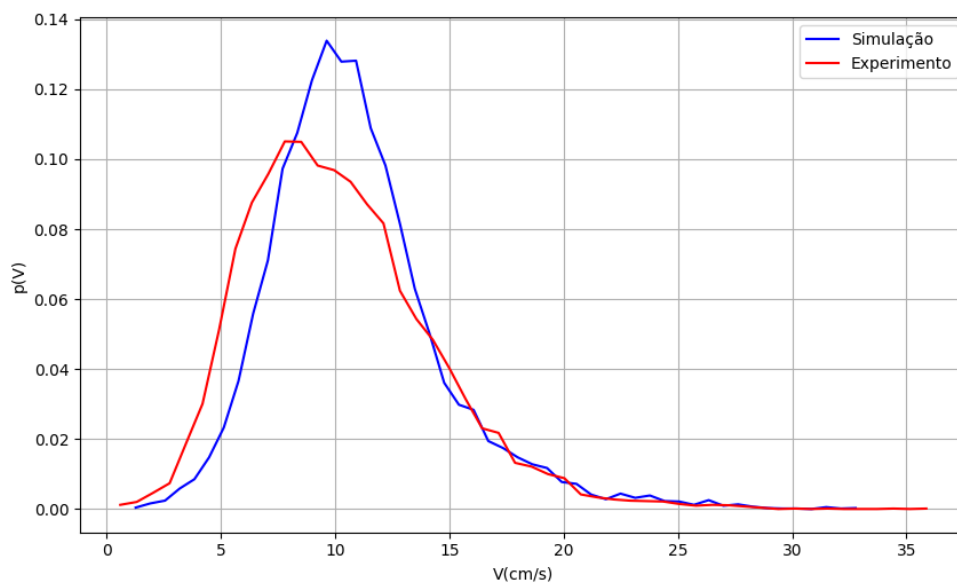


Figura 5.9: PDF da velocidade para 3 peixes da simulação.

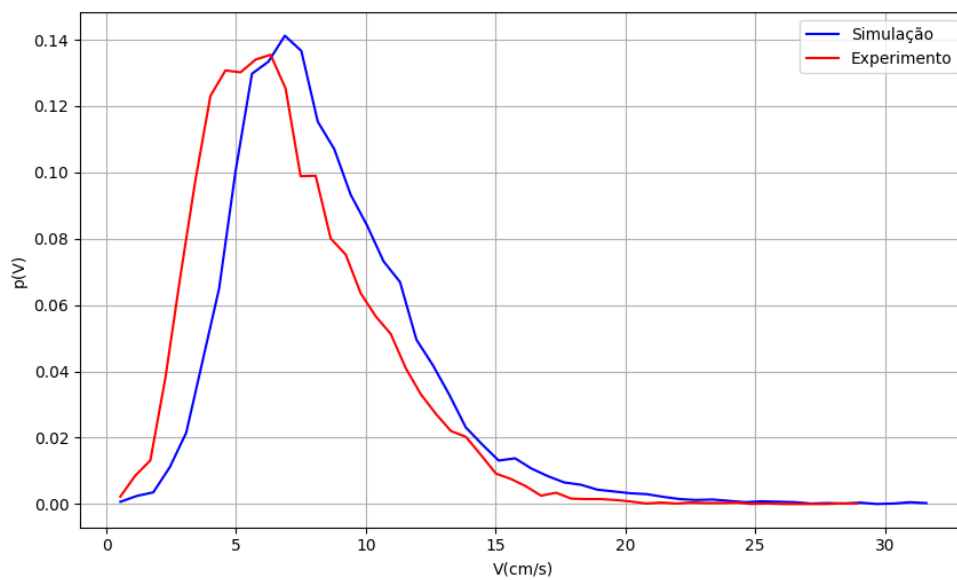


Figura 5.10: PDF da velocidade para 5 peixes da simulação.

