



Universidade Federal Rural de Pernambuco
Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação
Departamento de Física
Programa de Pós-Graduação em Física Aplicada

Termodinâmica do buraco negro no espaço-tempo não-comutativo em distribuições não Gaussianas

Davi Duarte de Melo

Dissertação de Mestrado
Recife-PE
Fevereiro de 2025

Universidade Federal Rural de Pernambuco
Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação
Departamento de Física
Programa de Pós-Graduação em Física Aplicada

Davi Duarte de Melo

Termodinâmica do buraco negro no espaço-tempo não-comutativo em distribuições não Gaussianas

Dissertação de mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física Aplicada do Departamento de Física da Universidade Federal Rural de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do grau de mestre em Física Aplicada.

Orientador: Prof. Dr. Antônio de Pádua Santos

Dissertação de Mestrado
Recife-PE
Fevereiro de 2025

Universidade Federal Rural de Pernambuco
Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação
Departamento de Física
Programa de Pós-Graduação em Física Aplicada

Davi Duarte de Melo

Termodinâmica do buraco negro no espaço-tempo
não-comutativo em distribuições não Gaussianas

Dissertação de mestrado julgada adequada para
obtenção do título de mestre em Física Aplicada
e aprovada por unanimidade em 22 de janeiro de
2025 pela comissão examinadora.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Antônio de Pádua Santos
Orientador - DF/UFRPE

Prof. Dr. José Ferraz de Moura Nunes
Examinador Interno - DF/UFRPE

Prof. Dr. Paulo José Ferreira Porfírio da Silva
Examinador Externo - DF/UFPB

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Sistema Integrado de Bibliotecas da UFRPE
Bibliotecário(a): Auxiliadora Cunha – CRB-4 1134

M528t Melo, Davi Duarte de.
Termodinâmica do buraco negro no espaço-tempo não-comutativo em distribuições não Gaussianas / Davi Duarte de Melo. – Recife, 2025.
101 f.; il.

Orientador(a): Antônio de Pádua Santos.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Programa de Pós-Graduação em Física Aplicada, Recife, BR-PE, 2025.

Inclui referências e apêndice(s).

1. Relatividade Geral (Física). 2. Distribuição de Levy. 3. Método de Cauchy. I. Santos, Antônio de Pádua, orient. II. Título

CDD 621

Agradecimentos

Gostaria de expressar minha gratidão a todos que contribuíram, de alguma forma, para a realização desta dissertação. Primeiramente, agradeço à minha família pelo apoio incondicional ao longo de todo o mestrado, sempre me incentivando nos momentos mais desafiadores.

Aos meus amigos, tanto os novos quanto os antigos, sou grato pelo suporte constante e pelas palavras de encorajamento. Em especial, gostaria de agradecer a José Nascimento por suportar pacientemente todas as minhas reclamações durante essa jornada.

Ao meu orientador, Dr. Antônio de Pádua Santos, estendo meus agradecimentos pela orientação dedicada, pelo suporte e pela paciência ao longo de todo o processo. Sua dedicação foi fundamental para a conclusão deste trabalho.

Por fim, agradeço à CAPES pelo apoio financeiro, que tornou possível a realização deste projeto e a concretização do meu sonho de concluir o mestrado.

Resumo

Neste trabalho, realizamos um estudo aprofundado das propriedades termodinâmicas de um buraco negro de Schwarzschild em um espaço-tempo não-comutativo, considerando tanto distribuições Gaussianas quanto distribuições não Gaussianas. A análise dessas diferentes distribuições aplicadas ao buraco negro nos fornece uma base sólida para compreender como suas características se modificam quando não se utiliza a distribuição Gaussiana convencional, permitindo explorar novos cenários.

Palavras-chaves: Relatividade Geral, distribuição de Levy, distribuição de Cauchy, propriedades termodinâmicas, espaço-tempo não-comutativo.

Abstract

In this work, we conducted an in-depth study of the thermodynamic properties of a Schwarzschild black hole in a noncommutative spacetime, considering both Gaussian and non-Gaussian distributions. The analysis of these different distributions applied to the black hole provides a solid foundation for understanding how its characteristics are modified when the conventional Gaussian distribution is not used, allowing for the exploration of new scenarios.

Keywords: General Relativity, Lévy distribution, Cauchy Distribution, thermodynamic properties, noncommutative spacetime.

Lista de Figuras

| | Página |
|---|--------|
| 2.1 O vetor u^α "vive" no plano tangente $T_p(\mathcal{M})$ | 16 |
| 2.2 Campo vetorial A^α ao longo de uma curva γ em dois pontos distintos P e Q. | 17 |
| 2.3 Imagem esquemática de como funciona a radiação hawking. | 27 |
| 2.4 Imagem esquemática da integração no plano complexo. | 32 |
| 2.5 Gráfico da distribuição Gaussiana variando a média e o desvio-padrão. | 36 |
| 2.6 Gráfico da distribuição de Lévy variando o parâmetro de escala γ e o δ | 37 |
| 2.7 Gráfico da distribuição de Cauchy variando os parâmetros de escala γ e o δ | 38 |
| | |
| 4.1 Pressão tangencial e radial no espaço-tempo não-comutativo em uma distribuição gaussiana. No eixo vertical temos a pressão e no eixo horizontal temos o raio do horizonte de eventos normalizado pelo comprimento mínimo $\sqrt{\theta}$ | 48 |
| 4.2 g_{00} em função de $\frac{r}{\sqrt{\theta}}$ para vários valores de M. | 50 |
| 4.3 Massa nos casos comutativo e não-comutativo. No eixo vertical temos a massa e no eixo horizontal temos o raio do horizonte de eventos normalizado pelo comprimento de escala mínimo $\sqrt{\theta}$ | 52 |
| 4.4 Temperatura Hawking nos casos comutativo e não-comutativo Gaussiano. No eixo vertical temos a temperatura de Hawking e no eixo horizontal temos o raio do horizonte de eventos normalizado pelo comprimento de escala mínimo $\sqrt{\theta}$ | 54 |
| 4.5 Entropia nos casos comutativo e não-comutativo. No eixo vertical temos a Entropia e no eixo horizontal temos o raio do horizonte de eventos normalizado pelo comprimento de escala mínimo $\sqrt{\theta}$ | 55 |
| 4.6 Capacidade calorífica nos casos comutativo e não-comutativo Gaussiano. No eixo vertical temos a capacidade térmica normalizado pelo comprimento de escala mínimo $\sqrt{\theta}$ e no eixo horizontal temos o raio do horizonte de eventos também normalizado pelo comprimento de escala mínimo $\sqrt{\theta}$ | 57 |
| 4.7 Energia interna nos casos comutativo e não-comutativo Gaussiano. No eixo vertical temos a energia interna e no eixo horizontal temos o raio do horizonte de eventos normalizado pelo comprimento de escala mínimo $\sqrt{\theta}$. Para a plotagem do gráfico foi feito $M_0 = 0$ e $r_0 = 0$ | 62 |

| | | |
|-----|---|----|
| 4.8 | Energia Livre nos casos comutativo e não-comutativo Gaussiano. No eixo vertical temos a energia livre e no eixo horizontal temos o raio do horizonte de eventos normalizado pelo comprimento de escala mínimo $\sqrt{\theta}$. Para a plotagem do gráfico foi feito $M_0 = 0$ e $r_0 = 0$ | 64 |
| 5.1 | Pressão radial e tangencial nos casos Gaussiano e Lévy. No eixo vertical temos a pressão e no eixo horizontal temos o raio do horizonte de eventos normalizado pelo comprimento de escala mínimo $\sqrt{\theta}$ | 69 |
| 5.2 | g_{00} em função de $\frac{r}{\sqrt{\theta}}$ para vários valores de M. | 70 |
| 5.3 | Massas nos casos comutativo e não-comutativo Gaussiano e Lévy. No eixo vertical temos a distribuição de massa e no eixo horizontal temos o raio do horizonte de eventos normalizado pelo $\sqrt{\theta}$ | 71 |
| 5.4 | Temperatura Hawking nos casos comutativo e não-comutativo Gaussiano e Lévy. No eixo vertical temos a temperatura de Hawking e no eixo horizontal temos o raio do horizonte de eventos normalizado pelo comprimento de escala mínimo $\sqrt{\theta}$ | 72 |
| 5.5 | Entropia nos casos comutativo e não-comutativo Gaussiano e Lévy. No eixo vertical temos a Entropia e no eixo horizontal temos o raio do horizonte de eventos normalizado pelo comprimento de escala mínimo $\sqrt{\theta}$ | 73 |
| 5.6 | Capacidade calorífica nos casos comutativo e não-comutativo Gaussiano e Lévy. No eixo vertical temos a capacidade térmica normalizado pelo comprimento de escala mínimo $\sqrt{\theta}$ e no eixo horizontal temos o raio do horizonte de eventos normalizado pelo comprimento de escala mínimo $\sqrt{\theta}$ | 74 |
| 5.7 | Energia interna nos casos comutativo e não-comutativo Gaussiano e Lévy. No eixo vertical temos a energia interna e no eixo horizontal temos o raio do horizonte de eventos normalizado pelo comprimento de escala mínimo $\sqrt{\theta}$. Na plotagem do gráfico foi feito $M_0 = 0$ e $r_0 = 0$ | 76 |
| 5.8 | Energia Livre nos casos comutativo e não-comutativo Gaussiano. No eixo vertical temos a energia livre e no eixo horizontal temos o raio do horizonte de eventos normalizado pelo comprimento de escala mínimo $\sqrt{\theta}$. Na plotagem do gráfico foi feito $M_0 = 0$ e $r_0 = 0$ | 77 |
| 6.1 | Pressão tangencial nos casos comutativo e não-comutativo Gaussiano e Cauchy. No eixo vertical temos a pressão e no eixo horizontal temos o raio do horizonte de eventos normalizado pelo comprimento de escala mínimo $\sqrt{\theta}$ | 81 |
| 6.2 | Pressão tangencial nos casos comutativo e não-comutativo Gaussiano, Lévy e Cauchy. No eixo vertical temos a pressão e no eixo horizontal temos o raio do horizonte de eventos normalizado pelo comprimento de escala mínimo $\sqrt{\theta}$ | 82 |

| | | |
|------|--|----|
| 6.3 | g_{00} em função de $\frac{r_+}{\sqrt{\theta}}$ para vários valores de M | 82 |
| 6.4 | g_{00} em função de $\frac{r_+}{\sqrt{\theta}}$ para vários valores de M | 83 |
| 6.5 | Massa nos casos comutativo e não-comutativo. No eixo vertical temos a massa e no eixo horizontal temos o raio do horizonte de eventos normalizado pelo comprimento de escala mínimo $\sqrt{\theta}$ | 84 |
| 6.6 | Massa nos casos comutativo e não-comutativo. No eixo vertical temos a massa e no eixo horizontal temos o raio do horizonte de eventos normalizado pelo comprimento de escala mínimo $\sqrt{\theta}$ | 85 |
| 6.7 | Temperatura Hawking nos casos comutativo, não-comutativo Gaussiano e Cauchy. No eixo vertical temos a temperatura de Hawking e no eixo horizontal temos o raio do horizonte de eventos normalizado pelo comprimento de escala mínimo $\sqrt{\theta}$ | 86 |
| 6.8 | Temperatura Hawking nos casos comutativo, não-comutativo Gaussiano, Lévy e Cauchy. No eixo vertical temos a temperatura de Hawking e no eixo horizontal temos o raio do horizonte de eventos normalizado pelo comprimento de escala mínimo $\sqrt{\theta}$ | 87 |
| 6.9 | Entropia nos casos comutativo e não-comutativo Gaussiano e Cauchy. No eixo vertical temos a Entropia e no eixo horizontal temos o raio do horizonte de eventos normalizado pelo comprimento de escala mínimo $\sqrt{\theta}$ | 88 |
| 6.10 | Capacidade calorífica nos casos comutativo, não-comutativo Gaussiano e Cauchy. No eixo vertical temos a capacidade térmica normalizado pelo comprimento de escala mínimo $\sqrt{\theta}$ e no eixo horizontal temos o raio do horizonte de eventos normalizado pelo comprimento de escala mínimo $\sqrt{\theta}$ | 89 |
| 6.11 | Capacidade calorífica nos casos comutativo, não-comutativo Gaussiano, Lévy e Cauchy. No eixo vertical temos a capacidade térmica normalizado pelo comprimento de escala mínimo $\sqrt{\theta}$ e no eixo horizontal temos o raio do horizonte de eventos normalizado pelo comprimento de escala mínimo $\sqrt{\theta}$ | 90 |

Sumário

| | Página |
|----------|--|
| 1 | Introdução 11 |
| 2 | Tópicos em Relatividade Geral, Teoria Quântica de Campos e uma breve análise das distribuições Gaussianas e não Gaussianas 13 |
| 2.1 | Tensor métrico 13 |
| 2.2 | Símbolos de Christofel, derivada covariante e tensor de Riemman 16 |
| 2.2.1 | Derivada Covariante 16 |
| 2.2.2 | Tensor de Riemann 18 |
| 2.3 | Equação de campo de Einstein 19 |
| 2.4 | Tensor Energia-momentum 22 |
| 2.5 | Revisando o buraco negro de Schwarzschild 24 |
| 2.6 | Termodinâmica de buracos negros 25 |
| 2.7 | Radiação Hawking 26 |
| 2.8 | A distribuição Normal, Levy e Cauchy 35 |
| 2.8.1 | Distribuição normal 35 |
| 2.8.2 | Distribuição de Lévy 36 |
| 2.8.3 | Distribuição Cauchy 38 |
| 3 | Não-comutatividade do Espaço-tempo 40 |
| 3.1 | Fundamentos 40 |
| 3.2 | A matéria no espaço-tempo não-comutativo na distribuição Gaussiana . . . 41 |
| 4 | Não-comutatividade no buraco negro em uma distribuição Gaussiana 44 |
| 4.1 | Tensor de Energia-Momento 44 |
| 4.2 | Distribuição de massa 49 |
| 4.3 | Temperatura de Hawking 51 |
| 4.4 | Entropia 53 |
| 4.5 | Capacidade calorífica 56 |
| 4.6 | Energia interna 58 |
| 4.7 | Energia Livre 62 |
| 5 | Não-comutatividade no buraco negro em uma distribuição de Levy 67 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 5.1 | Tensor Energia-Momento | 67 |
| 5.2 | Distribuição de massa | 69 |
| 5.3 | Temperatura de Hawking | 71 |
| 5.4 | Entropia | 72 |
| 5.5 | Capacidade calorífica | 74 |
| 5.6 | Energia interna | 75 |
| 5.7 | Energia Livre | 76 |
| 6 | Não-comutatividade no buraco negro em uma distribuição de Cauchy | 79 |
| 6.1 | Tensor Energia-Momento | 79 |
| 6.2 | Distribuição de massa | 81 |
| 6.3 | Temperatura Hawking | 84 |
| 6.4 | Entropia | 86 |
| 6.5 | Capacidade calorífica | 88 |
| 6.6 | Energia interna | 89 |
| 6.7 | Energia Livre | 91 |
| 7 | Conclusões e Perspectivas | 92 |
| A | Função Gamma | 94 |

Capítulo 1

Introdução

A teoria da relatividade geral de Einstein revolucionou nossa compreensão da gravidade e do espaço-tempo, proporcionando uma descrição precisa de fenômenos gravitacionais em escalas macroscópicas. Um dos aspectos mais intrigantes dessa teoria é a predição da existência de buracos negros, regiões do espaço-tempo onde a curvatura é tão intensa que nem mesmo a luz pode escapar. No entanto, a Relatividade Geral enfrenta desafios ao tentar descrever a gravidade em escalas extremamente pequenas, onde os efeitos quânticos tornam-se significativos. Nesse regime, espera-se que uma teoria quântica seja necessária para fornecer uma descrição completa e consistente do espaço-tempo, como veremos ao longo deste trabalho. Uma abordagem promissora nesse contexto é a teoria do espaço-tempo não-comutativo, que propõe uma modificação das estruturas geométricas do espaço-tempo. [11].

Um dos grandes desafios atualmente é a dificuldade de conciliar a Teoria Quântica com a Relatividade Geral no que diz respeito à natureza da gravidade. Enquanto a primeira descreve a força gravitacional como mediada por uma partícula chamada gráviton [23], a segunda concebe a gravidade como uma consequência geométrica do espaço-tempo deformado na presença de matéria. Os buracos negros são previstos pela Relatividade Geral, mas sua evaporação é um fenômeno quântico, destacando a importância de seu estudo. Assim, é essencial propor novas hipóteses que possibilitem a descoberta de fenômenos físicos que sejam matematicamente e fisicamente mais acessíveis.

Nesta dissertação, analisaremos as principais propriedades termodinâmicas de um buraco negro de Schwarzschild, com foco na distribuição de massa e no tensor energia-momento em distribuições não Gaussianas, mais especificamente nas distribuições de Lévy e Cauchy. A motivação para este estudo decorre da necessidade de ampliar nossa compreensão dos efeitos quânticos em distribuições além da Gaussiana, que, embora amplamente abordada devido à sua simplicidade e simetria, pode revelar novas ideias acerca da não-comutatividade em buracos negros. Ao explorar distribuições não Gaussianas, como as de Cauchy e Lévy, é possível investigar cenários alternativos e compreender como a

não-comutatividade influencia a estrutura e as propriedades termodinâmicas dos buracos negros.

Este trabalho está dividido nos seguintes capítulos: no capítulo 2, apresentaremos uma breve revisão sobre tópicos introdutórios da Relatividade Geral, alguns aspectos da Teoria Quântica de Campos necessários para o desenvolvimento e entendimento de como se obtém a temperatura de Hawking, além de uma revisão das distribuições que utilizaremos neste trabalho. Esses tópicos constituem a base teórica fundamental para o desenvolvimento desta dissertação. No capítulo 3, discutiremos a não-comutatividade e sua importância ao longo do trabalho. Nos capítulos 4 e seguintes, abordaremos os principais tópicos desta dissertação, que envolvem o estudo do buraco negro esférico e estático, bem como os efeitos da não comutatividade em distribuições Gaussianas e não Gaussianas aplicadas a tais objetos.

Capítulo 2

Tópicos em Relatividade Geral, Teoria Quântica de Campos e uma breve análise das distribuições Gaussianas e não Gaussianas

Neste capítulo, discutiremos os principais tópicos introdutórios necessários para a compreensão dos métodos matemáticos utilizados, que são fundamentais para o entendimento das propriedades termodinâmicas. Além disso, analisaremos os tensores, que constituem a base para o desenvolvimento do tensor momento-energia. Inicialmente, apresentaremos um breve desenvolvimento sobre tensores de forma geral; em seguida, faremos uma revisão do buraco negro de Schwarzschild, abordando também alguns tópicos de Teoria Quântica de Campos. Por fim, realizaremos uma análise das distribuições que utilizaremos ao longo deste trabalho.

2.1 Tensor métrico

Dada a importância e a necessidade das equações da Relatividade Geral, é essencial fazermos uma breve revisão dos tópicos dessa área. Vamos começar destacando que, de acordo com a maior parte da literatura especializada, consideraremos a velocidade da luz $c = 1$, salvo indicação em contrário. Além disso, esclarecemos que a assinatura da métrica utilizada em nosso trabalho é da forma $(-, +, +, +)$, onde a coordenada temporal possui sinal negativo (-) e as coordenadas espaciais possuem sinal positivo (+). O elemento de linha é escrito como [16]

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (2.1)$$

Em que estamos utilizando a notação de Einstein e $g_{\mu\nu}$ é o tensor métrico que dependerá da coordenada utilizada para saber seu formato. Descreveremos aqui alguma propriedades importantes a partir do elemento de linha (2.1) e é importante citar que seguiremos os passos desenvolvidos no livro de Lambourne [16] e no trabalho de conclusão de curso de Rodrigo Fraga [35]

A primeira propriedade importante é mostrar que ds^2 é invariante diante de mudança de coordenada, para isso devemos saber como os componentes covariante e contravariante se transformam mediante uma mudança de coordenada.

Considere dois objetos quaisquer A^α e P_α em que queremos realizar uma determinada mudança de coordenada, essas mudanças ocorrerão através das equações.

$$A^{\alpha'} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} A^\alpha, \quad P_{\alpha'} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} P_\alpha. \quad (2.2)$$

Qualquer objeto que se transforme de acordo com $A^{\alpha'}$ é denominado um vetor e o objeto que se transforme de acordo com $P_{\alpha'}$ é denominado um co-vetor ou 1-forma. E o fato desses vetores e co-vetores se transformarem inversamente sob a mesma transformação de coordenada garante que $A^\alpha P_\alpha$ seja invariante.