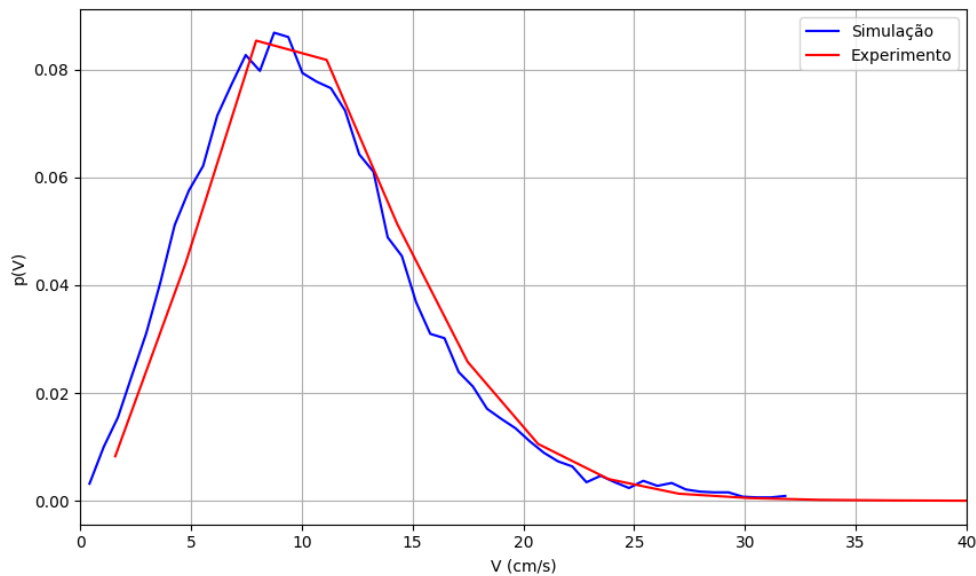


Figura 5.11: PDF da velocidade para 13 peixes da simulação.

Na figura 5.9 , observa-se que a simulação apresenta um pico bem definido próximo ao valor médio, indicando uma boa coerência na velocidade resultante entre os indivíduos. A concordância com os dados experimentais é visível, embora haja pequenas discrepâncias nas caudas da distribuição.

Para 5.10 , a PDF da simulação ainda mantém uma forma semelhante aos experimentos, com uma leve discrepância na largura do pico principal. Esse comportamento pode estar associado a flutuações no movimento coletivo devido a interações mais frequentes entre os peixes no grupo maior.

Já para 5.11 , a PDF apresenta uma distribuição mais larga, com uma cauda estendida, refletindo a maior diversidade de velocidades resultantes observada no sistema.

Esses resultados mostram que o modelo utilizado é capaz de reproduzir com boa precisão as distribuições de velocidades observadas experimentalmente.

Conclusão

Neste trabalho, investigamos a dinâmica do comportamento coletivo de cardumes de Zebrafish (*Danio rerio*) por meio de um modelo baseado em forças, que inclui interações entre indivíduos e com as bordas do ambiente experimental. O modelo foi calibrado utilizando dados experimentais obtidos de rastreamento das trajetórias dos peixes, e os parâmetros foram ajustados por meio do método dos mínimos quadrados recursivos.

Os resultados obtidos mostraram que a **polarização média** é uma métrica eficiente para quantificar o nível de alinhamento coletivo dos indivíduos, sendo influenciada pela densidade do grupo. Observou-se que, para grupos menores, a polarização tende a ser maior, indicando um movimento mais coeso e ordenado. À medida que o número de peixes aumenta, a polarização diminui, refletindo interações mais complexas e variações individuais nos padrões de movimentação.

Além disso, a análise das **trajetórias dos indivíduos** revelou que, para pequenos grupos, os peixes apresentam maior liberdade de movimento, enquanto para grupos maiores, as interações coletivas tornam o movimento mais restrito e coordenado. Esse comportamento emergente foi reproduzido com sucesso pelo modelo matemático, indicando sua capacidade de capturar aspectos relevantes do comportamento coletivo dos peixes.

A **distribuição das velocidades** também foi analisada e comparada com dados experimentais, apresentando boa concordância com os resultados obtidos em laboratório. Observou-se que, conforme a densidade do grupo aumenta, a variação nas velocidades individuais se torna mais acentuada, refletindo a complexidade das interações coletivas.

Dentre as principais contribuições deste trabalho, destacamos:

- O desenvolvimento e ajuste de um modelo baseado em forças capaz de descrever a dinâmica de cardumes de Zebrafish com boa precisão.
- A validação do modelo por meio de comparações com dados experimentais obtidos em um ambiente controlado.
- A análise detalhada da polarização média e sua relação com a densidade do grupo.
- A avaliação das trajetórias e distribuição de velocidades dos indivíduos como métricas adicionais para caracterizar o comportamento coletivo.

Nas simulações realizadas, a análise foi focada em grupos de até 13 peixes. Para quantidades maiores, os resultados não foram satisfatórios, principalmente por dificuldades na calibração dos parâmetros de distância do modelo.

Um dos maiores desafios foi ajustar esses parâmetros com precisão. Notamos que pequenas variações nos parâmetros de distância já causavam diferenças consideráveis na

determinação dos parâmetros dinâmicos. Além disso conforme o número de peixes aumentava, era necessário reajustá-los para capturar corretamente as interações entre os indivíduos e a influência da parede do aquário. No entanto, não conseguimos encontrar valores que mantivessem o modelo estável e, ao mesmo tempo, alinhados com os dados experimentais.

Além disso, em grupos mais densos, alguns parâmetros dinâmicos, como o de repulsão da parede, começaram a assumir valores negativos, o que não faz sentido fisicamente dentro da formulação utilizada. Isso indica que a forma como os parâmetros foram ajustados pode precisar de melhorias para descrever corretamente o comportamento dos peixes em grupos maiores.

Como perspectivas para trabalhos futuros, sugerimos:

- A incorporação de variações individuais no modelo, permitindo uma descrição mais realista do comportamento dos peixes.
- A realização de experimentos com diferentes espécies de peixes para verificar a aplicabilidade do modelo em sistemas biológicos distintos.

Os resultados deste estudo não apenas contribuem para a compreensão dos mecanismos subjacentes ao comportamento coletivo de cardumes, mas também podem ter aplicações em áreas como a robótica, simulação de sistemas, ecologia comportamental. Dessa forma, este trabalho fornece uma base sólida para investigações futuras sobre a dinâmica de grupos auto-organizados em diferentes contextos.

Referências Bibliográficas

- [1] Observação experimental de transição de fase schools-shoals em peixe-zebra (danio rerio). Master's thesis, 2023. Departamento de Física.
- [2] BOYD, S., AND VANDENBERGHE, L. *Convex Optimization*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2004.
- [3] CHIZINSKI, C. J., SHARMA, B., POPE, K. L., AND PATINO, R. A bioenergetic model for zebrafish danio rerio (hamilton). *Journal of Fish Biology* 73, 1 (2008), 35–43.
- [4] COELHO, L. S. *Métodos Numéricos Computacionais*. Editora UFSC, Florianópolis, Brasil, 2004.
- [5] COUZIN, I. D., AND KRAUSE, J. Self-organization and collective behavior in vertebrates. *Advances in the Study of Behavior* 32 (2003), 1–75.
- [6] COUZIN, I. D., KRAUSE, J., FRANKS, N. R., AND LEVIN, S. A. Effective leadership and decision-making in animal groups on the move. *Nature* 433, 7025 (2005), 513–516.
- [7] COUZIN, I. D., KRAUSE, J., FRANKS, N. R., AND LEVIN, S. A. Effective leadership and decision-making in animal groups on the move. *Nature* 433, 7025 (2005), 513–516.
- [8] DRAPER, N. R., AND SMITH, H. *Applied Regression Analysis*, 3rd ed. John Wiley & Sons, 1998.
- [9] ENGESZER, R. E., PATTERSON, L. B., RAO, A., AND PARICHY, D. M. Zebrafish social behavior: live shoaling from a broad perspective. *Developmental Neurobiology* 67, 3 (2007), 307–319.
- [10] GAUTRAIS, J., GINELLI, F., FOURNIER, R., BLANCO, S., SORIA, M., CHATÉ, H., AND THERAULAZ, G. Deciphering interactions in moving animal groups. *PLoS Computational Biology* 8, 9 (2012), e1002678.
- [11] HERBERT-READ, J. E., PERNA, A., MANN, R. P., SCHAEFER, T. M., SUMPTER, D. J., AND WARD, A. J. Inferring the rules of interaction of shoaling fish. *Proceedings of the National Academy of Sciences* 108, 46 (2011), 18726–18731.
- [12] IOANNOU, P., AND SUN, J. *Robust Adaptive Control*. Prentice Hall, 1996.
- [13] KAILATH, T., SAYED, A. H., AND HASSIBI, B. *Linear Estimation*. Prentice Hall, 2000.