E a generalização dessas definições são tensores, que se transformam da seguinte maneira

$$T_{\gamma'\dots\delta'}^{\alpha'\dots\beta'} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} \dots \frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^\beta} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x^{\gamma'}} \dots \frac{\partial x^\delta}{\partial x^{\delta'}} T_{\gamma\dots\delta}^{\alpha\dots\beta}. \quad (2.3)$$

Também podemos transformar uma componente covariante em contravariante e vice-versa, através das seguintes relações conhecidas na literatura como operações de levantamento e abaixamento de índices dada por

$$A^\alpha = g^{\mu\nu} A_\nu, \quad P_\alpha = g_{\mu\nu} P^\nu. \quad (2.4)$$

Com todas essas informações podemos reescrever o elemento de linha ds^2 da seguinte maneira

$$ds^2 = dx^\mu dx_\mu. \quad (2.5)$$

O que mostra que o intervalo será invariante independente da base. Uma consequência direta e importante dessa invariância é podermos dizer que $g_{\mu\nu}$ também é invariante, basta observar que

$$ds^2 = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = g_{\nu\mu} x^\nu x^\mu. \quad (2.6)$$

Uma vez que $x^\mu x^\nu = x^\nu x^\mu$ conclui-se que $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$. E uma última propriedade do tensor métrico $g_{\mu\nu}$, que é a sua transformação.

Vamos reescrever o elemento de linha ds^2 utilizando as relações de mudança de coordenadas 2.2

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\mu\nu} \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} A^\alpha \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\beta} A^\beta, \\ ds^2 &= \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\beta} g_{\mu\nu} A^\alpha A^\beta. \end{aligned} \quad (2.7)$$

E devido a invariância de ds^2 podemos dizer que a mudança de base nos componentes A^α e A^β é uma mudança no próprio tensor, então

$$g'_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\beta} g_{\mu\nu}. \quad (2.8)$$

Que é justamente a forma com que um tensor covariante de ordem 2 se transforma [35].

E por fim, devemos mostrar uma relação que vai ser importante para o cálculo da pressão radial e tangencial do buraco negro esférico de Schwarzschild. Para isso vamos relembrar a relação de elevação de índice de uma componente covariante A^μ

$$A^\mu = g^{\mu\nu} A_\nu. \quad (2.9)$$

E a componente A_ν pode ser escrita na forma de rebaixamento de índice, ficando assim

$$A^\mu = g^{\mu\nu} g_{\nu\alpha} A^\alpha. \quad (2.10)$$

Reescrevendo A^μ como uma soma em *alpha*

$$\delta_\alpha^\mu A^\alpha = g^{\mu\nu} g_{\nu\alpha} A^\alpha. \quad (2.11)$$

Eliminando A^α do dois lados obtemos uma importante relação

$$g^{\mu\nu} g_{\nu\alpha} = \delta_\alpha^\mu. \quad (2.12)$$

E em sua representação matricial a delta de Kronecker é uma matriz identidade, e dessa forma também mostramos que

$$g_{\mu\nu} = (g^{-1})^{\mu\nu}. \quad (2.13)$$

O que mostra que a matriz que representa os valores de $g_{\mu\nu}$ é a matriz inversa daquela que representa os valores de $g^{\mu\nu}$.

2.2 Símbolos de Christoffel, derivada covariante e tensor de Riemman

2.2.1 Derivada Covariante

Para entender o conceito de derivada covariante, devemos compreender com um pouco mais de profundidade o conceito de tensores. Considere uma variedade \mathcal{M} , com o vetor u^α no espaço tangente $T_p(M)$, ilustrada abaixo [12]

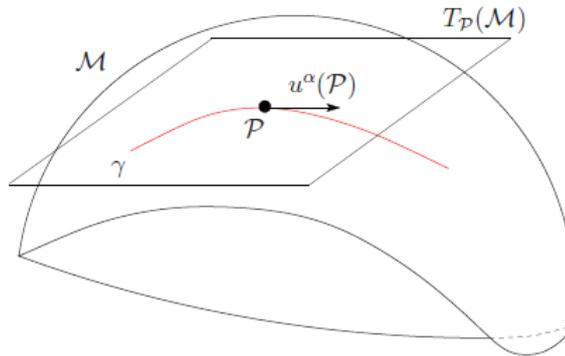


Figura 2.1: O vetor u^α "vive" no plano tangente $T_P(\mathcal{M})$.

Tensores são objetos matemáticos que não estão definidos na variedade (no caso da figura 2.1, variedade M). Por exemplo, considere o vetor u^α , a figura deixa claro que esse vetor pertence ao plano tangente da variedade no ponto P e não na variedade propriamente dita. Esse plano tangente, que denotaremos por $T_P(M)$, constitui um espaço vetorial a que pertence o vetor u^α . Todo espaço vetorial possui uma base e essa base muda de ponto para ponto, salvo condição se a base for cartesiana.

Isso implica dizer que todo e qualquer tensor em um P pode ser adicionado ou subtraído e o resultado ainda será outro tensor. Entretanto, se um tensor está em ponto P e um outro tensor está em um ponto Q , não podemos realizar a mesmas operações, uma vez que pertencem a bases diferentes. Dito isto, caso seja necessário realizar operações entre tensores de bases diferentes é necessário estabelecer um novo conceito que é o transporte paralelo de tensores.

A Derivada covariante é uma generalização do conceito de derivada parcial que permite estender o cálculo diferencial para o caso de coordenadas curvilíneas. De uma forma resumida, a derivada covariante é usada para transportar tensores de um ponto a outro.

Considere um ponto P da curva γ com coordenada x^β e um outro ponto Q com coordenada $x^\beta + dx^\beta$, conforme mostra a imagem abaixo.

Considere as operações

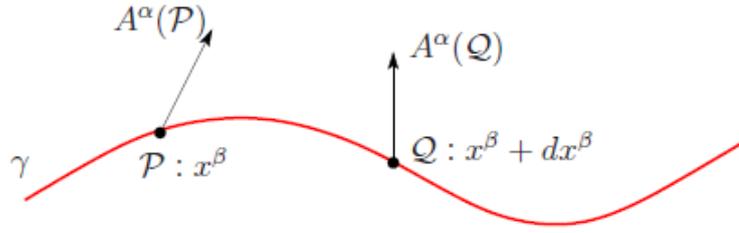


Figura 2.2: Campo vetorial A^α ao longo de uma curva γ em dois pontos distintos P e Q.

$$\begin{aligned}
 dA^\alpha &= A^\alpha(Q) - A^\alpha(P), \\
 dA^\alpha &= A^\alpha(x^\beta + dx^\beta) - A^\alpha(x^\beta), \\
 dA^\alpha &= \frac{\partial x A^\alpha}{\partial x^\beta} dx^\beta.
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

Certamente não é tensorial, pois

$$\frac{\partial A^{\alpha'}}{\partial x^{\beta'}} = \frac{\partial}{\partial x^{\beta'}} \left(\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} A^\alpha \right), \tag{2.15}$$

$$\frac{\partial A^{\alpha'}}{\partial x^{\beta'}} = \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}} \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\beta} + \frac{\partial^2 x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}} A^\alpha. \tag{2.16}$$

Observe que o primeiro termo da equação se comporta de acordo com a lei de transformação tensorial, mostrada na equação 2.3. Entretanto o segundo termo não se comporta como uma lei de transformação tensorial, é um termo adicional. Para obter um objeto tensorial devemos escrever o operador derivada da seguinte forma

$$DA^\alpha = A_T^\alpha(P) - A^\alpha(P). \tag{2.17}$$

Onde $A_T^\alpha(P)$ é o vetor obtido por transporte de A^α de Q para P. Também podemos substituir o operador derivada em termos de variação, como se segue:

$$DA^\alpha = dA^\alpha + \delta A^\alpha. \tag{2.18}$$

Observe que houve o "surgimento" do termo δA^α , é este objeto que contém a regra do transporte paralelo e que, para conseguirmos prosseguir nos cálculos, precisamos definir que δA^α seja linear tanto no campo A^μ como no deslocamento dx^α , expresso da seguinte forma:

$$\delta A^\alpha = \Gamma_{\mu\beta}^\alpha A^\mu dx^\beta. \tag{2.19}$$

Com

$$\Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} = \frac{1}{2}g^{\alpha k} \left(\frac{\partial g_{k\mu}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial g_{k\beta}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x^k} \right). \quad (2.20)$$

Onde o termo $\Gamma_{\mu\beta}^{\alpha}$ é denominado de conexão, ou símbolo de Christoffel de segunda espécie, e pode ser calculado de acordo com a equação 2.20. De forma bem resumida, os símbolos de Christoffel fornecem uma maneira de expressar como vetores e tensores mudam ao longo de uma determinada curvatura no espaço e uma de suas propriedades fundamentais é a simetria nos índices covariantes $\Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} = \Gamma_{\beta\mu}^{\alpha}$.

Substituindo todos esses valores na equação 2.18 e realizando algumas operações vetoriais podemos chegar na seguinte expressão:

$$\frac{DA^{\alpha}}{d\lambda} = \frac{dA^{\alpha}}{d\lambda} + \Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} A^{\mu} \frac{dx^{\beta}}{d\lambda}. \quad (2.21)$$

Que é a definição da derivada covariante.

2.2.2 Tensor de Riemann

O tensor de curvatura de Riemann é um tensor de quarta ordem, com 1 índice contravariante e 3 índices covariantes. Esse tensor nos fornece uma medida de como a curvatura do espaço-tempo varia em diferentes direções, ele é definido em termos dos símbolos de Christoffel (Γ_{jk}^i) e de suas derivadas. Da seguinte forma [27]

$$R_{ijk}^l = \frac{\partial \Gamma_{jk}^l}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma_{ij}^l}{\partial x^k} + \Gamma_{jk}^m \Gamma_{im}^l - \Gamma_{ij}^m \Gamma_{km}^l. \quad (2.22)$$

Uma de suas propriedades fundamentais é a anticomutatividade dos índices jk do tensor, expressa da seguinte forma

$$R_{ijk}^l = -R_{ikj}^l. \quad (2.23)$$

E devido a propriedade de simetria dos símbolos de Christoffel, podemos obter a seguinte relação, que é conhecida como identidade de Bianche

$$R_{ijk}^l + R_{jik}^l + R_{jki}^l = 0. \quad (2.24)$$

Também é possível representar o tensor de Riemann em uma forma totalmente covariante usando um tensor métrico, da seguinte maneira

$$g_{\lambda l} R_{ijk}^l = R_{\lambda ijk}. \quad (2.25)$$

Em sua forma totalmente covariante, o tensor se comporta da seguinte maneira. São simétricos na troca de posição dos pares λ , i com j e k e antissimétricos na

troca de posição entre os pares de índices individuais λ com i e j com k . Expresso matematicamente da seguinte forma

$$R_{\lambda i j k} = R_{j k \lambda i}, \quad (2.26)$$

$$R_{\lambda i j k} = -R_{i \lambda j k}, \quad (2.27)$$

$$R_{\lambda i j k} = -R_{\lambda i k j}. \quad (2.28)$$

e essa simetria satisfaz a relação

$$R_{\lambda i j k} + R_{\lambda k i j} + R_{\lambda j k i} = 0. \quad (2.29)$$

E por fim temos o tensor de Ricci. O tensor de Ricci é uma contração do tensor de curvatura de Riemann, definida por

$$R_{\lambda k} = g^{ij} R_{\lambda i j k}. \quad (2.30)$$

O tensor de Ricci também possui a mesma propriedade de simetria do tensor métrico, ou seja, $R_{ij} = R_{ji}$. E também temos o escalar de Ricci, dado por

$$R = g^{\lambda k} R_{\lambda k}. \quad (2.31)$$

Que é apenas uma contração adicional do tensor de Riemann

2.3 Equação de campo de Einstein

A ideia central da relatividade geral é que a gravidade não é uma força como as outras forças da natureza, mas sim uma manifestação da curvatura do espaço-tempo causada pela presença de massa e energia. As equações de campo de Einstein estabelecem a relação entre essa curvatura e a matéria no universo. Ou em palavras bem reduzidas, a equação de campo de Einstein descreve como a matéria e a energia influenciam a curvatura do espaço-tempo.

Iremos desenvolver aqui, de forma breve, a equação de campo de Einstein a partir da formulação lagrangeana da relatividade geral baseado no livro de introdução a relatividade geral de CARROLL SG [3] e no TCC de Mateus Reinke [30]

Seja \mathcal{L} a lagrangiana escalar do sistema e Ω um volume no espaço-tempo, a ação de Einstein-Hilbert pode ser definida como

$$S = \int_{\Omega} \hat{\mathcal{L}} d^4 x. \quad (2.32)$$

Em que $\hat{\mathcal{L}}$ é a densidade lagrangiana que é equivalente à $\mathcal{L}\sqrt{-g}$, g é o determinante da métrica e o sinal de negativo é devido à assinatura da métrica adotada logo no início do capítulo. Podemos separar a lagrangiana em dois termos, um para o campo gravitacional e outra para campos externos: $\mathcal{L} = \mathcal{L}_G - 2\kappa\mathcal{L}_M$. Com κ sendo a constante gravitacional relativística e a constante 2 adotada por conveniência.

O princípio da mínima ação nos diz que [39] $\delta S = 0$, substituindo 2.32 nesse princípio podemos reescrevê-la assim

$$\delta \int_{\Omega} \sqrt{-g}(\mathcal{L}_G - 2\kappa\mathcal{L}_M)d^4x = 0. \quad (2.33)$$

Para o campo gravitacional a lagrangiana é dada pelo escalar de Ricci ($\mathcal{L}_G = R$) [30], de modo que a ação toma a forma

$$\delta \int_{\Omega} \sqrt{-g}(R - 2\kappa\mathcal{L}_M)d^4x = 0. \quad (2.34)$$

Usando a relação 2.31 e desenvolvendo o produto ficaremos com a seguinte expressão

$$\delta \int_{\Omega} R_{\mu\nu}g^{\mu\nu}\sqrt{-g}d^4x - \delta \int_{\omega} 2\kappa\mathcal{L}_M\sqrt{-g}d^4x = 0. \quad (2.35)$$

Vamos desenvolver o primeiro termo referente ao campo gravitacional, aplicando a regra da multiplicação da derivada

$$\delta \int_{\Omega} R_{\mu\nu}g^{\mu\nu}\sqrt{-g}d^4x = \int_{\Omega} \delta(R_{\mu\nu})g^{\mu\nu}\sqrt{-g}d^4x + \int_{\Omega} R_{\mu\nu}\delta(g^{\mu\nu}\sqrt{-g})d^4x. \quad (2.36)$$

É possível simplificar essa expressão usando a definição do tensor de Riemann 2.22 para o escalar de Ricci 2.31, dado pela equação logo abaixo

$$\delta R_{\mu\nu} = \delta \left(\frac{\partial \Gamma_{jk}^l}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma_{il}^l}{\partial x^k} + \sum_m \Gamma_{ik}^m \Gamma_{ml}^l - \sum_m \Gamma_{ij}^m \Gamma_{mk}^l \right). \quad (2.37)$$

E usando o lema da geometria Riemanniana: "*É sempre possível escolher um sistema de coordenadas no qual todos os símbolos de Christoffel são nulos em um determinado ponto*", em que tal sistema é denominado sistema de coordenadas geodésicas. De modo que o nosso tensor de Ricci pode ser reescrito da seguinte forma

$$\delta R_{\mu\nu} = \delta \left(\frac{\partial \Gamma_{jk}^l}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma_{il}^l}{\partial x^k} \right). \quad (2.38)$$

Em outras palavras um pouco mais precisas e diretas, localmente a curvatura é plana e como os símbolos de Christoffel nos dizem a correção devido a curvatura, se

não há curvatura não há correção a ser feita. A derivada não se anula porque derivada é taxa de variação de um ponto a outro ponto e essa variação pode não ser necessariamente plana, por isso obtemos tal resultado.

E uma vez que sabemos que as correções são nulas, as derivadas covariantes condizem com as derivadas parciais. Para conseguir ver essa relação basta usar a relação da derivada covariante obtida anteriormente (2.21) e fazer o símbolo de christoffel igual a 0

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_{\rho}(\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\rho}) - \nabla_{\nu}(\delta\Gamma_{\mu\rho}^{\rho}). \quad (2.39)$$

Multiplicando ambos os lados por $\sqrt{-g}g^{\mu\nu}$

$$\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = \sqrt{-g}[\nabla_{\rho}(g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\rho}) - \nabla_{\nu}(g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\mu\rho}^{\rho})]. \quad (2.40)$$

Que pode ser reescrita fazendo uma troca de índices

$$\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = \sqrt{-g}\nabla_{\alpha}(g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} - g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\mu\rho}^{\rho}). \quad (2.41)$$

Ajustando os termos e integrando de ambos os lados

$$\int_{\Omega} \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} - g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\mu\rho}^{\rho}). \quad (2.42)$$

E usando o teorema de Gauss, mantendo os limites fixos, a integral deve ser nula

$$\int_{\Omega} \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = 0. \quad (2.43)$$

Agora vamos analisar a outra integral da equação 2.36, já desenvolvendo a regra do produto

$$\int_{\Omega} R_{\mu\nu}\delta(\sqrt{-g}g^{\mu\nu})d^4x = \int_{\Omega} R_{\mu\nu}\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}d^4x + \int_{\Omega} R_{\mu\nu}g^{\mu\nu}\delta\sqrt{-g}d^4x. \quad (2.44)$$

Usando a identidade

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2\sqrt{-g}}\delta g = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}. \quad (2.45)$$

Podemos substituir de volta na integral

$$\int_{\Omega} R_{\mu\nu}\delta(\sqrt{-g}g^{\mu\nu})d^4x = \int_{\Omega} R_{\mu\nu}\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}d^4x - \int_{\Omega} R_{\mu\nu}g^{\mu\nu}\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}d^4x. \quad (2.46)$$

$$\int_{\Omega} R_{\mu\nu} \delta(\sqrt{-g} g^{\mu\nu}) d^4x = \int_{\Omega} \sqrt{-g} \left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right] \delta g^{\mu\nu} d^4x. \quad (2.47)$$

Então a ação para o campo gravitacional é da seguinte forma

$$\delta \int_{\Omega} \mathcal{L}_G d^4x = \int_{\Omega} \sqrt{-g} \left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right] \delta g^{\mu\nu} d^4x. \quad (2.48)$$

Se considerarmos os campos externos nulos, essa ação nos traz a equação de campo de Einstein no vácuo na forma covariante

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 0. \quad (2.49)$$

Caso haja campos externos é necessário desenvolver a ação com o termo \mathcal{L}_M . Para economizar espaço e tempo deixarei essa parte para o leitor, caso se interesse, ler com mais detalhes no TCC de Mateus Reinke [30], o principal já foi mostrado.

A ação com o termo de campos externos tem a seguinte forma

$$\delta \int_{\Omega} \sqrt{-g} \mathcal{L}_M d^4x = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \sqrt{-g} T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} d^4x. \quad (2.50)$$

Substituindo todas as ações encontradas na ação total 2.33 ficaremos com a seguinte equação

$$\delta \int_{\Omega} \sqrt{-g} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} - \kappa T_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} d^4x = 0. \quad (2.51)$$

Da qual podemos retirar a equação de Einstein na forma covariante

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}. \quad (2.52)$$

Sendo que agora temos a presença do tensor Energia-momentum, o que representa a presença de matéria no espaço.

2.4 Tensor Energia-momentum

Na teoria de Newton, a gravidade é explicada como uma força de atração que atua entre duas massas. Essa força é descrita pela Lei da Gravitação Universal dada pela equação 2.53 abaixo.

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}. \quad (2.53)$$

Em que G é a constante de gravitação. Nessa teoria, a massa, ou mais geralmente densidade de massa, é uma quantidade conservada. Na teoria da relatividade especial a

massa m de uma partícula não é mais conservada, mas está relacionada à energia e à magnitude do momento através da seguinte relação [16]

$$E^2 = p^2 c^2 + c^2 m^2. \quad (2.54)$$

E existem leis de conservação que se relacionam à energia (incluindo massa-energia) e ao momento. Portanto, devemos esperar que, em uma teoria relativística, a fonte de gravitação não pode ser apenas massa, mas deve também envolver energia e momento. Como essas "fontes" de gravitação devem, de alguma forma, aparecer em um tensor, é normal pensarmos que a quantidade que estamos procurando seja um tensor. Nesse caso em específico é o tensor de momento-energia.

O tensor energia-momento descreve a distribuição e o fluxo de energia e momento em uma região do espaço-tempo, é um tensor que tem como uma de suas propriedades fundamentais a simetria, ou seja, $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$. E de forma resumida podemos dizer que as componentes do tensor energia-momento são:

- T^{00} - É a densidade de energia.
- T^{0i} - É o fluxo de densidade de energia na direção i .
- T^{ij} - É o fluxo de densidade de momento i na direção j .
- t^{ii} - É o fluxo do momento, que chamaremos de pressão p .

Como iremos estudar o caso de um fluido ideal, ou seja sem viscosidade, os termos T^{ij} com $i \neq j$ serão nulos, porque não haverá forças perpendiculares às interfaces. E como também não estamos considerando que há troca de calor entre as partículas, fazemos $t^{0i} = t^{i0} = 0$. Os componentes do tensor momento-energia para um fluido ideal é dado covariantemente por

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p/c^2)U^\mu U^\nu - pg^{\mu\nu}. \quad (2.55)$$

Em que ρ é a densidade de massa U^μ é a 4-velocidade e p é a pressão que atua no corpo. Com todas essas informações, podemos finalmente caracterizar o tensor momento-energia $T^{\mu\nu}$, que é dado por

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}. \quad (2.56)$$

O fato de $T^{11} = T^{22} = T^{33} = p$ nos diz que a quantidade de colisões são iguais em todas as direções, e também nos mostra que estamos trabalhando com um fluido homogêneo e isotrópico.

2.5 Revisando o buraco negro de Schwarzschild

O precursor do que conhecemos hoje como buracos negros é conhecido como as "estrelas negras" de John Michell. Que embora não fossem exatamente o que entendemos hoje como buracos negros, elas representam uma importante etapa no desenvolvimento das ideias sobre a gravidade. Michell, baseado nas leis da gravidade de Newton e na ideia corpuscular da luz (em que a luz era composta de pequenas partículas), fez uma previsão surpreendente em que argumentou que uma estrela suficientemente massiva e compacta poderia ter um campo gravitacional tão forte que a velocidade de escape em sua superfície seria igual ou superior à velocidade da luz.

Para que um objeto, como uma partícula, um planeta, etc..., consiga escapar do campo gravitacional de corpo massivo, ele precisa alcançar uma determinada velocidade, que é conhecida como velocidade de escape. Nessa velocidade, a energia cinética do objeto em movimento supera a energia potencial gravitacional que tenta puxá-lo de volta. Michell se perguntou o que aconteceria se uma estrela tivesse a velocidade de escape maior do que a velocidade da luz e conclusão que ele chegou foi que a luz não conseguiria escapar, ficando presa à superfície e, portanto, essa estrela seria invisível para nós, uma vez que não há luz saindo dela. De forma independente, o francês Pierre-Simon Laplace, em seu livro Sistema do Mundo, chegou a mesma conclusão que John Michell, sendo que de uma maneira bem mais analítica do que as argumentações de Michell [1].

Para calcular a velocidade de escape v_e de um objeto de massa m é necessário que a energia cinética seja igual a energia potencial [39], da seguinte forma

$$\frac{mv_e^2}{2} = mgR \quad \Rightarrow \quad v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}}. \quad (2.57)$$

Em que M é a massa do corpo massivo que está atraindo e G é a constante universal de gravitação. Como estamos supondo que a massa M é constante a velocidade de escape se torna uma função do raio R do corpo. Dessa forma, deve existir um raio, que chamarei de a , tal que a velocidade de escape seja a da luz, ou seja

$$c = \sqrt{\frac{2GM}{a}} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{2GM}{c^2}. \quad (2.58)$$

Ou seja, se um corpo de massa M com um raio igual ou menor que a , a velocidade de escape seria igual ou maior à velocidade da luz.

Em 1915 Einstein publica a sua teoria da relatividade geral no qual descreve como a massa e a energia deforma a curvatura do espaço-tempo, representada pela equação 2.52. A solução de Schwarzschild é a primeira solução exata das equações de campo de Einstein. Ela descreve o campo gravitacional fora de uma massa esférica, não carregada e não rotativa, no vácuo. Schwarzschild apresentou seu trabalho em 1916, já em coordenadas esféricas, que possui a seguinte estrutura [18]

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (2.59)$$

Em que $d\Omega^2 = d\Theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$ é o ângulo sólido e $r_s = 2GM/c^2$ é o termo conhecido como raio de Schwarzschild. Repare que se $r = 0$ o termo g_{00} não tem validade matemática e se $r = r_s$ o termo g_{11} se iguala a zero e novamente temos uma métrica singular. As singularidades encontradas na equação 2.59 são denominadas de singularidade intrínseca e pseudo singularidade, respectivamente, pois, uma dessas singularidades ($r = 0$) é uma singularidade associada a solução e não há como contornar, a outra singularidade ($r = r_s$) é uma singularidade que é possível contornar com uma transformação de variáveis. E foram justamente essas singularidades que deram origem aos estudos dos buracos negros que conhecemos hoje e que incentivou o estudo de buracos negros com outras propriedades e características diversas da de Schwarzschild como como o buraco negro de Kerr, que possui rotação, buraco negro de Reissner - Nordström, que é carregado eletricamente, e o buraco negro de Kerr-Newman, que possui rotação e carga elétrica.

2.6 Termodinâmica de buracos negros

Antes do desenvolvimento da termodinâmica dos buracos negros, os mesmos eram vistos principalmente como objetos puramente gravitacionais, sem relação direta com a termodinâmica. Isso começou a mudar na década de 1970, quando físicos começaram a perceber paralelos entre as propriedades dos buracos negros e as grandezas e leis da termodinâmica clássica. Bekenstein foi um dos pioneiros no estudo da termodinâmica dos buracos negros. Em 1972, ele propôs que os buracos negros poderiam ter uma entropia proporcional à área. A ideia de Bekenstein surgiu de uma tentativa de preservar a segunda lei da termodinâmica, o qual afirma que a entropia total do universo nunca diminui, ao "perder" entropia do universo quando um corpo adentrasse em um buraco negro [2] e com essa entropia poderia encontrar alguma informação sobre o interior do buraco negro, inacessível pelo lado exterior.

Nesse mesmo trabalho, Bekenstein postulou a segunda Lei da Termodinâmica Generalizada, impondo que a variação da entropia de um buraco negro somado à variação da entropia do exterior nunca diminuem. Mais tarde, com o avanço formal da teoria, a analogia entre a termodinâmica clássica e a mecânica dos buracos negros foi solidificada, levando à formulação que apresentamos [5].

- **Lei zero:** Analogamente à termodinâmica clássica, a lei zero trata do equilíbrio térmico. Sabemos que, se dois sistemas estão individualmente em equilíbrio térmico com um terceiro sistema, então eles também estão em equilíbrio térmico entre si. No caso de um único sistema, isso implica que a temperatura deve ser uniforme em todo ele. No contexto dos buracos negros, isso significa que:

A gravidade superficial de um buraco negro estacionário é constante sobre o seu horizonte de eventos

- **Primeira Lei:** A primeira lei mostra a relação entre a variação de massa do buraco negro de acordo com a variação da sua área (A), do momento angular (L^3) e da sua carga (Q), postulada da seguinte forma

$$dM = \frac{\kappa}{8\pi}dA + \Omega_H dL + \Phi_H dQ \quad (2.60)$$

Em que κ é da gravidade superficial, Ω_H é a velocidade angular e Φ_H é o potencial elétrico na superfície do buraco negro. É possível fazer um paralelo com a primeira lei clássica da termodinâmica, M seria o equivalente a U, κ seria o equivalente a temperatura, a área A seria o equivalente a entropia e Ω_H e Φ_H juntamente com a variação do momento angular e da carga equivale ao trabalho realizado W.

- **Segunda lei:** É possível enunciar a segunda lei da termodinâmica como

A soma das mudanças de entropia do buraco negro e do exterior nunca decrescem.

$$dS + dS_{ext} \geq 0 \quad (2.61)$$

- **Terceira Lei:** De modo resumido e direto é dito que a terceira lei da termodinâmica para os buracos é a inacessibilidade do zero absoluto em um número finito de processos termodinâmicos, então podemos dizer que

É impossível reduzir a gravidade superficial de um buraco negro a zero em um número finito de operações

2.7 Radiação Hawking

A teoria da relatividade geral de Albert Einstein forneceu a base para a descrição dos buracos negros como soluções das equações de campo de Einstein. Essas soluções, como a métrica de Schwarzschild, descreveram buracos negros como regiões do espaço-tempo das quais nada, nem mesmo a luz, poderia escapar. No início da década de 1970, Bekenstein propôs a ideia de que os buracos negros possuem entropia, com a área do horizonte de eventos sendo proporcional à entropia. Essa proposta sugeria uma conexão entre a gravidade e a termodinâmica, mas ainda faltava uma compreensão completa sobre como essa entropia poderia se manifestar fisicamente. A contribuição mais significativa veio em 1974, quando Stephen Hawking, um físico teórico britânico, fez uma descoberta

surpreendente ao aplicar a mecânica quântica ao horizonte de eventos de um buraco negro. Ele mostrou que os buracos negros não são completamente negros, mas emitem radiação devido aos efeitos quânticos perto do horizonte de eventos.

Neste trabalho, Hawking investiga como o buraco negro, estabilizado, leva a criação de partículas bem como seu espectro de radiação (radiação Hawking) [6]. Para entender o que seria essa radiação Hawking imagine que um par de partículas virtuais seja criado nas proximidades do horizonte de eventos, como mostrado na figura logo abaixo [40]. Se, antes de se aniquilarem, uma das partículas do par cruzar o horizonte de eventos enquanto a outra não, e essa última escapar para o infinito, ela pode ser interpretada como radiação emitida pelo horizonte de eventos do buraco negro e detectada por um observador distante. Essa radiação define o buraco negro como um sistema termodinâmico, cuja temperatura é conhecida como temperatura de Hawking.

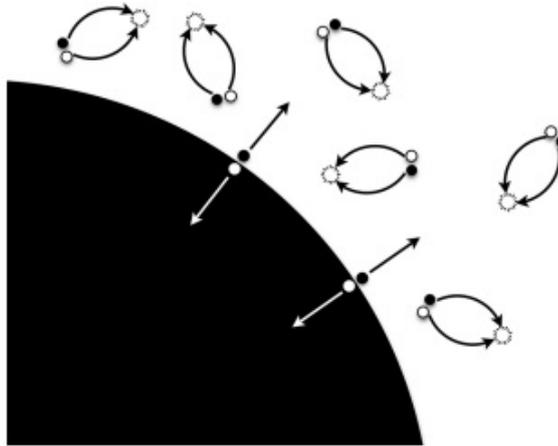


Figura 2.3: Imagem esquemática de como funciona a radiação hawking.

Os cálculos a serem desenvolvidos daqui em diante, teve como base a tese de dissertação de João Chakriam Raphael Viana Duarte [6], com uma pequena diferença de que seu trabalho foi realizado sobre as cordas cósmicas, em que consequentemente foi necessário utilizar coordenadas cilíndricas. Aqui irei desenvolver as mesmas ideias só que de forma análoga para coordenadas esféricas, uma vez que estamos trabalhando com buraco negro de Schwarzschild.

Partindo do método de Hamilton-Jacob [17] iremos resumir nossos passos para obtenção da temperatura de Hawking da seguinte maneira:

1. Formulamos a equação de Klein-Gordon para analisar a interação de um campo escalar no espaço-tempo curvo gerado pela singularidade (buraco negro).
2. Propomos uma solução para a equação derivada, expressa em termos da ação de trajetória, de modo que a equação resultante é uma equação de Hamilton-Jacobi.

3. Sugere-se uma separação de variáveis adequada, que simplifica o problema a uma quadratura. Em seguida, aplica-se a teoria de resíduos e polos para resolver a integral de forma analítica.
4. O fator de emissão, derivado dos passos anteriores, é comparado ao fator de Boltzmann da distribuição térmica de partículas, permitindo assim a determinação da temperatura de Hawking.

Começando com a equação de Klein-Gordon em espaços curvos

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_v(\sqrt{-g}g^{v\lambda}\partial_\lambda)\Phi - \frac{m^2}{\hbar^2}\Phi = 0. \quad (2.62)$$

Vamos desenvolvê-la utilizando a regra do produto para as derivadas

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_v(\sqrt{-g}g^{v\lambda}\partial_\lambda)\Phi - \frac{m^2}{\hbar^2}\Phi = 0, \\ \partial_v\left(g^{\lambda\nu}\frac{\partial\Phi}{\partial x^\lambda}\right) + \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\eta\sqrt{-g}\left(g^{\lambda\eta}\frac{\partial\Phi}{\partial x^\lambda}\right) - \frac{m^2}{\hbar^2}\Phi = 0. \end{aligned} \quad (2.63)$$

Podemos usar a seguinte identidade [3]

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\beta\sqrt{-g} = \Gamma_{\kappa\beta}^\kappa. \quad (2.64)$$

Lembrando que $\Gamma_{\beta\lambda}^\alpha$ são os símbolos de Christoffel dado pela equação 2.20. Que resultará em

$$\partial_v\left(g^{\lambda\nu}\frac{\partial\Phi}{\partial x^\lambda}\right) + \Gamma_{v\eta}^v\left(g^{\lambda\eta}\frac{\partial\Phi}{\partial x^\lambda}\right) - \frac{m^2}{\hbar^2}\Phi = 0. \quad (2.65)$$

O termo entre parênteses é o componente do gradiente do campo escalar $\vec{\nabla}\Phi$, de modo que podemos reescrever como

$$\partial_v(\nabla\Phi)^v + \Gamma_{v\eta}^v(\nabla\Phi)^\eta - \frac{m^2}{\hbar^2}\Phi = 0. \quad (2.66)$$

A equação acima pode ser vista como aplicação da divergência sobre o gradiente do campo escalar, de modo que a equação pode ser reescrita da seguinte forma

$$g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\Phi - \frac{m^2}{\hbar^2}\Phi = 0. \quad (2.67)$$

Utilizando o fato de que, para o campo escalar, a derivada covariante se simplifica para a derivada parcial, $\nabla_\alpha\Phi \equiv \partial_\alpha\Phi$, podemos escrever ainda da seguinte maneira

$$g^{\mu\nu}\nabla_\mu(\partial_\nu\Phi) - \frac{m^2}{\hbar^2}\Phi = 0. \quad (2.68)$$

E usando outra identidade [3]

$$\nabla_\alpha(\nabla\Phi)_\delta = \partial_\alpha(\nabla\Phi)_\delta - \Gamma_{\alpha\delta}^\sigma(\nabla\Phi)_\sigma. \quad (2.69)$$

Substituindo 2.69 em 2.68

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} [\partial_\mu(\partial\Phi)_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda(\partial_\lambda\Phi)_\lambda] - \frac{m^2}{\hbar^2}\Phi &= 0, \\ g^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\Phi - g^{\mu\nu}\Gamma_{\mu\nu}^\lambda\partial_\lambda\Phi - \frac{m^2}{\hbar^2}\Phi &= 0. \end{aligned} \quad (2.70)$$

Precisamos adequar a equação 2.70 para o nosso caso de buracos negros esféricos, para isso precisamos definir o nosso elemento de linha correspondente a uma simetria esférica, dado por:

$$ds^2 = -g_{tt}(r)dt^2 + g_{rr}(r)dr^2 + g_{\theta\theta}(r)d\theta^2 + g_{\phi\phi}(r)d\phi^2. \quad (2.71)$$

Tal elemento de linha decorre do fato de a métrica de Schwarzschild ser diagonal e por isso tem apenas os termos diagonais mencionados, em que r é a coordenada polar das coordenadas cilíndricas. Substituindo 2.71 em 2.70 ficamos com

$$\begin{aligned} g^{tt}\partial_t(\partial_t\Phi) + g^{rr}\partial_r(\partial_r\Phi) + g^{\theta\theta}\partial_\theta(\partial_\theta\Phi) + g^{\phi\phi}\partial_\phi(\partial_\phi\Phi) - g^{tt}\Gamma_{tt}^t\partial_t\Phi \\ - g^{rr}\Gamma_{rr}^r\partial_r\Phi - g^{\theta\theta}\Gamma_{\theta\theta}^\theta\partial_\theta\Phi - g^{\phi\phi}\partial_\phi\Phi - \frac{m^2}{\hbar^2}\Phi &= 0. \end{aligned} \quad (2.72)$$

Agora precisamos solucionar essa equação 2.72. Para isso é usado uma solução na forma da aproximação WKB. Essa proposta é justificável, pois no horizonte de eventos o número de onda radial se aproxima do infinito, o que implica um grande desvio para o azul (blueshift) [28]. Por isso é usado o seguinte ansatz

$$\Phi(t, r, \theta, \phi) = \exp\left\{\frac{i}{\hbar}S(t, r, \theta, \phi)\right\}. \quad (2.73)$$

Em que S representa a ação da trajetória associada ao tunelamento de uma partícula. Substituindo 2.73 em 2.72, já desenvolvendo as respectivas derivadas, ficaremos com a seguinte expressão

$$\begin{aligned}
 & g^{tt} \partial_t \left(\frac{i}{\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} S} \partial_t S \right) + g^{rr} \partial_r \left(\frac{i}{\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} S} \partial_r S \right) + g^{\theta\theta} \partial_\theta \left(\frac{i}{\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} S} \partial_\theta S \right) \\
 & g^{\phi\phi} \partial_\phi \left(\frac{i}{\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} S} \partial_\phi S \right) - g^{tt} \Gamma_{tt}^t \left(\frac{i}{\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} S} \partial_t S \right) - g^{rr} \Gamma_{rr}^r \left(\frac{i}{\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} S} \partial_r S \right) \\
 & - g^{\theta\theta} \Gamma_{\theta\theta}^\theta \left(\frac{i}{\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} S} \partial_\theta S \right) - g^{\phi\phi} \Gamma_{\phi\phi}^\phi \left(\frac{i}{\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} S} \partial_\phi S \right) - \frac{m^2}{\hbar^2} e^{\frac{i}{\hbar} S} = 0.
 \end{aligned} \tag{2.74}$$

Podemos desenvolver um pouco mais aplicando a regra do produto das derivadas

$$\begin{aligned}
 & g^{tt} \left(-\frac{1}{\hbar^2} e^{\frac{i}{\hbar} S} \partial_t S \partial_t S + \frac{i}{\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} S} \partial_t^2 S \right) + g^{rr} \left(-\frac{1}{\hbar^2} e^{\frac{i}{\hbar} S} \partial_r S \partial_r S + \frac{i}{\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} S} \partial_r^2 S \right) \\
 & g^{tt} \left(-\frac{1}{\hbar^2} e^{\frac{i}{\hbar} S} \partial_t S \partial_t S + \frac{i}{\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} S} \partial_t^2 S \right) + g^{tt} \left(-\frac{1}{\hbar^2} e^{\frac{i}{\hbar} S} \partial_t S \partial_t S + \frac{i}{\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} S} \partial_t^2 S \right) \\
 & - g^{tt} \Gamma_{tt}^t \left(\frac{i}{\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} S} \partial_t S \right) - g^{rr} \Gamma_{rr}^r \left(\frac{i}{\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} S} \partial_r S \right) - g^{\theta\theta} \Gamma_{\theta\theta}^\theta \left(\frac{i}{\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} S} \partial_\theta S \right) \\
 & - g^{\phi\phi} \Gamma_{\phi\phi}^\phi \left(\frac{i}{\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} S} \partial_\phi S \right) - \frac{m^2}{\hbar^2} e^{\frac{i}{\hbar} S} = 0.
 \end{aligned} \tag{2.75}$$

Multiplicando ambos os lados por $-\frac{\hbar^2}{e^{\frac{i}{\hbar} S}}$ e colocando termos em evidência

$$\begin{aligned}
 & g^{tt} (\partial_t S)^2 + g^{rr} (\partial_r S)^2 + g^{\theta\theta} (\partial_\theta S)^2 + g^{\phi\phi} (\partial_\phi S)^2 + m^2 \\
 & - \frac{\hbar}{i} [g^{tt} \partial_t^2 S + g^{rr} \partial_r^2 S + g^{\theta\theta} \partial_\theta^2 S + g^{\phi\phi} \partial_\phi^2 S + g^{tt} \Gamma_{tt}^t \partial_t S + g^{rr} \Gamma_{rr}^r \partial_r S \\
 & + g^{\theta\theta} \Gamma_{\theta\theta}^\theta \partial_\theta S + g^{\phi\phi} \Gamma_{\phi\phi}^\phi \partial_\phi S] = 0.
 \end{aligned} \tag{2.76}$$

Usando a teoria da perturbação

$$S(t, r, \theta, \phi) = S_0(t, r, \theta, \phi) + \hbar S_1(t, r, \theta, \phi) + \hbar^2 S_2(t, r, \theta, \phi) + \dots \tag{2.77}$$

Substituindo 2.77 na equação anterior 2.76 e desprezando os termos \hbar e superiores, ficamos com a seguinte expressão de Hamilton-Jacob. Tal aproximação é válida, pois, o ansatz 2.73 considera a aproximação para comprimentos de onda pequenos. Essa aproximação está ligada à interpretação semiclássica, onde S é vista como a função principal de Hamilton, assumindo que \hbar é suficientemente pequeno, permitindo assim o uso dos termos de ordem zero na expansão. Também é válido lembrar que como estamos considerando apenas o termo de ordem 0 as segundas derivadas vão se anular e os símbolos de Christoffel, os quais são uma derivada de 1º ordem que ao serem multiplicados por ∂_μ (com $\mu = 0, 1, 2, 3$) se torna uma derivada de segunda ordem, o que acaba também eliminando a aproximação.