- [14] KALMAN, R. E. A new approach to linear filtering and prediction problems. *Transactions of the ASME—Journal of Basic Engineering* 82, 1 (1960), 35–45.
- [15] KATZ, Y., TUNSTRØM, K., IOANNOU, C. C., HUEPE, C., AND COUZIN, I. D. Inferring the structure and dynamics of interactions in schooling fish. *Proceedings of the National Academy of Sciences* 108, 46 (2011), 18720–18725.
- [16] LAWRENCE, C. The husbandry of zebrafish (*Danio rerio*): A review. *Aquaculture* 269, 1-4 (2007), 1–20.
- [17] LIESCHKE, G. J., AND CURRIE, P. D. Animal models of human disease: zebrafish swim into view. *Nature Reviews Genetics* 8, 5 (2007), 353–367.
- [18] LJUNG, L., AND SÖDERSTRÖM, T. *Theory and Practice of Recursive Identification*. MIT Press, 1983.
- [19] MILLER, N., AND GERLAI, R. Quantifying personality in zebrafish. *Behavioral Brain Research* 234, 1 (2012), 123–132.
- [20] MONTGOMERY, D. C., PECK, E. A., AND VINING, G. G. *Introduction to Linear Regression Analysis*, 5th ed. John Wiley & Sons, 2012.
- [21] PÉREZ-ESCUADERO, A., VICENTE-PAGE, J., HINZ, R. C., ARGANDA, S., AND DE POLAVIEJA, G. G. idtracker: tracking individuals in a group by automatic identification of unmarked animals. *Nat. Methods* 11, 7 (2014), 743–748.
- [22] PRESS, W. H., TEUKOLSKY, S. A., VETTERLING, W. T., AND FLANNERY, B. P. *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing*, 3rd ed. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2007.
- [23] REYNOLDS, C. W. Flocks, herds and schools: A distributed behavioral model. *ACM SIGGRAPH Computer Graphics* 21, 4 (1987), 25–34.
- [24] ROMAGUERA, A. R. D. C., VASCONCELOS, J. V., NEGREIROS-NETO, L. G., PESSOA, N. L., SILVA, J. F. D., CADENA, P. G., SOUZA, A. J. D., OLIVEIRA, V. M. D., AND BARBOSA, A. L. Multifractal fluctuations in zebrafish (*danio rerio*) polarization time series. *The European Physical Journal E* 47, 5 (2024), 29.
- [25] SANNOMIYA, N., AND MATUDA, K. Least squares parameter estimation in fish behavior model. *Nippon Suisan Gakkaishi* 53, 11 (1987), 1951–1957.
- [26] SPENCE, R., GERLACH, G., LAWRENCE, C., AND SMITH, C. The behaviour and ecology of the zebrafish, *danio rerio*. *Biological Reviews* 83, 1 (2008), 13–34.
- [27] TUNSTRØM, K., KATZ, Y., IOANNOU, C. C., HUEPE, C., LUTZ, M. J., AND COUZIN, I. D. Collective states, multistability and transitional behavior in schooling fish. *PLoS Computational Biology* 9, 2 (2013), e1002915.
- [28] VICSEK, T., CZIRÓK, A., BEN-JACOB, E., COHEN, I., AND SHOCHET, O. Novel type of phase transition in a system of self-driven particles. *Physical Review Letters* 75, 6 (1995), 1226–1229.
- [29] VICSEK, T., AND ZAFEIRIS, A. Collective motion. *Physics Reports* 517, 3-4 (2012), 71–140.