$$g^{tt}(\partial_t S_o)^2 + g^{rr}(\partial_r S_o)^2 + g^{\theta\theta}(\partial_\theta S_o)^2 + g^{\phi\phi}(\partial_\phi S_o)^2 + m^2 = 0. \quad (2.78)$$

Seguindo os procedimentos de resolução de uma equação de Hamilton-Jacob, precisamos agora propor uma separação de variáveis razoável. Que será da seguinte maneira

$$S_o(t, r, \theta, \phi) = -Et + w(r) + J_\theta\theta + J_\phi\phi + C. \quad (2.79)$$

Em que J_θ e J_ϕ são constantes ligadas às componentes do momento angular nas direções θ e ϕ , respectivamente. C é uma constante, E é uma constante associada à energia e $w(r)$ é a nossa função da coordenada radial a ser determinada. Substituindo 2.79 em 2.78 ficamos assim

$$E^2 g^{tt} + g^{rr} \partial_r w(r)^2 + g^{\theta\theta} J_\theta^2 + g^{\phi\phi} J_\phi^2 + m^2 = 0. \quad (2.80)$$

Isolando $\partial_r w(r)$

$$\partial_r w(r) = \pm \frac{1}{\sqrt{g^{rr}}} \sqrt{-E^2 g^{tt} - g^{\theta\theta} J_\theta^2 - g^{\phi\phi} J_\phi^2 - m^2}. \quad (2.81)$$

Uma vez que temos a derivada da função que queremos encontrar, basta integrar para encontrá-la

$$w_\pm(r) = \pm \int dr \left\{ \frac{1}{\sqrt{g^{rr}}} \sqrt{-E^2 g^{tt} - g^{\theta\theta} J_\theta^2 - g^{\phi\phi} J_\phi^2 - m^2} \right\}. \quad (2.82)$$

Para facilitar nossas contas podemos utilizar a seguinte relação $g_{tt} = -g_{rr}^{-1}$, presente na métrica de Schwarzschild 2.59. Ficando com a seguinte expressão

$$w_\pm(r) = \pm \int dr \left\{ \frac{1}{g^{rr}} \sqrt{E^2 - g^{rr} [g^{\theta\theta} J_\theta^2 + g^{\phi\phi} J_\phi^2 + m^2]} \right\}. \quad (2.83)$$

Agora temos que desenvolver a integral e o método mais prático e fácil para solucionar é utilizando a teoria de resíduos e polos. A nossa função logo acima tem um polo simples, de modo que podemos calcular o resíduo da seguinte maneira [10]

$$\sum \text{res}\{f(x_o)\} = \frac{\chi(x_o)}{\psi'(x_o)}. \quad (2.84)$$

Em que $\chi(x_o) \neq 0$ e $\psi'(x_o) = 0$. Vamos identificar quem é cada termo na nossa integral

$$\begin{aligned} \psi(x) = g^{rr}(x) &\Rightarrow \psi'(x) = \frac{d}{dr} g^{rr}(x), \\ \chi(x) = \sqrt{E^2 - g^{rr}(x) [g^{\theta\theta}(x) J_\theta^2 + g^{\phi\phi}(x) J_\phi^2 + m^2]}. \end{aligned} \quad (2.85)$$

Substituindo podemos encontrar nosso resíduo

$$\sum \text{res}\{f(x_o)\} = \frac{1}{\left(\frac{d}{dr}g^{rr}\right)\Big|_{x=x_o}} \sqrt{E^2 - g^{rr}(x) [g^{\theta\theta}(x)J_\theta^2 + g^{\phi\phi}(x)J_\phi^2 + m^2]}. \quad (2.86)$$

Uma vez que determinamos o resíduo da função $f(x)$ podemos começar o cálculo de integração no plano complexo como mostrado na figura logo abaixo. Para isso é necessário calcular a integral ao longo de um contorno que contorne o polo x_o e avaliar como esse desvio do polo influencia o resultado final da integral. Assim, foi selecionado um contorno de integração fechado que consiste em um semicírculo infinito no semiplano superior, com um pequeno desvio semicircular de raio infinitesimal δ em torno de x_o

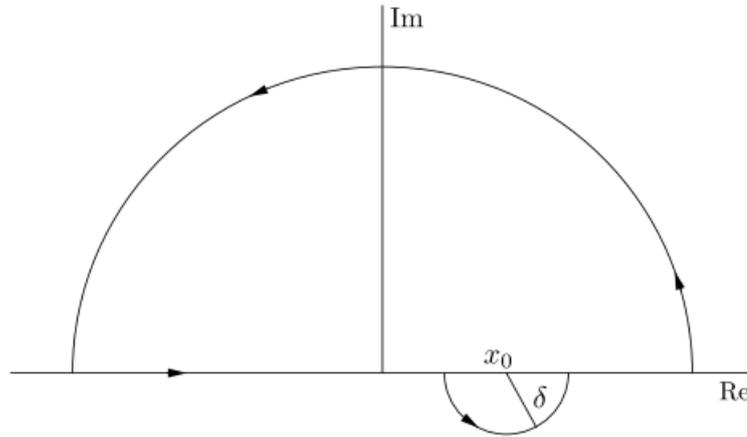


Figura 2.4: Imagem esquemática da integração no plano complexo.

Dessa forma a nossa integral se tornou uma integral de caminho e pode ser subdividida em 4 outras integrais

$$\oint f(x)dx = \int_{-\infty}^{x_o-\delta} f(x)dx + \int_{\zeta} f(x)dx + \int_{x_o+\delta}^{\infty} f(x)dx + \int \text{semicírculo infinito},$$

$$= 2\pi i \sum \text{res}\{f(x_o)\}. \quad (2.87)$$

Em que ζ é o contorno no polo x_o . Agora precisamos encontrar o valor da integral $\int_{\zeta} f(x)dx$, uma vez que a integral sob o semicírculo infinito é nula pelo Lema de Jordan [10] e as demais são nulas por não possuírem polos simples em seu caminho. Pela série de Laurent sabemos que

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(x - x_o)^n = \frac{a_{-1}}{x - x_o}. \quad (2.88)$$

Em que a_{-1} é o resíduo, então

$$\int_{\zeta} f(x)dx = \int_{\zeta} \frac{\sum \text{res}f(x_o)}{x - x_o} dx. \quad (2.89)$$

Fazendo a seguinte mudança de variável

$$\begin{cases} x - x_o = \delta e^{i\phi}, \\ dx = i\delta e^{i\phi} d\phi. \end{cases} \quad (2.90)$$

Substituindo na integral 2.89 ficamos assim

$$\begin{aligned} \int_{\zeta} f(x)dx &= \int_{\zeta} \frac{\sum \text{res}f(x_o) i\delta e^{i\phi} d\phi}{\delta e^{i\phi}}, \\ &= \int_{\zeta} i \sum \text{res}\{f(x_o)\} d\phi, \\ &= i \sum \text{res}\{f(x_o)\} \int_{\pi}^{2\pi} d\phi, \\ &= i\pi \sum \text{res}\{f(x_o)\}. \end{aligned} \quad (2.91)$$

Agora finalmente podemos calcular o valor da integral 2.87

$$\oint f(x)dx = i\pi \sum \text{res}\{f(x_o)\}. \quad (2.92)$$

E utilizando o resultado já obtido 2.86, e lembrando a equação 2.87 para a obtenção de $W_{\pm}(r)$, encontraremos

$$W_{\pm}(r) = \pm \frac{i\pi}{\left(\frac{d}{dr}g^{rr}\right)\Big|_{r=r_+}} \sqrt{E^2 - g^{rr}(r_+) [g^{\theta\theta}(r_+)J_{\theta}^2 + g^{\phi\phi}(r_+)J_{\phi}^2 + m^2]}. \quad (2.93)$$

Uma vez que o polo x_o no plano complexo está representando a localização do horizonte de eventos r_+ e devido ao fato de $g^{rr}(r_+) = 0$, a equação anterior fica assim

$$W_{\pm} = \pm \frac{i\pi}{\frac{d}{dr}g^{rr}\Big|_{r=r_+}} E. \quad (2.94)$$

Agora que conhecemos a função $W_{\pm}(r)$ podemos dar continuidade aos cálculos para encontrar a probabilidade de emissão. podemos determinar as probabilidades de emissão e absorção pelo horizonte de eventos que são dadas por [38], [8], [9]

$$P_{\text{emissão}} \propto \exp \left\{ -\frac{2}{\hbar} \text{Im}(S) \right\} = \exp \left\{ -\frac{2}{\hbar} [\text{Im}(w_+) + \text{Im}(C)] \right\}, \quad (2.95)$$

$$P_{\text{absorção}} \propto \exp \left\{ -\frac{2}{\hbar} \text{Im}(S) \right\} = \exp \left\{ -\frac{2}{\hbar} [\text{Im}(w_-) + \text{Im}(C)] \right\}. \quad (2.96)$$

Ou seja, para sabermos qual que é a probabilidade de emissão precisamos de alguma relação entre $\text{Im}(w_+)$ e $\text{Im}(C)$. Para isso, iremos utilizar o fato de que ao atravessar o horizonte de eventos, a probabilidade de a partícula penetrar no buraco negro é de 100%. Esse fato pode ser utilizado como uma condição de contorno para determinar a constante C em 2.96, procedendo da seguinte forma

$$\begin{aligned} 1 &= \exp \left\{ -\frac{2}{\hbar} [\text{Im}(w_-) + \text{Im}(C)] \right\}, \\ 0 &= \text{Im}(w_-) + \text{Im}(C), \\ \text{Im}(w_-) &= -\text{Im}(C). \end{aligned} \quad (2.97)$$

Mas nós precisamos saber de w_+ , usando a relação 2.94 podemos obter 2 expressões, uma para w_+ e uma para w_- e a partir disso obter uma relação entre as duas

$$w_+ = \frac{i\pi}{\left. \frac{d}{dr} g^{rr} \right|_{r=r_+}} E \quad e \quad w_- = -\frac{i\pi}{\left. \frac{d}{dr} g^{rr} \right|_{r=r_+}} E. \quad (2.98)$$

Logo podemos concluir que $w_+ = -w_-$ e com isso podemos dizer que

$$\text{Im}(W_+) = \text{Im}(C). \quad (2.99)$$

Usando 2.99 em 2.95 teremos

$$\Gamma_{\text{emissão}} = \exp \left\{ -\frac{4}{\hbar} \text{Im}(W_+) \right\}. \quad (2.100)$$

E usando 2.94 em 2.100

$$\Gamma_{\text{emissão}} = \exp \left\{ -\frac{4\pi E}{\hbar \left. \frac{d}{dr} g^{rr} \right|_{r=r_+}} \right\}. \quad (2.101)$$

De forma que a temperatura de Hawking é obtida ao comparar o fator de emissão obtido em com o fator de Boltzmann da distribuição térmica $e^{-\frac{E}{K_B T}}$ (fazendo $K_B = \hbar = 1$)

$$T_H = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{dg^{rr}}{dr} \right) \Big|_{r=r_+}. \quad (2.102)$$

A equação 2.102 fornece a fórmula geral para calcular a temperatura de Hawking a partir da métrica do buraco negro esférico. Este resultado, que deriva da aplicação do método de Hamilton-Jacobi, é uma consequência direta dos cálculos realizados por meio de integrais de caminho e do tunelamento no horizonte de eventos. Vale destacar que utilizaremos esse método ao longo do nosso estudo para determinar as propriedades termodinâmicas dos buracos negros esféricos e estáticos.

2.8 A distribuição Normal, Levy e Cauchy

2.8.1 Distribuição normal

A presente seção irá mostrar o comportamento das distribuições Gaussianas e não Gaussianas, mais especificamente as distribuições de Lévy e Cauchy. Entretanto, para tal, é necessário entender um pouco sobre cada uma delas, mostrar seu comportamento e características para um maior entendimento sobre o assunto abordado.

Também conhecida como distribuição de Gauss, essa distribuição, de forma bem simplificada, descreve como os valores de uma variável aleatória são distribuídos em torno de uma média. A distribuição Gaussiana é caracterizada por dois parâmetros: a média μ e o desvio-padrão σ , ambos muito bem definidos. E a função de densidade probabilidade é dada por [33]

$$P(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}. \quad (2.103)$$

Em que x é a nossa variável aleatória. De imediato, ao se comparar com 3.4, percebemos que foi feito $\mu = 0$ e $\sigma = 1$ na densidade que foi utilizada para realizar as contas. Para entendermos melhor sobre os efeitos de μ e σ na distribuição, observemos os dois gráficos logo abaixo. No gráfico da esquerda foi mantido o desvio-padrão fixo e variado a média, enquanto que no gráfico da direita foi mantido a média fixa e variado o desvio-padrão. Podemos concluir, a partir desses gráficos, que a média nos traz a informação do valor central, do quanto que o pico será deslocado para a esquerda ou para direita com relação ao centro e o desvio-padrão nos traz a informação de o quão largo é em relação à média, além de nos informar qual será a altura do pico da distribuição.

E uma das principais aplicabilidades dessa distribuição é pelo Teorema central do Limite (TCL) [32] que nos afirma o seguinte: "Sob certas condições, a soma de um grande número de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (IID), independentemente de sua distribuição original, tende a uma distribuição normal conforme o número de variáveis cresce", é válido salientar que o TCL se aplica apenas a variáveis com uma média finita e uma variância finita. Alguns processos que apresentam um comportamento descrito pelo TCL são: erro em medições, alturas de pessoas e médias amostrais.

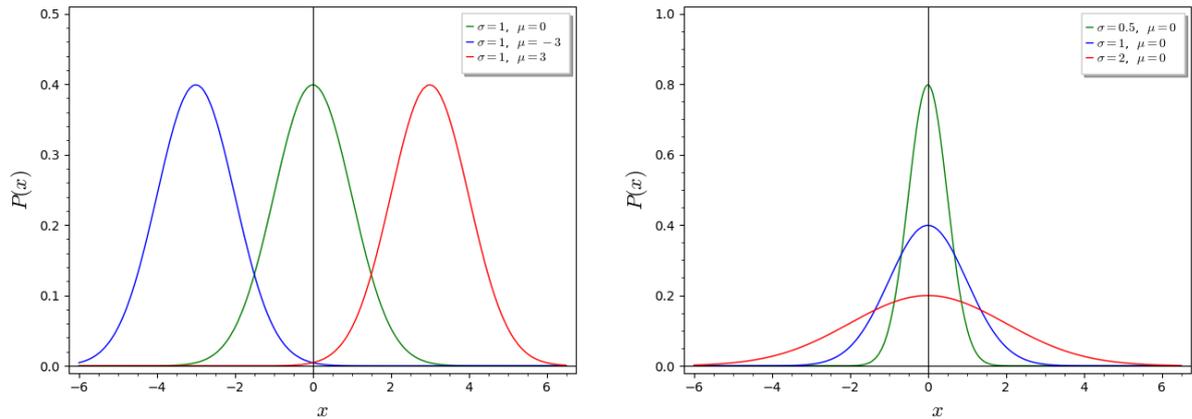


Figura 2.5: Gráfico da distribuição Gaussiana variando a média e o desvio-padrão.

2.8.2 Distribuição de Lévy

A distribuição de Lévy é uma distribuição de probabilidade que pertence à classe das distribuições α -estáveis, uma classe de distribuições que mantém sua forma ao serem somadas. Ela é caracterizada por uma cauda pesada, o que significa que eventos extremos (valores muito grandes ou pequenos) têm uma probabilidade maior de ocorrer do que em distribuições com caudas leves, como a distribuição Gaussiana. Geralmente é escrita em termos da transformada de Fourier da sua função característica $f(t, \alpha, \beta, \sigma, \mu) = e^{\phi(t, \alpha, \beta, \sigma, \mu)}$, em que $\phi(t, \alpha, \beta, \sigma, \mu)$ é dado por [33]

$$\phi(t, \alpha, \beta, \sigma, \mu) = \begin{cases} it\mu - |\sigma t|^\alpha (1 - i\beta \text{sign}[t] \tan[\frac{\pi}{2}\alpha]) & \text{para } \alpha \neq 1 \\ it\mu - |\sigma t| (1 - i\beta \text{sign}[t] \frac{2}{\pi} \ln[|t|]) & \text{para } \alpha = 1 \end{cases} \quad (2.104)$$

Em que α ($0 < \alpha \leq 2$) é conhecido como índice de Lévy (ou como índice da cauda ou também como índice de estabilidade), β ($-1 \leq \beta \leq 1$) é o índice de assimetria, o μ ($-\infty < \mu < +\infty$) é o parâmetro de locação, σ ($\sigma > 0$) é o parâmetro de escala e por último $\text{sign}(t)$ é a função sinal, definida da seguinte forma

$$\text{sign}(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t > 0 \\ 0, & \text{se } t = 0 \\ -1, & \text{se } t < 0 \end{cases} \quad (2.105)$$

Por sua vez, a distribuição α -estável de Lévy, por definição, é dada pela transformada inversa de Fourier da função $f(t, \alpha, \beta, \sigma, \mu)$ [29], que toma a seguinte forma

$$P(x, \alpha, \beta, \sigma, \mu) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[\phi(t)] \exp[-ixt]. \quad (2.106)$$

É possível obter alguns resultados de nosso interesse dessas equações, por exemplo, se $\alpha = 2$ e $\beta = 0$ nós obtemos a distribuição Gaussiana, dado pela equação 2.103, discutida anteriormente, quando $\alpha = \frac{1}{2}$ e $\beta = 1$ temos a distribuição de Lévy, dado pela equação 2.107 logo abaixo, que é o objeto de estudo do capítulo 5 e quando temos $\alpha = 1$ e $\beta = 0$ obteremos a distribuição de Cauchy, o qual será alvo de estudo no capítulo 6.

$$P(x) = \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi}} \frac{e^{\frac{-\gamma}{2(x-\delta)}}}{(x-\delta)^{\frac{3}{2}}}. \quad (2.107)$$

Para compreender um pouco mais sobre essa distribuição vamos fazer a mesma análise feita para o caso Gaussiano, entender qual os efeitos dos parâmetros γ e δ . No gráfico (2.6) da esquerda foi mantido o parâmetro de escala fixo e variado o delta, enquanto que no gráfico da direita foi mantido o delta constante e variado o parâmetro de escala. Com isso, podemos inferir diretamente pelo gráfico que o parâmetro de escala γ controla a altura do pico de distribuição, enquanto que o δ é o parâmetro de localização da curva. Uma outra importante propriedade dessa distribuição de Levy é que ela possui média e variância infinitas, bem diferente da distribuição gaussiana em que ambas são muito bem definidas. Uma maneira de checar se a média e a variância são infinitas é calculando o primeiro e o segundo momento, da seguinte maneira

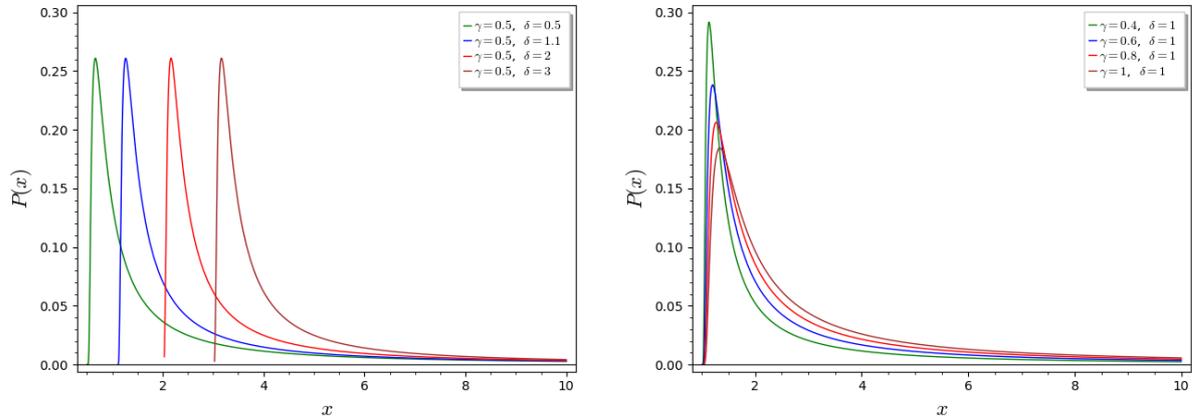


Figura 2.6: Gráfico da distribuição de Lévy variando o parâmetro de escala γ e o δ .

- Primeiro momento:

$$\langle x \rangle = \int_0^{\infty} xP(x)dx. \quad (2.108)$$

que ao ser substituído pela relação 2.107 fica assim

$$\langle x \rangle = \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi}} \int_0^{\infty} \frac{e^{\frac{-\gamma}{2x}}}{x^{\frac{1}{2}}} dx. \quad (2.109)$$

Ressaltando que foi feito, sem nenhum prejuízo, $\delta = 0$. Tal integral pode ser facilmente vista que diverge à medida que x tende a números muito pequenos.

- Segundo momento:

$$\langle x^2 \rangle = \int_0^{\infty} x^2 P(x) dx. \quad (2.110)$$

Substituindo, novamente, pela relação 2.107 fica assim

$$\langle x^2 \rangle = \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi}} \int_0^{\infty} x^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\gamma}{2x}} dx. \quad (2.111)$$

Também irá divergir.

E por fim, para mencionar um pouco de sua aplicabilidade, a distribuição de Lévy é largamente utilizada na econofísica, que inclusive a dissertação base para essa parte do trabalho é da área de economia [33], mais especificamente na área de mercado financeiro, também é largamente utilizado em bolsa de valores [19] e até em batimento cardíaco [31].

2.8.3 Distribuição Cauchy

Como falado há pouco, nós conseguimos obter a distribuição de Cauchy fazendo $\alpha = 1$ e $\beta = 0$ na equação 2.104 e ela tem a seguinte forma [20]

$$P(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\gamma}{(x - \delta)^2 + \gamma^2}. \quad (2.112)$$

Em que x é a nossa variável aleatória. Vamos analisar o comportamento dos parâmetros no gráfico 2.7 abaixo

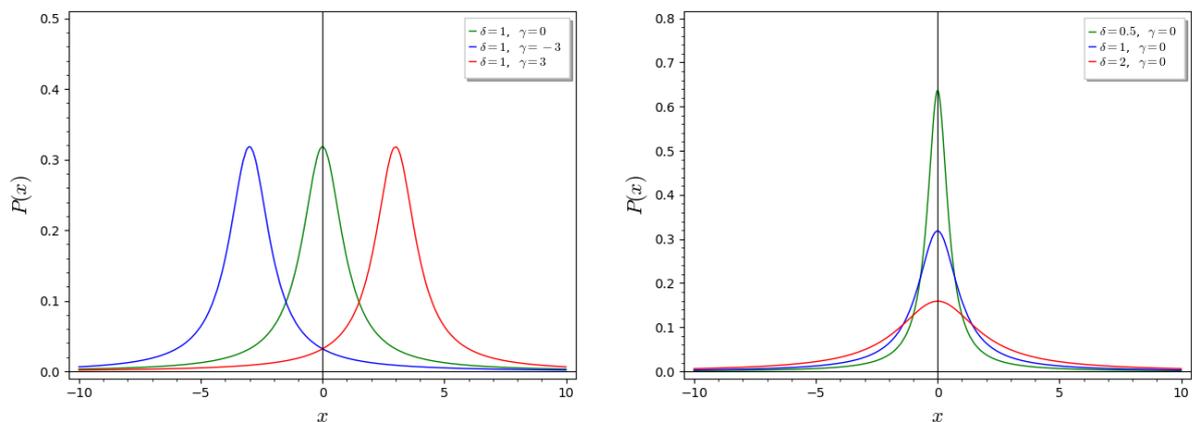


Figura 2.7: Gráfico da distribuição de Cauchy variando os parâmetros de escala γ e o δ .

Um primeiro aspecto importante a ser observado no comportamento da distribuição é que, em todas as curvas, independentemente do valor atribuído ao parâmetro, elas

apresentam a característica de cauda pesada. Esse comportamento é semelhante ao da distribuição de Lévy, ou seja, as caudas não exibem uma queda exponencial, mas sim uma queda que segue uma lei de potência. Essa característica é fundamental para a descrição dos fenômenos estudados, uma vez que indica a presença de eventos de alta magnitude com maior probabilidade do que seria esperado em uma distribuição com cauda exponencial. No gráfico à esquerda, foi mantido o parâmetro δ constante e variado o valor do parâmetro γ , enquanto no gráfico à direita, o valor de γ foi mantido fixo e δ foi alterado. A partir de uma análise direta dos gráficos, podemos perceber que o parâmetro δ tem a função de controlar a altura do pico da distribuição, afetando a amplitude dos eventos mais frequentes. Por outro lado, o parâmetro γ atua no controle da posição da média, além de determinar a largura da distribuição em torno da média, influenciando assim a dispersão dos dados. Essas variações fornecem uma visão clara sobre a sensibilidade dos resultados em relação a cada parâmetro, sendo fundamentais para entender a dinâmica do sistema em estudo.

Capítulo 3

Não-comutatividade do Espaço-tempo

Neste capítulo iremos apresentar a teoria da não-comutatividade do espaço-tempo, sobre seus fundamentos e aspectos históricos. Posteriormente iremos analisar como especificamente a matéria se comporta nessa não-comutatividade, o que conseqüentemente leva a escrita da métrica no espaço-tempo não-comutativo apresentado nos capítulos seguintes.

3.1 Fundamentos

A teoria do espaço-tempo não comutativo é uma área de pesquisa que surgiu na interseção entre a física teórica e a matemática. Ela aborda a ideia de que as coordenadas do espaço-tempo podem não seguir as regras de comutatividade tradicionais, como fazemos na geometria clássica. Snyder foi o pioneiro a formalizar a ideia de não-comutatividade [36], que se originou dos estudos de Heisenberg sobre o efeito ultravioleta na tentativa de encontrar explicações para as divergências na eletrodinâmica quântica. Em seu modelo, existe uma escala de comprimento mínimo universal $\sqrt{\theta}$, geralmente limitada ao comprimento de Planck, e, como tal, não é acessível para observações experimentais [37]. Em palavras mais simples, o termo $\sqrt{\theta}$ refere-se à escala associada à não-comutatividade, ou seja, uma medida do comprimento ou distância abaixo da qual os efeitos da não-comutatividade do espaço-tempo tornam-se relevantes. Assim, torna-se evidente que o conceito de não-comutatividade surge então como uma consequência desses estudos iniciais.

Nessa teoria, as variáveis canônicas x^μ e p^ν no espaço de fases são substituídas por operadores hermitianos \hat{x}^μ e \hat{p}^ν , obedecendo à relação de comutação de Heisenberg $[\hat{x}^\mu, \hat{p}^\nu]$. Como consequência, o espaço de fases torna-se espalhado, resultando na perda da noção de ponto. Entretanto, no limite clássico onde $\hbar \rightarrow 0$, o espaço é reestabelecido.

De modo que a não-comutatividade é introduzida por meio de

$$[\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] = i\theta^{\mu\nu}. \quad (3.1)$$

Em que θ representa uma matriz anti-simétrica $D \times D$, com D sendo a dimensão do espaço-tempo, e $\mu, \nu = 0, 1, \dots, D - 1$. Essa relação, para Snyder, representa a quantização do espaço-tempo, uma vez que se escrevemos o princípio da incerteza generalizado como

$$(\Delta x^\mu)^2 (\Delta x^\nu)^2 \geq \left(\frac{1}{2i} [\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] \right)^2. \quad (3.2)$$

encontraremos

$$\Delta x^\mu \Delta x^\nu \geq \frac{1}{2} |\theta^{\mu\nu}|. \quad (3.3)$$

O resultado mostrado em 3.3 revela que a noção de ponto no espaço-tempo perde o sentido, uma vez que, para definir um ponto, seria necessário conhecer com precisão, no mínimo, duas coordenadas que formam um par ordenado para indicar a localização exata. No entanto, se considerarmos que uma coordenada, por exemplo, x^μ , é bem determinada (com uma incerteza associada à medição muito baixa), então, de acordo com a relação 3.3, a incerteza na coordenada x^ν será muito alta para satisfazer essa relação. Isso se deve à existência de um comprimento mínimo característico do espaço-tempo, dado por $\sqrt{\theta}$, e à suposição de que o parâmetro de não-comutatividade é uniforme em todas as direções, com magnitude $|\theta^{\mu\nu}| = \theta$, o que limita as medições a distâncias acima desse valor, tornando medições abaixo desse comprimento impraticáveis.

3.2 A matéria no espaço-tempo não-comutativo na distribuição Gaussiana

Como mostrado anteriormente, a noção de ponto não faz sentido em nossos estudos. Seja se tratando de um ponto espacial, velocidade, ou, no nosso caso de pesquisa, massa. Enquanto que no "espaço tradicional" (grandes escalas, comutativo) a densidade de massa de uma partícula pode ser facilmente determinada pela multiplicação da sua massa e uma função delta de Dirac, mas em escalas próximas à $\sqrt{\theta}$ isso não é mais verdade. Devemos agora tratar a densidade de massa como distribuição de densidade de massa, em que tal distribuição, inicialmente, é dada pela distribuição gaussiana. Posteriormente, nos capítulos seguintes, iremos trabalhar com distribuição de densidade dada pela distribuição de Levy e pela distribuição de Cauchy. Por agora, devemos entender que a massa está distribuída com uma certa distribuição com largura mínima $\sqrt{\theta}$.

A densidade de massa, na distribuição Gaussiana, é dada por [6], [25]

$$\rho_{\theta G}(r) = \frac{M}{(4\pi\theta)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{r^2}{4\theta}}. \quad (3.4)$$

Em que o G é para identificar que estamos trabalhando na distribuição Gaussiana. E uma vez que já conhecemos a densidade de massa, basta utilizar o conceito de densidade de uma casca esférica para encontrar a distribuição de massa. Da seguinte maneira

$$m_{\theta G}(r) = \int_0^r 4\pi r'^2 \rho_{\theta G}(r') dr' = \int_0^r 4\pi r'^2 \frac{M}{(4\pi\theta)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{r'^2}{4\theta}} dr'. \quad (3.5)$$

De modo que, para conseguirmos uma expressão analítica para a nossa massa precisaremos realizar uma mudança de variável.

$$\begin{cases} u = \frac{r'^2}{4\theta} & \rightarrow & r' = \sqrt{4\theta u} \\ du = \frac{r'}{2\theta} dr'. \end{cases} \quad (3.6)$$

De forma que ao fazer essa substituição e realizar algumas passos algébricos chegaremos no seguinte resultado

$$m_{\theta G}(r) = \frac{2M}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{r^2}{4\theta}} u^{\frac{3}{2}-1} e^{-u} du. \quad (3.7)$$

Em que essa integral mostrada em 3.7 é a representação da função gamma incompleta superior, mostrada no apêndice. E sua representação é dada por $\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\theta}\right)$, substituindo

$$m_{\theta G}(r) = \frac{2M}{\sqrt{\pi}} \gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\theta}\right). \quad (3.8)$$

Para verificar se nosso resultado está correto devemos nos recordar do que foi dito no início desse capítulo. Vimos que para uma escala na ordem de grandeza de $\sqrt{\theta}$ os efeitos quânticos surtem efeito e conseqüentemente faz com que a distribuição de massa no espaço-tempo não-comutativo seja diferente da massa no espaço-tempo comutativo. E uma vez que consideramos escalas muito maiores que $\sqrt{\theta}$ nós devemos recuperar as propriedades de um espaço-tempo comutativo. Trazendo essa análise para a equação 3.8, se nós considerarmos distâncias muito grandes como $\frac{r}{\sqrt{\theta}} \rightarrow \infty$ significa tomar distâncias muito maiores do que a escala $\sqrt{\theta}$ e com isso nós devemos ter a função gamma incompleta inferior $\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\theta}\right)$ tomando o valor de $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Assim, $m_{\theta G} \rightarrow M$ e nós recuperamos a característica do espaço-tempo comutativo. Mostrando que as ideias desenvolvidas aqui estão coerentes.

Essa análise considera que a não-comutatividade do espaço-tempo é uma propriedade intrínseca da variedade e não uma imposição de estrutura geométrica pela teoria, o que implica que a gravidade é indiretamente afetada por ela, pois as equações de campo de Einstein são modificadas através do tensor momento-energia que incorpora os efeitos não-

comutativos. Vale ressaltar que, ao contrário do que poderia ser pensado inicialmente, não é necessário modificar a ação de Einstein-Hilbert quadridimensional para incluir os efeitos da não-comutatividade do espaço-tempo, bastando interpretar a massa como difundida em uma região de tamanho $\sqrt{\theta}$.

Capítulo 4

Não-comutatividade no buraco negro em uma distribuição Gaussiana

Neste capítulo vamos discutir os resultados obtidos com relação à distribuição de massa, às propriedades termodinâmicas e ao tensor de energia-momento em um espaço-tempo não-comutativo seguindo apenas a distribuição Gaussiana, de forma que todas as informações mostradas nesse capítulo são sempre relacionadas a distribuição Gaussiana. Nos demais capítulos trabalharemos com outras distribuições.

4.1 Tensor de Energia-Momento

Para analisar o tensor de energia-momento no espaço-tempo não-comutativo (na escala de $\approx \sqrt{\theta}$) devemos imaginar o buraco negro como sendo um fluido anisotrópico e que o tensor tenha a seguinte forma [35]

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_{\perp} \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

Em que ρ representa a densidade de massa, p_r representa a pressão radial e p_{\perp} é a pressão tangencial. A pressão tangencial deve ser igual para os termos $T^{\theta\theta}$ e $T^{\phi\phi}$ porque estamos lidando com uma simetria esférica. Vamos determinar quem são p_r e p_{\perp} usando a condição de conservação covariante

$$\nabla T^{\mu\nu} = 0. \quad (4.2)$$

Usando a definição da derivada covariante apresentada em 2.21 podemos desenvolver $\nabla T^{\mu\nu}$ da seguinte forma

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = \partial_\nu T^{\mu\nu} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu T^{\lambda\nu} + \Gamma_{\nu\lambda}^\nu T^{\mu\lambda}. \quad (4.3)$$

Perceba que o nosso tensor energia-momento possui dois índices, μ e ν , enquanto que a derivada covariante apresentada anteriormente possui apenas 1 índice. Por causa disso é necessário fazer 2 correções, o que deixa nosso resultado em 4.3 ligeiramente diferente do que é apresentada em 2.21. Podemos reescrever essa mesma expressão usando a definição dos símbolos de Christoffel apresentada em 2.20

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = \partial_\nu T^{\mu\nu} + \frac{1}{2} T^{\lambda\nu} g^{\mu\alpha} (\partial_\lambda g_{\nu\alpha} + \partial_\nu g_{\alpha\lambda} - \partial_\alpha g_{\nu\lambda}) + \frac{1}{2} T^{\lambda\mu} g^{\nu\alpha} (\partial_\lambda g_{\nu\alpha} + \partial_\nu g_{\alpha\lambda} - \partial_\alpha g_{\nu\lambda}). \quad (4.4)$$

A métrica que estamos trabalhando possui apenas a diagonal principal não-nula, por isso podemos suprimir o somatório em α e em λ . Fazendo $\mu = r$ ficamos assim

$$\nabla_\nu T^{r\nu} = \partial_\nu T^{r\nu} + \frac{1}{2} T^{\lambda\nu} g^{r\alpha} (\partial_\lambda g_{\nu\alpha} + \partial_\nu g_{\alpha\lambda} - \partial_\alpha g_{\nu\lambda}) + \frac{1}{2} T^{\lambda r} g^{\nu\alpha} (\partial_\lambda g_{\nu\alpha} + \partial_\nu g_{\alpha\lambda} - \partial_\alpha g_{\nu\lambda}). \quad (4.5)$$

No primeiro termo da equação acima o ν é um índice mudo de modo que podemos substituir por r sem problema nenhum. No segundo termo temos um somatório em λ e em α , iremos fazer $\lambda = \nu$ e $\alpha = r$. Pois assim, iremos ficar com um somatório em ν tornando-se assim um índice mudo e poderemos trocar por qualquer outro índice, no caso será r . E no terceiro termo iremos trocar o somatório em λ por r e α por ν , pois assim poderei eliminar alguns termos e facilitará os cálculos. Ficamos assim

$$\nabla_\nu T^{r\nu} = \partial_r T^{rr} + \frac{1}{2} T^{\nu\nu} g^{rr} (\partial_\nu g_{\nu r} + \partial_\nu g_{r\nu} - \partial_r g_{\nu\nu}) + \frac{1}{2} T^{rr} g^{\nu\nu} (\partial_r g_{\nu\nu} + \partial_\nu g_{\nu r} - \partial_\nu g_{r\nu}) \quad (4.6)$$

Como mencionado anteriormente, no segundo termo, irei trocar o somatório em ν por r e irei desenvolver a multiplicação. No terceiro termo percebe-se que já possibilidade de anular alguns termos dentro do parênteses

$$\nabla_\nu T^{r\nu} = \partial_r T^{rr} + T^{rr} g^{rr} \partial_r g_{rr} - \frac{1}{2} T^{\nu\nu} g^{rr} \partial_r g_{\nu\nu} + \frac{1}{2} T^{rr} g^{\nu\nu} \partial_r g_{\nu\nu} = 0. \quad (4.7)$$

Podemos rebaixar o um índice de T^{rr} da seguinte maneira

$$T^{rr} = g^{r\alpha} T_\alpha^r = g^{rr} T_r^r. \quad (4.8)$$

Vamos abaixar o índice apenas do primeiro termo de 4.7 e calcular sua derivada

$$\partial_r(g^{rr}T_r^r) + T^{rr}g^{rr}\partial_r g_{rr} - \frac{1}{2}T^{\nu\nu}g^{rr}\partial_r g_{\nu\nu} + \frac{1}{2}T^{rr}g^{\nu\nu}\partial_r g_{\nu\nu} = 0. \quad (4.9)$$

Aplicando a regra do produto da derivada

$$T_r^r g^{rr} \partial_r g^{rr} + g^{rr} \partial_r T_r^r + T^{rr} g^{rr} \partial_r g_{rr} - \frac{1}{2} T^{\nu\nu} g^{rr} \partial_r g_{\nu\nu} + \frac{1}{2} T^{rr} g^{\nu\nu} \partial_r g_{\nu\nu} = 0. \quad (4.10)$$

De 2.13 sabemos que $g^{rr} = (g_{rr})^{-1}$ e com isso podemos dizer que

$$\partial_r g^{rr} = \partial_r (g_{rr})^{-1} = -\frac{1}{g_{rr}^2} \partial_r g_{rr}. \quad (4.11)$$

aplicando esse resultado ficamos assim

$$-T_r^r \frac{1}{g_{rr}^2} \partial_r g_{rr} + g^{rr} \partial_r T_r^r + T^{rr} g^{rr} \partial_r g_{rr} - \frac{1}{2} T^{\nu\nu} g^{rr} \partial_r g_{\nu\nu} + \frac{1}{2} T^{rr} g^{\nu\nu} \partial_r g_{\nu\nu} = 0. \quad (4.12)$$

Iremos fazer uma contração na equação 4.12 multiplicando por g_{rr} , lembrando da relação 4.8 e lembrando do fato de que $g^{rr}g_{rr} = 1$ podemos resumir ela seguinte maneira

$$\begin{aligned} -T_r^r g^{rr} \partial_r g_{rr} + \partial_r T_r^r + T_r^r g^{rr} \partial_r g_{rr} - \frac{1}{2} T^{\nu\nu} \partial_r g_{\nu\nu} + \frac{1}{2} T_r^r g^{\nu\nu} \partial_r g_{\nu\nu} &= 0, \\ \partial_r T_r^r - \frac{1}{2} T^{\nu\nu} \partial_r g_{\nu\nu} + \frac{1}{2} T_r^r g^{\nu\nu} \partial_r g_{\nu\nu} &= 0. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Da mesma maneira que fizemos para abaixar um índice de T^{rr} , vamos fazer o mesmo para $T^{\nu\nu}$ e isolar $\partial_r T_r^r$, ficamos assim

$$\partial_r T_r^r = -\frac{1}{2} g^{\nu\nu} \partial_r g_{\nu\nu} (T_r^r - T_\nu^\nu). \quad (4.14)$$

Devemos agora fazer uma expansão no somatório em ν (ou seja, fazer $\nu = 0,1,2$ e 3) e se atentar ao fato de que quando $\nu = r$ haverá um cancelamento e já iremos desconsiderar essa parte

$$\partial_r T_r^r = -\frac{1}{2} g^{00} \partial_r g_{00} (T_r^r - T_0^0) - \frac{1}{2} g^{\theta\theta} \partial_r g_{\theta\theta} (T_r^r - T_\theta^\theta) - \frac{1}{2} g^{\phi\phi} \partial_r g_{\phi\phi} (T_r^r - T_\phi^\phi). \quad (4.15)$$

É possível encontrar uma relação entre $\partial_r g_{\theta\theta}$ e $\partial_r g_{\phi\phi}$ da seguinte maneira

$$g_{\phi\phi} = r^2 \sin^2 \theta = g_{\theta\theta} \sin^2 \theta, \quad (4.16)$$

$$g^{\phi\phi} = \frac{1}{\sin^2 \theta} = \frac{g^{\theta\theta}}{\sin^2 \theta}. \quad (4.17)$$

De forma que ao se utilizar das duas relações obtidas logo acima, descobrimos

$$\partial_r g_{\theta\theta} = \partial_r g_{\phi\phi}. \quad (4.18)$$

E também podemos tirar mais uma informação devido a simetria esférica do nosso problema, é a de que $T_\theta^\theta = T_\phi^\phi$. Reescrevendo nossa equação

$$\partial_r T_r^r = -\frac{1}{2} g^{00} \partial_r g_{00} (T_r^r - T_0^0) - g^{\theta\theta} \partial_r g_{\theta\theta} (T_r^r - T_\theta^\theta). \quad (4.19)$$

Pela métrica de Schwarzschild $g_{tt} = -g_{rr}^{-1}$, de forma que para preservá-lo devemos ter $T_r^r = T_0^0 = \rho$, em que ρ é uma densidade qualquer. Mas nesse primeiro momento, como estamos trabalhando na distribuição Gaussiana, será dada por 3.4. Assim, a equação 4.19 toma a seguinte forma

$$\partial_r \rho = -g^{\theta\theta} \partial_r g_{\theta\theta} (\rho - T_\theta^\theta). \quad (4.20)$$

Da mesma forma que utilizamos antes, precisamos lembrar que na métrica em que estamos trabalhando $g_{\theta\theta} = r^2$ e $g^{\theta\theta} = \frac{1}{r^2}$. Fazendo essa substituição e isolando T_θ^θ

$$T_\theta^\theta = P_\perp = \rho - \frac{r}{2} \partial_r \rho. \quad (4.21)$$

Em que P_\perp é a pressão tangencial. Pelo fato de que $P_r \neq P_\perp$, temos um fluido anisotrópico. Então, a primeira conclusão que podemos tirar sobre a pressão radial e a tangencial em uma distribuição gaussiana é que devido aos efeitos da não-comutatividade não temos uma pressão nula e a diferença entre as pressões tangencial e radial se torna nítida apenas em escalas próximas de $\sqrt{\theta}$. Voltando ao caso de um fluido perfeito a longas distâncias, como é possível ver no gráfico abaixo

Do gráfico 4.1 podemos ver que os efeitos da não-comutatividade na pressão tangencial (linha vermelha) e na pressão radial (linha verde) se tornam muito evidentes entre $\sqrt{\theta}$ e $3\sqrt{\theta}$. E voltando ao caso de um fluido perfeito, onde essa diferença já é totalmente desprezível, a partir de $r = 5\sqrt{\theta}$.

Podemos tentar dar uma justificativa ao fato de a pressão não ser nula quando $r = 0$ analisando a curvatura R. Para isso iremos precisar da equação de Einstein 2.52 em sua forma simplificada, multiplicando ambos os lados da equação por $g^{\mu\nu}$, da seguinte forma

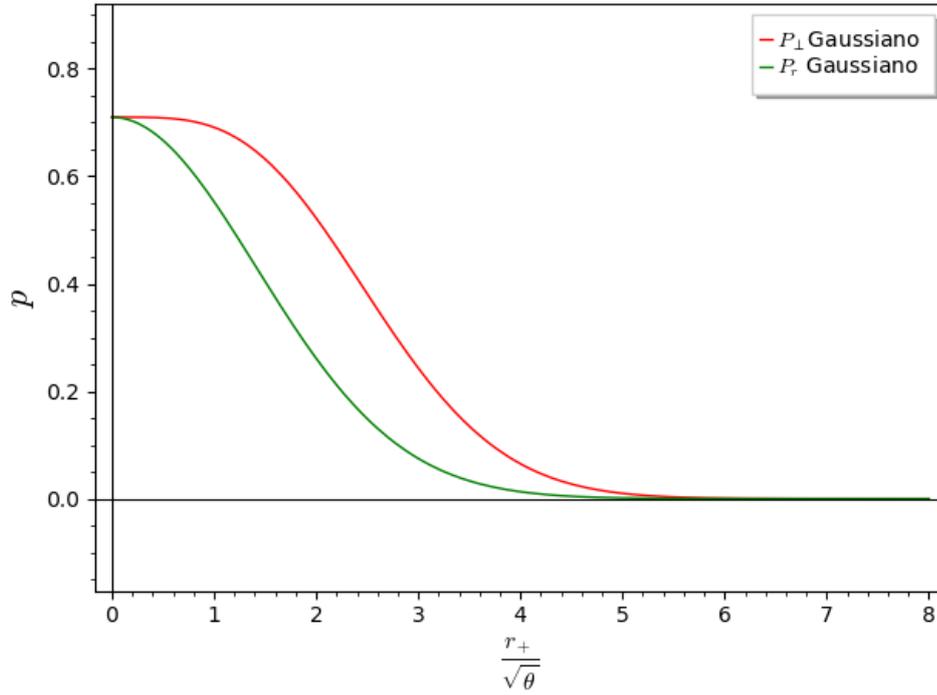


Figura 4.1: Pressão tangencial e radial no espaço-tempo não-comutativo em uma distribuição gaussiana. No eixo vertical temos a pressão e no eixo horizontal temos o raio do horizonte de eventos normalizado pelo comprimento mínimo $\sqrt{\theta}$

$$g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} R = \kappa g^{\mu\nu} T^{\mu\nu}. \quad (4.22)$$

O primeiro termo já sabemos que é o escalar de Ricci dado por 2.31, o segundo termo se torna uma delta de kronecker δ_{μ}^{μ} , que seu valor é 4, pois, estamos trabalhando em 4 dimensões. De forma que a equação toma a seguinte forma

$$\begin{aligned} R - \frac{1}{2} \delta_{\mu}^{\mu} R &= \kappa T, \\ R &= \kappa T. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Em que κ é dado por $8\pi G/c^4$ [16]. Fazendo uma expansão nos índices do tensor momento-energia e fazendo $G = c = 1$ ficamos assim

$$\begin{aligned} R &= 8\pi T, \\ R &= 8\pi(T_0^0 + T_r^r + T_{\theta}^{\theta} + T_{\phi}^{\phi}), \\ R &= 8\pi(\rho + p_r + p_{\perp} + p_{\perp}). \end{aligned} \quad (4.24)$$

Em grandes escalas, quando $r \gg \sqrt{\theta}$, a curvatura R vai ao infinito quando $r \rightarrow 0$ e assim obtemos a singularidade. Mas em um espaço-tempo não-comutativo isso não é

uma verdade. Na equação 4.24 quando substituimos p_r por ρ e p_\perp pela equação 4.21 e fazendo $r = 0$ obtemos o seguinte resultado [25]

$$R = \frac{4M}{\sqrt{\pi\theta^3}}. \quad (4.25)$$

Indicando que a curvatura no centro do buraco negro não é nula, como já esperado pelo gráfico 4.1. E pelo fato de a curvatura não ser nula, ser finita, no centro do buraco negro ocorre flutuações quânticas, e são essas flutuações que dão origem a pressão radial. E para $r \gg \sqrt{\theta}$, como a pressão radial e tangencial também tendem a zero nesse limite, R também tenderá a zero.

4.2 Distribuição de massa

Vimos no capítulo 2 que a métrica de um buraco negro do tipo Schwarzschild é dada por 2.59 [18]

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2. \quad (4.26)$$

Perceba que a parte angular, anteriormente denominada por $r^2 d\Omega^2$, foi ignorada porque a sua presença não irá afetar os cálculos que surgirem, nosso maior interesse está nos termos pertencentes à g_{tt} e g_{rr} .

A métrica mencionada logo acima representa o espaço-tempo de um buraco negro estático no vácuo e sem rotação e, de imediato, já podemos retirar uma informação dela, que são os valores dos raios críticos e da massa crítica para o caso de um espaço-tempo comutativo. Que são dados por

$$r_+^{(c)} = 2M_+ \quad \iff \quad M_+^{(c)} = \frac{r_+}{2}. \quad (4.27)$$

Em que a notação $r^{(c)}$ é para denotar quando estivermos tratando de alguma função em escalas comutativas, iremos adotar essa notação durante todo o trabalho, e $M_+^{(c)} = M^{(c)}(r_+)$. É importante destacar que coordenada temporal é definida no intervalo $-\infty < t < \infty$, a coordenada radial $0 < r < \infty$ e, não menos importante, a coordenada polar θ definida em $0 < \theta < \pi$ e a coordenada azimutal é definida em $0 < \phi < 2\pi$.

Com esses passos iniciais podemos avançar para o caso do espaço-tempo não-comutativo. Para isso nós precisamos relembrar a equação 3.8, que nos mostra como a massa está distribuída gaussianamente

$$m_{\theta G}(r) = \frac{2M}{\sqrt{\theta}} \gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\theta}\right). \quad (4.28)$$

E com essa expressão podemos reescrever a métrica para um espaço-tempo não-comutativo

$$ds^2 = - \left[1 - \frac{4}{r} \frac{M}{\sqrt{\theta}} \gamma \left(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\theta} \right) \right] dt^2 + \left[1 - \frac{4}{r} \frac{M}{\sqrt{\theta}} \gamma \left(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\theta} \right) \right]^{-1} dr^2. \quad (4.29)$$

É válido perceber também que ao se analisar na escala comutativa, quando $r \gg \sqrt{\theta}$, $\gamma \left(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\theta} \right) \rightarrow \Gamma \left(\frac{3}{2} \right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ voltamos a ter o caso de uma métrica comutativa.

E a primeira informação que podemos tirar da equação 4.29 é sobre o termo g_{00} . Ao resolver a equação $g_{00} = 0$ para r , podemos determinar se há um ou mais valores de r que satisfazem a condição, indicando a presença de um ou mais horizontes de eventos. Em espaços-tempos não-comutativos, isso pode levar à formação de múltiplos horizontes, como um horizonte interno e outro externo, dependendo dos valores de M . Ilustrado no seguinte gráfico

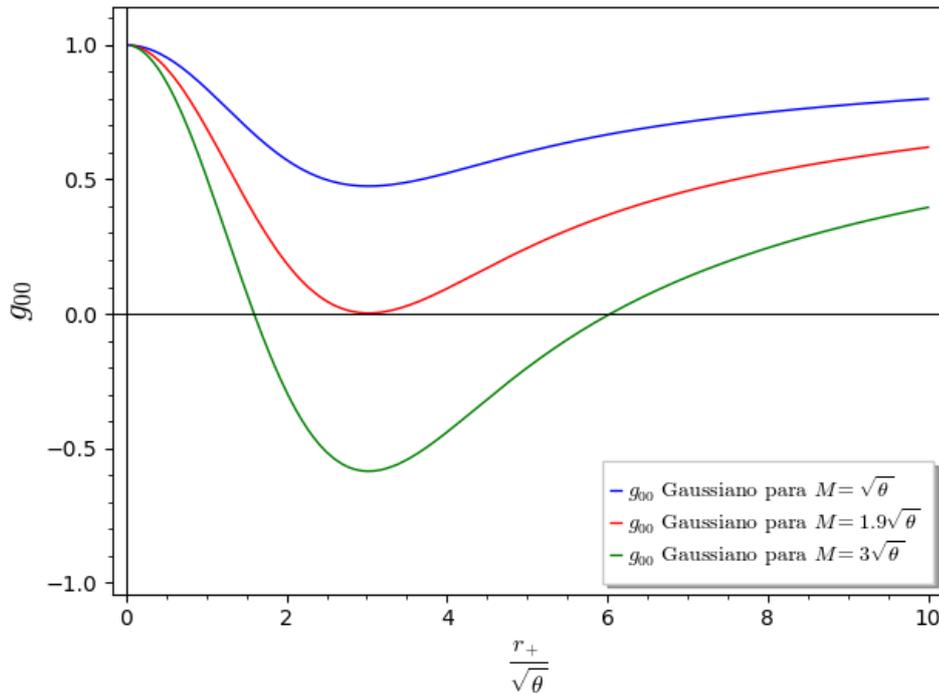


Figura 4.2: g_{00} em função de $\frac{r}{\sqrt{\theta}}$ para vários valores de M .

Do gráfico podemos ver que para valores de $M < 1.9\sqrt{\theta}$, representado pela linha azul, não há a formação de horizontes de eventos, logo não é possível a formação de um buraco negro para esses valores de massa. Para $M = 1.9\sqrt{\theta}$, representado pela linha vermelha, há a formação de um horizonte de evento degenerado que corresponde a situação limite [35] que chama de buraco negro extremo e para $M > 1.9\sqrt{\theta}$ há a formação de dois horizontes de eventos. Uma outra interpretação possível para esse gráfico é que as curvas que se formam podem ser interpretado como poço de potencial [14] e com isso podemos

saber se um determinado corpo irá orbitar o buraco negro ou não. perceba que para os três casos o corpo que se aproximar desse buraco negro irá orbita-lo, mas para o caso de $M = \sqrt{\theta}$ o corpo precisará de bem pouca energia para "se soltar" do campo gravitacional, enquanto que para $M = 3\sqrt{\theta}$ o poço de potencial é bem mais profundo indicando que o corpo precisará de bem mais energia para romper essa ligação gravitacional.

Voltando a falar um pouco da métrica 4.29, é válido salientar que tal elemento de linha foi obtido fazendo-se a transição $M \rightarrow m_{\theta G}$ e da mesma maneira que obtivemos os valores do raio e do massa comutativa, podemos obter as equações para o caso não-comutativo. O raio e massa não-comutativa têm a seguinte forma

$$r_+ = \frac{4M_+}{\sqrt{\pi}} \gamma \left(\frac{3}{2}, \frac{r_+^2}{4\theta} \right) \iff M_+ = \frac{r_+ \sqrt{\pi}}{4} \frac{1}{\gamma \left(\frac{3}{2}, \frac{r_+^2}{4\theta} \right)}. \quad (4.30)$$

Repare que se tomarmos o limite $r_+ \rightarrow 0$ a massa na expressão 4.30 não vai para zero e uma vez que se considerarmos que tal objeto "evapora", no sentido de emitir radiação, interpretamos que não existe um limite na evaporação do buraco negro de Schwarzschild. O valor M_{min} que representa o fim da evaporação pode ser calculado fazendo-se $r_+ \rightarrow 0$ na equação 4.30, que nos retorna

$$M_{min} = \frac{3\sqrt{\pi}\theta^{\frac{3}{2}}}{r_+^2}. \quad (4.31)$$

No gráfico 4.3 é representado o comportamento da massa para ambos os casos, comutativo e não-comutativo, e o parâmetro $\sqrt{\theta}$ que aparece no eixo horizontal dividindo r_+ é apenas uma normalização, e tal normalização aparecerá em todos os gráficos. Uma característica importante de gráfico é que quando estamos analisando para valores muito pequenos de r_+ há uma discrepância enorme entre as curvas da massa comutativa e a não-comutativa, enquanto que a comutativa vai a zero, a não-comutativa explode atingindo valores enormes. E quando analisamos para valores muito grandes de r_+ a massa não não-comutativa converge para o caso comutativo. Tal comportamento está de acordo com o nosso arcabouço teórico, que prevê que em escalas próximas à $\sqrt{\theta}$, onde os efeitos quânticas aparecem, há uma divergência entre as massas comutativa e não-comutativa e há longas distância $\frac{r_+}{\sqrt{\theta}} \rightarrow \infty$ os efeitos quânticos são inexistentes e as duas massas se igualam.

4.3 Temperatura de Hawking

Vamos agora calcular a temperatura de Hawking para o buraco negro, utilizando-se de 2.102

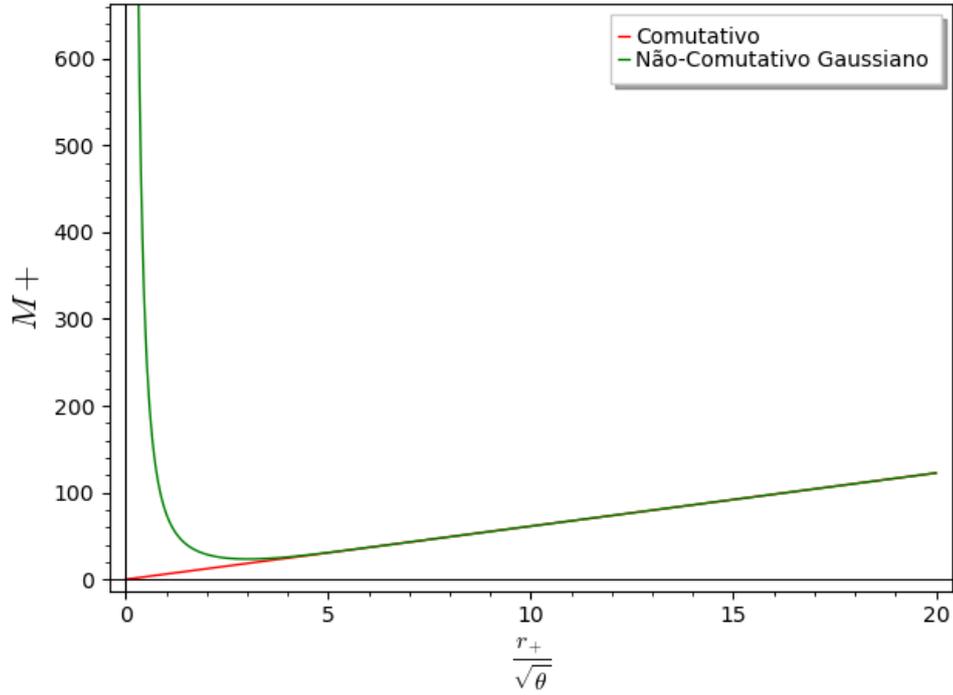


Figura 4.3: Massa nos casos comutativo e não-comutativo. No eixo vertical temos a massa e no eixo horizontal temos o raio do horizonte de eventos normalizado pelo comprimento de escala mínimo $\sqrt{\theta}$.

$$T_H = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{dg^{rr}}{dr} \right) \Big|_{r=r_+}. \quad (4.32)$$

Sendo que agora devemos utilizar a métrica no espaço-tempo não-comutativo dado por 4.29, vamos destacar o termo g^{rr} e calcular sua derivada

$$g^{rr} = \left[1 - \frac{4M}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{r} \gamma \left(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\theta} \right) \right],$$

$$\frac{dg^{rr}}{dr} \Big|_{r=r_+} = \frac{4M_+}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{1}{r_+^2} \gamma \left(\frac{3}{2}, \frac{r_+^2}{4\theta} \right) - \frac{1}{r_+} \gamma' \left(\frac{3}{2}, \frac{r_+^2}{4\theta} \right) \right]. \quad (4.33)$$

Em que $\gamma' \left(\frac{3}{2}, \frac{r_+^2}{4\theta} \right)$ representa a derivada da função gamma incompleta inferior em relação à r_+ . Substituindo essa derivada, T_H fica assim

$$T_H = \frac{M_+}{\pi^{\frac{3}{2}}} \left[\frac{1}{r_+^2} \gamma \left(\frac{3}{2}, \frac{r_+^2}{4\theta} \right) - \frac{1}{r_+} \gamma' \left(\frac{3}{2}, \frac{r_+^2}{4\theta} \right) \right]. \quad (4.34)$$

Porém também temos uma relação para M_+ dado por 4.30, podemos substituir e finalmente encontrar a expressão para a temperatura Hawking

$$T_H = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{r_+} - \frac{\gamma' \left(\frac{3}{2}, \frac{r_+^2}{4\theta} \right)}{\gamma \left(\frac{3}{2}, \frac{r_+^2}{4\theta} \right)} \right]. \quad (4.35)$$

O resultado 4.35 foi obtida por [35], [34], [25] utilizando abordagens diferentes, em que não consideraram a interação de campos ou o método abordado aqui. O que mostra que o método de Hamilton-Jacobi é bastante formidável e todo desenvolvimento matemático é válido.

Para verificar se nosso resultado está correto devemos analisar nosso resultado 4.35 nos devolve o caso da temperatura Hawking no espaço-tempo comutativo, que já é um resultado bastante conhecido na literatura. Em outras palavras, devemos analisar $\frac{r_{\pm}}{\sqrt{\theta}} \rightarrow \infty$, que é quando consideramos uma distância radial muito maior que o comprimento mínimo de discretização $\sqrt{\theta}$ e dessa forma os efeitos quânticos não são mais perceptíveis. Como discutido no Apêndice, quando consideramos $\frac{r_{\pm}^2}{4\theta} \rightarrow \infty$, ao se considerar o limite assintótico, voltamos a ter uma função gamma completa

Fazendo essa substituição e lembrando que, nesse caso comutativo, $\gamma'(\frac{3}{2}, \infty) = \Gamma'(\frac{3}{2}) = 0$

$$T_H^{(c)} = \frac{1}{4\pi r_+}. \quad (4.36)$$

Que ao se substituir pelo raio de schwarzschild

$$T_H^{(c)} = \frac{1}{8\pi M}. \quad (4.37)$$

Que pode ser verificado em [24].

O primeiro aspecto importante a se observar no gráfico 4.4 é que em escalas próximas a $\sqrt{\theta}$ o casos comutativo e não-comutativo divergem, como já esperado devido aos efeitos quânticos presentes nessa escala. Enquanto que no caso não-comutativo o buraco negro consegue atingir a temperatura zero, próximo $r = 3\sqrt{\theta}$, atinge sua temperatura máxima em aproximadamente $r = 4.75\sqrt{\theta}$ e começa a decair assintoticamente para o zero a medida que aumenta a distância radial, o comutativo diverge para temperatura extremamente altas em distâncias próximas a $\sqrt{\theta}$. Em uma distância radial de aproximadamente $5.75\sqrt{\theta}$ os efeitos da não-comutatividade já se tornam inexistentes e ocorre a convergência para o caso comutativo e para $r < 3\sqrt{\theta}$ não há temperatura definida, uma vez que estaríamos trabalhando com temperatura negativa, o que não faz sentido.

4.4 Entropia

Podemos calcular a entropia a partir da primeira lei da termodinâmica

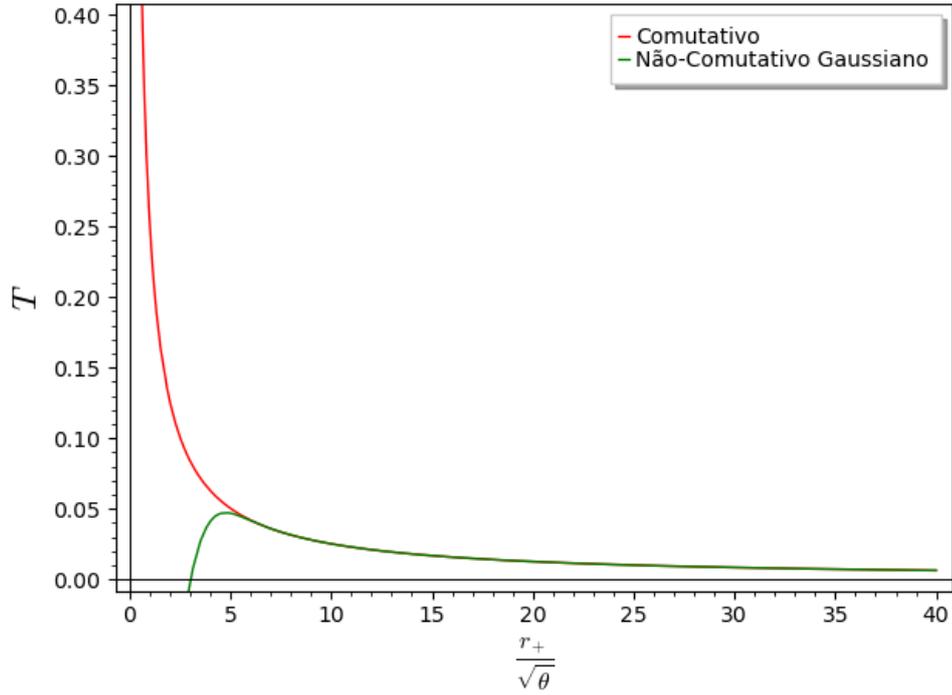


Figura 4.4: Temperatura Hawking nos casos comutativo e não-comutativo Gaussiano. No eixo vertical temos a temperatura de Hawking e no eixo horizontal temos o raio do horizonte de eventos normalizado pelo comprimento de escala mínimo $\sqrt{\theta}$.

$$dM_+ = T_H dS_+. \quad (4.38)$$

Na realidade sabemos que a primeira lei da termodinâmica é dada por $dQ = TdS$, e nossa energia é dada por $E = Mc^2$. Sendo que desde o início desse trabalho estamos adotando $c = G = 1$, o que nos retorna $E = M$. É por isso que é possível fazer a troca de dQ por dM sem problema e além de que esse é um resultado muito utilizado na termodinâmica de buracos negros, poderia usa-lo diretamente.

A equação 4.38 nos leva a

$$\Delta S_+ = \int \frac{dM_+}{T_H} = \int_{r_0}^{r_+} \frac{1}{T_H} \left(\frac{\partial M_+}{\partial r'_+} \right) dr'_+. \quad (4.39)$$

Precisamos calcular $\partial M_+ / \partial r_+$, para facilitar nossas contas iremos utilizar a seguinte notação $\gamma \equiv \gamma(\frac{3}{2}, \frac{r_+^2}{4\theta})$ e tomemos $r_0 = 0$

$$\begin{aligned} M_+ &= \frac{r_+ \sqrt{\pi}}{4} \frac{1}{\gamma}, \\ \frac{\partial M_+}{\partial r_+} &= \frac{\sqrt{\pi}}{4} \left(\frac{\gamma - r_+ \gamma'}{\gamma^2} \right). \end{aligned} \quad (4.40)$$

Substituindo a temperatura de Hawking 4.35 juntamente com a derivada de M_+ ficamos assim

$$S_+ = \int_0^{r_+} 4\pi \left[\frac{1}{r'_+} - \frac{\gamma'}{\gamma} \right]^{-1} \left[\frac{\sqrt{\pi}}{4} \left(\frac{\gamma - r'_+ \gamma'}{\gamma^2} \right) \right] dr'_+. \quad (4.41)$$

Fazendo-se alguns ajustes algébricos e voltando com a notação completa da função gamma incompleta inferior, chegaremos à

$$S_+ = \pi^{\frac{3}{2}} \int_0^{r_+} \frac{r'_+}{\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r'_+{}^2}{4\theta}\right)} dr'_+. \quad (4.42)$$

Um primeiro ponto a se destacar da equação da entropia 4.42 é que apesar de tamanho compacto, ela não é uma integral trivial. De modo que para conseguir um resultado é necessário utilizar uma aproximação para a função gamma inferior incompleta. O cálculo desenvolvido será mais detalhado no tópico 4.7 na energia livre, em que tal aproximação é detalhada no apêndice deste trabalho.

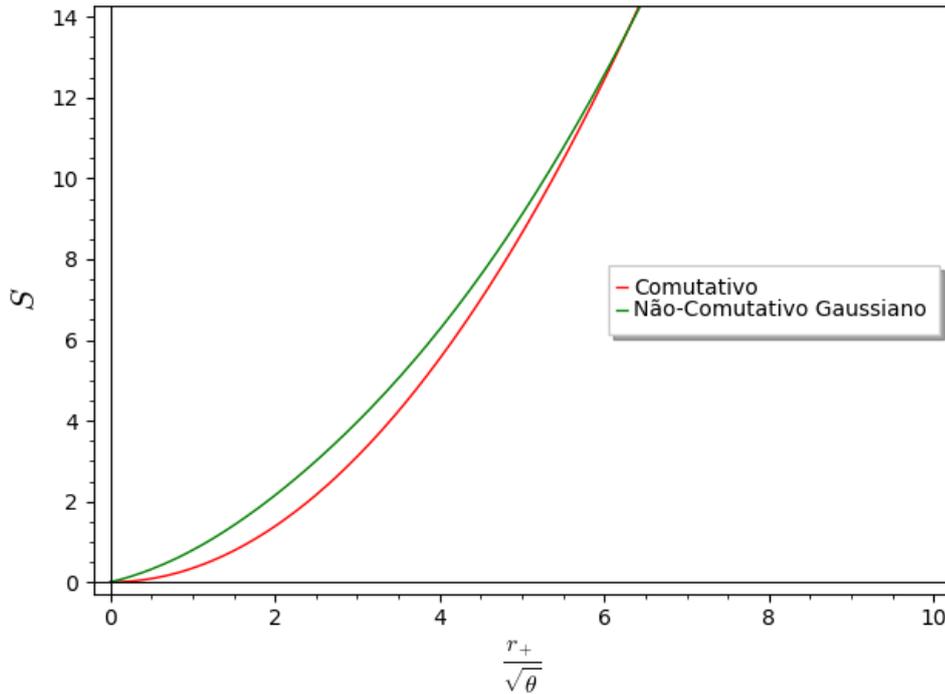


Figura 4.5: Entropia nos casos comutativo e não-comutativo. No eixo vertical temos a Entropia e no eixo horizontal temos o raio do horizonte de eventos normalizado pelo comprimento de escala mínimo $\sqrt{\theta}$.

Do gráfico 4.5, a primeira informação imediata que podemos retirar dela é que a entropia é uma função sempre crescente. Os efeitos da não-comutatividade se torna bem evidente entre 0 e $5\sqrt{\theta}$ e a partir de $r = 6\sqrt{\theta}$ há a convergência entre os casos comutativo e não-comutativo, significando que a partir dessa distância radial os efeitos quânticos não são mais evidentes.

Para averiguarmos se este resultado está consistente devemos analisá-la no limite comutativo, ao substituir a função gamma incompleta inferior por $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, nós ficamos com a seguinte expressão

$$S_+ = \pi r_+^2. \quad (4.43)$$

Que é justamente a lei de área de Bekestein [34].

4.5 Capacidade calorífica

Seguimos o estudo das propriedades termodinâmicas do buraco negro com o cálculo da capacidade calorífica, podemos encontrá-la da seguinte forma

$$C_+ = \left(\frac{\partial E}{\partial T_H} \right). \quad (4.44)$$

Mas usando o mesmo artifício que foi utilizado na entropia, podemos modificar a equação logo acima para que ela tenha a seguinte forma

$$C_+ = \frac{\partial M_+}{\partial T_H} = \frac{\left(\frac{\partial M_+}{\partial r_+} \right)}{\left(\frac{\partial T_H}{\partial r_+} \right)} = \left(\frac{\partial M_+}{\partial r_+} \right) \left(\frac{\partial T_H}{\partial r_+} \right)^{-1}. \quad (4.45)$$

Porém já temos uma relação para $\frac{\partial M_+}{\partial r_+}$ e é dado por 4.40, precisamos agora calcular a expressão $\frac{\partial T_H}{\partial r_+}$. Novamente, para facilitar, irei utilizar $\gamma \equiv \gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r_+^2}{4\theta}\right)$

$$\begin{aligned} T_H &= \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{r_+} - \frac{\gamma'}{\gamma} \right], \\ \frac{\partial T_H}{\partial r_+} &= \frac{1}{4\pi} \left[-\frac{1}{r_+^2} - \frac{\gamma''\gamma - \gamma'^2}{\gamma^2} \right]. \end{aligned} \quad (4.46)$$

Com esses dados podemos finalmente encontrar uma expressão para C_+

$$C_+ = \pi^{\frac{3}{2}} \left[\frac{\gamma - r_+\gamma'}{\gamma^2} \right] \left[-\frac{1}{r_+^2} - \frac{\gamma''\gamma - \gamma'^2}{\gamma^2} \right]^{-1}. \quad (4.47)$$

colocando a expressão em um formato mais adequado

$$C_+ = \pi^{\frac{3}{2}} \left[(\gamma - r_+\gamma') \cdot \frac{r_+^2}{(-\gamma^2 - r_+^2\gamma''\gamma - \gamma'^2r_+^2)} \right]. \quad (4.48)$$

Esse resultado está de acordo com [26].

Podemos verificar nosso resultado analisando no limite comutativo fazendo $\frac{r_+}{\sqrt{\theta}} \rightarrow \infty$, que terá como consequência $\gamma'' = \gamma' = 0$, uma vez que $\gamma(\frac{3}{2}, \infty) \rightarrow \Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Obteremos o seguinte resultado

$$C_+^{(c)} = -2\pi r_+^2. \quad (4.49)$$

Este resultado nos indica que a capacidade calorífica do buraco negro no espaço-tempo comutativo é sempre negativa, o que significa dizer que à medida que perde massa sua temperatura aumenta e que a mesma é termodinamicamente instável [22] e também significa que transições de fase devem ocorrer.

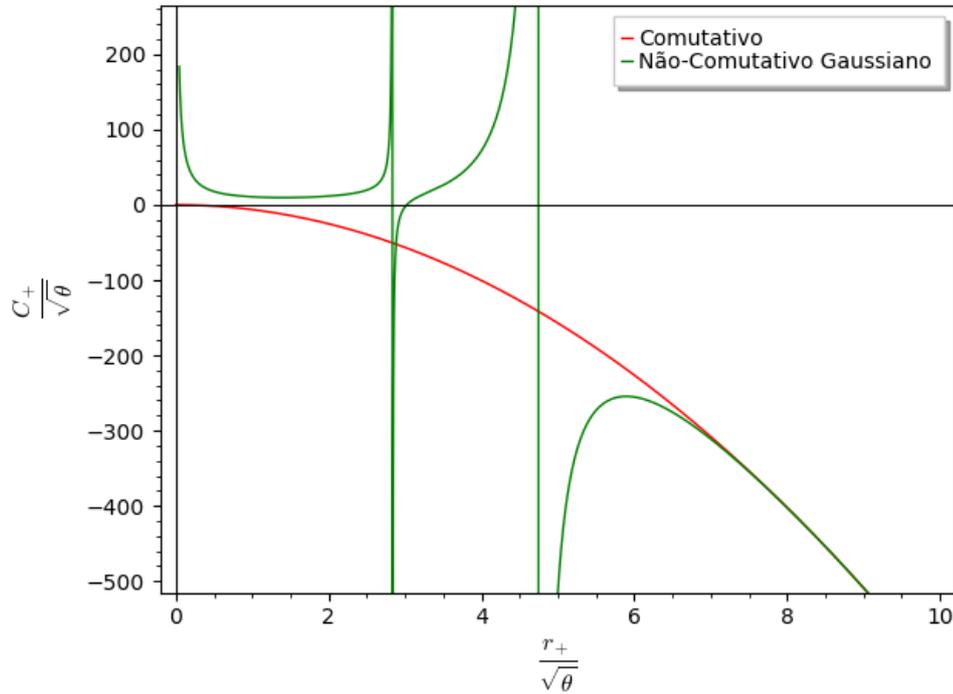


Figura 4.6: Capacidade calorífica nos casos comutativo e não-comutativo Gaussiano. No eixo vertical temos a capacidade térmica normalizado pelo comprimento de escala mínimo $\sqrt{\theta}$ e no eixo horizontal temos o raio do horizonte de eventos também normalizado pelo comprimento de escala mínimo $\sqrt{\theta}$.

De maneira geral nós podemos dizer que a capacidade térmica determina a estabilidade termodinâmica do buraco negro. Para $C > 0$, o buraco negro é localmente estável e para $C < 0$ o mesmo é considerado localmente instável [22]. Para começarmos nossa análise do gráfico vemos na equação 4.45 que qualquer zero da função $\partial T_H / \partial r_+$ implica em um polo para a capacidade térmica e nos diz o momento em que há um troca de sinal para a capacidade térmica, que no nosso gráfico é representado pelas assíntotas em $r_+ \approx 2.9\sqrt{\theta}$ e $r_+ \approx 4.5\sqrt{\theta}$ para o espaço-tempo não-comutativo na distribuição Gaussiana representado pela linha verde, no comutativo, linha vermelha, não há polos. Um outro ponto importante para análise é quando $C = 0$, enquanto que no caso comutativo é previsto que ele consiga atingir esse ponto, ou seja, ele para de trocar energia, no espaço-tempo não comutativo Gaussiano a capacidade aumenta indefinidamente sua

capacidade térmica. Uma interpretação possível para esse acontecimento é que, em linhas gerais a capacidade térmica também está relacionada com a quantidade de energia que deve ser adicionado ou retirado ao sistema para variar sua temperatura e a temperatura está relacionada ao horizonte de eventos como podemos ver 4.35, o que vemos no gráfico 4.6 é que seria necessário uma transferência de energia infinita para reduzir o raio do horizonte de eventos a zero, o que seria impossível. E para distância radiais de $r_+ \approx 7\sqrt{\theta}$ os efeitos da não-comutatividade deixam de existir e passa a convergir para o espaço-tempo comutativo.

4.6 Energia interna

Vamos agora começar a investigar o comportamento da energia interna a fim de entendermos com mais profundidade sobre as propriedades termodinâmicas do buraco negro esférico de Schwarzschild. Começamos investigando a energia interna no espaço-tempo comutativo e posteriormente iremos encontrar a energia interna no espaço-tempo não-comutativo na distribuição Gaussiana. Iremos prosseguir com o mesmo procedimento que está na referência [6], adaptando o que for necessário.

Vamos considerar uma cavidade esférica de raio finito R , com $R > r_+$. Fora do horizonte de eventos a temperatura é dada por

$$T^{(c)} = \frac{T_H^{(c)}}{\sqrt{g_{tt}(R)}}. \quad (4.50)$$

Em que g_{tt} representa a componente temporal do tensor métrico dado em 4.26, sendo que agora devemos utilizá-lo em função do novo raio R . A temperatura T em 4.50 é dada em termos da temperatura de Hawking no espaço-tempo comutativo ponderado pelo fator de Tolman [15] o qual leva em consideração o desvio para o vermelho ao afastar-se do horizonte de eventos. Como o sistema dentro da cavidade R consiste apenas do buraco negro esférico, variações de energia estão associadas a variações na massa da mesma, de forma que podemos escrever a primeira lei da termodinâmica da seguinte forma $dE = TdS$, que resulta em

$$E^{(c)} = M_0 + \int_{S_0}^{S_+} T^{(c)} dS'_+ = M_0 + \int_{r_0}^{r_+} T^{(c)}(r'_+, R) \left(\frac{\partial S'_+}{\partial r'_+} \right) dr'_+. \quad (4.51)$$

A equação descrita logo acima é válida considerando-se as condições de contorno $E(r_0) = M_0$ e $S(r_0) = S_0$. Ou seja, o que estamos considerando é que a temperatura no horizonte de eventos é dada por 4.36

$$T_H = \frac{1}{4\pi r_+}. \quad (4.52)$$

e que a entropia é calculada por meio de 4.43

$$S_+ = \pi(r_+^2 - r_0^2). \quad (4.53)$$

Na equação de entropia citada, é considerado como condição inicial que S_0 vale e ,por isso, pode-se obter a entropia dada pela equação 4.43 já que $\Delta S_+ = S_+ - S_0 = S_+ - 0 = S_+$, mas tal condição não é mais necessária. De maneira direta, como estamos interessado em encontrar uma expressão para a energia interna comutativa, iremos utilizar todos os resultados obtidos também no espaço-tempo comutativo. E de forma análoga, quando for para obter a expressão para energia interna não-comutativa iremos utilizar todos os resultados obtidos no espaço-tempo não-comutativo.

Precisamos calcular $\partial S_+/\partial r_+$ para poder substituir na expressão

$$S_+ = \pi(r_+^2 - r_0^2) \quad \rightarrow \quad \frac{\partial S_+}{\partial r_+} = 2\pi r_+. \quad (4.54)$$

Substituindo

$$E^{(c)} = M_0 + 2\pi \int_{r_0}^{r_+} T^{(c)}(r'_+, R)r'_+ dr'_+. \quad (4.55)$$

Precisamos encontrar uma expressão para $T^{(c)}$, para isso iremos substituir $T_H^{(c)}$ na expressão. Mas antes vamos explicitar a expressão de $g_{tt}(R)$ para o caso comutativo

$$g_{tt}(R) = 1 - \frac{2M_+}{R}. \quad (4.56)$$

Vamos reescrever $g_{tt}(R)$ substituindo a expressão para a massa comutativa, da seguinte maneira

$$g_{tt}(R) = 1 - \frac{2}{R} \frac{r_+}{2} \quad \rightarrow \quad g_{tt}(R) = 1 - \frac{r_+}{R}. \quad (4.57)$$

Substituindo $T_H^{(c)}$ e a nova expressão de $g_{tt}(R)$ em 4.50 podemos encontrar uma expressão para ele

$$T^{(c)} = \frac{1}{4\pi r_+} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r_+}{R}}}. \quad (4.58)$$

Colocando-a na equação da energia interna

$$E^{(c)} = M_0 + 2\pi \int_{r_0}^{r_+} \frac{1}{4\pi r'_+} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r'_+}{R}}} r'_+ dr'_+. \quad (4.59)$$

e, finalmente, para resolver essa integral é necessário fazer uma substituição simples $u = 1 - \frac{r'_+}{R}$ e desenvolvê-la, obteremos a seguinte expressão

$$E^{(c)} = M_0 - R \left[\sqrt{1 - \frac{r_+}{R}} - \sqrt{1 - \frac{r_0}{R}} \right]. \quad (4.60)$$

Repare que se $r_0 < r_+$, a contribuição para M_0 no lado direito de 4.60 é positiva. Como r_0 representa o valor inicial do raio de horizonte de eventos, a energia interna comutativa aumenta com o aumento do raio e, analogamente, a energia interna comutativa diminui com a diminuição do raio.

Agora que já possuímos a expressão da energia interna comutativa, vamos desenvolver os cálculos para encontrar a energia interna no espaço-tempo não-comutativo na distribuição Gaussiana. O passo a passo a ser desenvolvido aqui é idêntico ao feito anteriormente, sendo que agora nós devemos utilizar os resultados obtidos no espaço-tempo não-comutativo.

Consideremos uma cavidade esférica de raio R , com $R > r_+$, e a temperatura é dada por

$$T = \frac{T_H}{\sqrt{g_{tt}(R)}}. \quad (4.61)$$

Repare que agora não temos mais a simbologia (c) para indicar o espaço-tempo comutativo. Vamos explicitar $g_{tt}(R)$ para o caso não-comutativo Gaussiano

$$g_{tt}(R) = 1 - \frac{4M_+}{R\sqrt{\pi}} \gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{R^2}{4\theta}\right). \quad (4.62)$$

Mas podemos reescrever substituindo M_+ por sua expressão dada por 4.30. Irei adotar a seguinte notação por praticidade: $\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r_+^2}{4\theta}\right) \equiv \gamma(r_+)$ e $\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{R^2}{4\theta}\right) \equiv \gamma(R)$

$$\begin{aligned} g_{tt}(R) &= 1 - \frac{4}{R\sqrt{\pi}} \frac{r_+\sqrt{\pi}}{4} \frac{\gamma(R)}{\gamma(r_+)}, \\ g_{tt}(R) &= 1 - \frac{r_+}{R} \frac{\gamma(R)}{\gamma(r_+)}. \end{aligned} \quad (4.63)$$

Substituindo a temperatura de Hawking no espaço-tempo não-comutativo dado por 4.35 e essa nova expressão para $g_{tt}(R)$, encontramos uma expressão para T

$$T = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{r_+} - \frac{\gamma'(r_+)}{\gamma(r_+)} \right] \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r_+}{R} \frac{\gamma(R)}{\gamma(r_+)}}}. \quad (4.64)$$

Para seguir adiante precisamos lembrar da equação de como encontrar a energia interna

$$E = M_0 + \int_{r_0}^{r_+} T(r'_+, R) \left(\frac{\partial S'_+}{\partial r'_+} \right) dr'_+. \quad (4.65)$$

Ou seja, ainda precisamos encontrar uma expressão para a derivada parcial da entropia. Para isso é necessário utilizar a equação 4.42 e a regra da cadeia para derivadas, da seguinte maneira

$$dS'_+ = \left(\frac{\partial S'_+}{\partial r'_+} \right) dr'_+ = \pi^{\frac{3}{2}} \frac{r'_+}{\gamma(r'_+)} dr'_+. \quad (4.66)$$

Com todos esses dados podemos encontrar a expressão para a energia interna

$$E = M_0 + \frac{\sqrt{\pi}}{4} \int_{r_0}^{r_+} \left[\frac{1}{\gamma(r'_+)} - \frac{\gamma'(r'_+)r'_+}{\gamma^2(r'_+)} \right] \frac{dr'_+}{\sqrt{1 - \frac{r'_+ \gamma(R)}{R \gamma(r'_+)}}}. \quad (4.67)$$

Agora nosso problema é resolver essa integral, mas "atacá-la" diretamente não é uma boa ideia, pois, contém muitos termos dependentes de r'_+ . Precisamos deixar ela equivalentemente menor para conseguir obter a expressão. Para isso, basta ver que o termo entre colchetes pode ser reescrito em forma de derivada

$$\frac{d}{dr'_+} \left(\frac{r'_+}{\gamma(r'_+)} \right) = \frac{\gamma(r'_+) - \gamma'(r'_+)r'_+}{\gamma^2(r'_+)} = \frac{1}{\gamma(r'_+)} - \frac{\gamma'(r'_+)r'_+}{\gamma^2(r'_+)}. \quad (4.68)$$

Reescrevendo em termos dessa derivada

$$E = M_0 + \frac{\sqrt{\pi}}{4} \int_{r_0}^{r_+} \frac{d}{dr'_+} \left(\frac{r'_+}{\gamma(r'_+)} \right) \frac{dr'_+}{\sqrt{1 - \frac{r'_+ \gamma(R)}{R \gamma(r'_+)}}}. \quad (4.69)$$

Para conseguir ir adiante é necessário definir uma nova função P de forma que $P \equiv P(r'_+) = \frac{r'_+}{\gamma(r'_+)}$ e lembrar de usar a seguinte regra da cadeia quando for necessário $dP = \frac{dP}{dr'_+} dr'_+$. Definindo essa nova função e praticando um pouco de álgebra chegaremos a seguinte expressão para energia interna não-comutativa

$$E = M_0 + \frac{\sqrt{\pi}R}{2\gamma(R)} \left[\left(1 - \frac{\gamma(R)}{R} \frac{r_0}{\gamma(r_0)} \right)^{\frac{1}{2}} - \left(1 - \frac{\gamma(R)}{R} \frac{r_+}{\gamma(r_+)} \right)^{\frac{1}{2}} \right]. \quad (4.70)$$

Os resultados mostrados no gráficos 4.7 ilustram que há uma grande diferença de comportamento para ambas as energia em distâncias próximas à $r_+ \approx 1.5\sqrt{\theta}$. Enquanto que no caso comutativo a energia interna do buraco negro pode atingir o valor nulo, quando a não-comutatividade do espaço-tempo é considerada, vemos que a energia interna do sistema não pode ser nulo, mas atinge um determinado valor mínimo em $r_+ \approx 2.5\sqrt{\theta}$. A diferença entre as duas curvas é significativa até meados de $r_+ \approx 4.5\sqrt{\theta}$, mostrando que a não-comutatividade influencia o comportamento termodinâmico do sistema em toda a escala do espaço-tempo da ordem de $5\sqrt{\theta}$ e como neste intervalo os valores percorridos pela

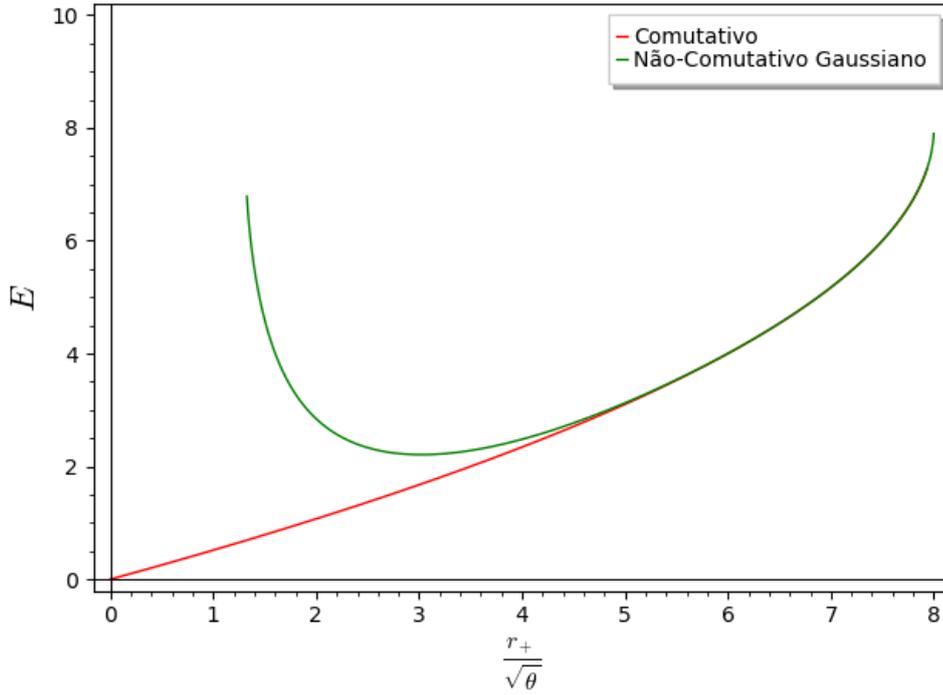


Figura 4.7: Energia interna nos casos comutativo e não-comutativo Gaussiano. No eixo vertical temos a energia interna e no eixo horizontal temos o raio do horizonte de eventos normalizado pelo comprimento de escala mínimo $\sqrt{\theta}$. Para a plotagem do gráfico foi feito $M_0 = 0$ e $r_0 = 0$.

linha verde do espaço-tempo não-comutativo são sempre maiores que os valores percorridos pela linha vermelha do espaço-tempo comutativo, é possível notar que numa escala até uma ordem de grandeza do comprimento de Planck, o sistema é mais energético do que se esperava quando não havia consideração dos efeitos de não comutatividade do espaço-tempo.

4.7 Energia Livre

Vamos dar início ao estudo da energia livre do buraco negro no espaço-tempo não-comutativo, comecemos pela energia livre comutativa $F^{(c)}$. Uma vez que sabemos a energia interna comutativa (4.60) podemos calcular a energia livre por meio de [6]

$$F^{(c)} = E^{(c)}(r_+, R) - T^{(c)} S_+^{(c)}. \quad (4.71)$$

Entretanto já possuímos cada um dos componentes dessa equação, que são as equações 4.70, 4.58 e 4.53. Basta fazer uma substituição simples e algumas manipulações algébricas que encontraremos a seguinte expressão

$$F^{(c)} = M_0 + R \left[\sqrt{1 - \frac{r_0}{R}} - \sqrt{1 - \frac{r_+}{R}} - \frac{1}{4r_+R} \frac{(r_+^2 - r_0^2)}{\sqrt{1 - \frac{r_+}{R}}} \right]. \quad (4.72)$$

Essa é a equação da energia livre no espaço-tempo comutativo.

Para encontrar a energia livre no espaço-tempo não-comutativo, basta utilizar a mesma relação que antes

$$F = E(r_+, R) - TS_+. \quad (4.73)$$

Vemos que precisamos calcular a entropia do sistema, dado por 4.42. Como dito anteriormente, essa não é uma integração simples, o truque é usar uma aproximação para a função gamma apresentada no apêndice. De forma que a integral da entropia pode ser calculada usando-se a expansão assintótica para a função gamma, da seguinte maneira

$$\gamma\left(\frac{3}{2}, x\right) \approx \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left[1 - e^{-x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{(1-2k)/2}}{\Gamma(\frac{3}{2} - k)} \right] \approx \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left[1 - \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}/2} e^{-x} \right]. \quad (4.74)$$

Na aproximação acima usamos a expansão em menor ordem apenas, com $k = 0$, e no nosso caso o x é $\frac{r_+^2}{4\theta}$ e podemos reescrever a integral como

$$\int_{r_0}^{r_+} \frac{r'_+}{\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r'^2_+}{4\theta}\right)} dr'_+ = \int_{r_0}^{r_+} \frac{r'_+}{\frac{\sqrt{\pi}}{2} \left[1 - \frac{r'_+}{\sqrt{\pi}\sqrt{\theta}} e^{-\frac{r'^2_+}{4\theta}} \right]} dr'_+. \quad (4.75)$$

De modo que resolvendo essa integral e considerando um número suficiente de termos podemos chegar a seguinte expressão

$$S_+ = \frac{r_+^2 - r_0^2}{\sqrt{\pi}} + \frac{4\theta}{\sqrt{\pi}} \left[erf\left(\frac{r_+}{2\sqrt{\theta}}\right) - erf\left(\frac{r_0}{2\sqrt{\theta}}\right) \right] - \frac{4\sqrt{\theta}}{\pi} \left[r_+ e^{-\frac{r_+^2}{4\theta}} - r_0 e^{-\frac{r_0^2}{4\theta}} \right]. \quad (4.76)$$

Em que $erf\left(\frac{r_+}{2\sqrt{\theta}}\right)$ é a função erro. De forma que podemos escrever a equação da energia livre como

$$F = E - \frac{\sqrt{\pi}}{4} \left[\frac{1}{r_+} - \frac{\gamma'(r_+)}{\gamma(r_+)} \right] \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r_+ \gamma(R)}{R \gamma(r_+)}}} \cdot \left[\frac{r_+^2 - r_0^2}{\sqrt{\pi}} + \frac{4\theta}{\sqrt{\pi}} \left[erf\left(\frac{r_+}{2\sqrt{\theta}}\right) - erf\left(\frac{r_0}{2\sqrt{\theta}}\right) \right] - \frac{4\sqrt{\theta}}{\pi} \left[r_+ e^{-\frac{r_+^2}{4\theta}} - r_0 e^{-\frac{r_0^2}{4\theta}} \right] \right]. \quad (4.77)$$

Para a equação ficar completa vamos substituir também a expressão para energia interna dado por 4.70

$$\begin{aligned}
 F = & M_0 + \frac{\sqrt{\pi}R}{2\gamma(R)} \left[\left(1 - \frac{\gamma(R)}{R} \frac{r_0}{\gamma(r_0)} \right)^{\frac{1}{2}} - \left(1 - \frac{\gamma(R)}{R} \frac{r_+}{\gamma(r_+)} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \\
 & - \frac{\sqrt{\pi}}{4} \left[\frac{1}{r_+} - \frac{\gamma'(r_+)}{\gamma(r_+)} \right] \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r_+}{R} \frac{\gamma(R)}{\gamma(r_+)}}} \\
 & \cdot \left[\frac{r_+^2 - r_0^2}{\sqrt{\pi}} + \frac{4\theta}{\sqrt{\pi}} \left[\operatorname{erf} \left(\frac{r_+}{2\sqrt{\theta}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{r_0}{2\sqrt{\theta}} \right) \right] - \frac{4\sqrt{\theta}}{\pi} \left[r_+ e^{-\frac{r_+^2}{4\theta}} - r_0 e^{-\frac{r_0^2}{4\theta}} \right] \right]. \quad (4.78)
 \end{aligned}$$

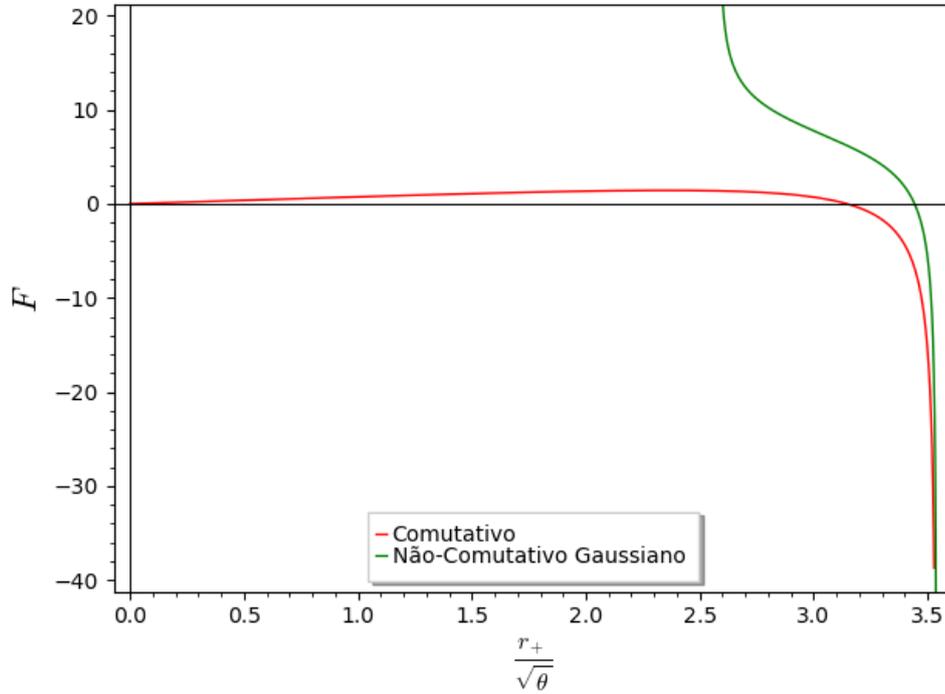


Figura 4.8: Energia Livre nos casos comutativo e não-comutativo Gaussiano. No eixo vertical temos a energia livre e no eixo horizontal temos o raio do horizonte de eventos normalizado pelo comprimento de escala mínimo $\sqrt{\theta}$. Para a plotagem do gráfico foi feito $M_0 = 0$ e $r_0 = 0$.

Perceba que a equação da energia livre acima 4.78, apesar de ser extensa, se reduz ao caso comutativo no limite que $r_+/\sqrt{\theta} \rightarrow \infty$. É possível mostrar isso atentando ao fato de que se $r_+^2 \gg \theta$ e $R^2 > r_+^2$ então $R^2 \gg \theta$, e isso significa dizer que os termos que contém $\gamma(R) \equiv \gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{R^2}{4\theta}\right) \rightarrow \gamma\left(\frac{3}{2}, \infty\right) \rightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, assim como também $\gamma(r_+) \equiv \gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r_+^2}{4\theta}\right) \rightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Também podemos entender que o termo que contém a função erro será proporcional a uma fração de θ nesse limite, pois $\operatorname{erf}\left(\frac{r_+}{2\sqrt{\theta}}\right) \rightarrow 1$ e a razão $\frac{r_+}{R}$ é menor do que 1. Esse termo então pode ser desprezado em face dos demais nesse limite ($\theta \ll r_+, r_0, R$). Com isso, podemos mostrar que a energia livre não-comutativa no limite comutativo tende à $F^{(c)}$

$$\begin{aligned}
 F &= M_0 + \frac{\sqrt{\pi}R}{2\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \left[\left(1 - \frac{\frac{\sqrt{\pi}}{2} r_0}{R \frac{\sqrt{\pi}}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(1 - \frac{\frac{\sqrt{\pi}}{2} r_+}{R \frac{\sqrt{\pi}}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} \right] \\
 &\quad - \frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{1 - \frac{r_+ \frac{\sqrt{\pi}/2}{R}}}} \left[\frac{1}{r_+} - \frac{0}{\gamma(r_+)} \right] \left[\frac{r_+^2 - r_0^2}{\sqrt{\pi}} + \frac{4\theta}{\pi} [1 - 1] - \frac{4\sqrt{\theta}}{\pi} [0 - 0] \right] \\
 &= M_0 + R \left[\sqrt{1 - \frac{r_0}{R}} - \sqrt{1 - \frac{r_+}{R}} - \frac{1}{4r_+R} \frac{(r_+^2 - r_0^2)}{\sqrt{1 - \frac{r_+}{R}}} \right], \\
 &= F^{(c)}.
 \end{aligned} \tag{4.79}$$

Em que $F^{(c)}$ é dado por 4.72.

O gráfico dos resultados associado à equação 4.78 é apresentado na figura 4.8 e o mesmo nos mostra que a energia livre assume valores positivos e negativos. Vemos também que o caso comutativo e não-comutativo só se cruzam quando r_+ é muitas ordens de grandeza superior ao comprimento característico $\sqrt{\theta}$, como esperado. Analisando a equação que utilizamos para encontrar a energia livre, $F = E - TS_+$, o acoplamento TS_+ na expressão é quem vai determinar o sinal da energia livre e observando o gráfico 4.5 da entropia vemos que tanto para o caso comutativo quanto o não-comutativo à medida que r_+ aumenta, S_+ aumenta e é uma função sempre crescente. O que implica dizer que se a energia livre assume valores negativos para determinado valor de r_+ é devido à contribuição da entropia S_+ , o que é bem explícito no gráfico. Também é válido notar que no caso não-comutativo, F passar a ser negativo de forma mais tardia (em termos de valores de r_+) em comparação ao caso comutativo, vemos que para o caso não-comutativo, representado pela linha verde, a energia livre passa a ser negativo em torno de $\approx 3.5\sqrt{\theta}$ e para o caso comutativo, representado pela linha vermelha, passar a ser negativo em $\approx 3.1\sqrt{\theta}$. Este fato representa outra forma de verificar o que vimos no gráfico 4.7 da energia interna, em que verificamos que a energia interna é maior na não-comutatividade do que na comutatividade até uma escala de $3.5\sqrt{\theta}$, uma vez que se E é maior, $F = E - T_H S_+$ também será positivo e só assumirá valores negativos à medida que S_+ aumente.

Dependendo do sinal a variação da energia livre representa o trabalho realizado pelo ou sobre o sistema num processo isotérmico reversível. Assim, vamos analisar fazendo a seguinte observação [4]

$$\Delta F = \Delta E - T_H \Delta S_+. \tag{4.80}$$

Mas

$$\Delta E = T_H \Delta S_+ - W. \tag{4.81}$$

Substituindo

$$\Delta F = -W. \quad (4.82)$$

Ou seja, a variação de F representa o trabalho consumido pelo sistema no processo isotérmico e o sinal de ΔF depende se $W > 0$ ou $W < 0$. Para regiões com valores menores que $r_+ = 3.1\sqrt{\theta}$ a energia livre é sempre positiva e por isso podemos investigar as variações $\Delta F = F_f - F_i$, com F_f sendo a energia livre final e F_i a energia livre inicial, da seguinte maneira: se $F_f > F_i$, então $\Delta F > 0$ e a relação 4.82 nos diz que o trabalho foi realizado sobre o sistema e se $F_f < F_i$ então $\Delta F < 0$ e o sistema realizou trabalho. Para a região $r_+ > 3.1\sqrt{\theta}$ temos que F assume valores negativos e se $|F_f| > |F_i|$ então $\Delta F < 0$, o que significaria trabalho sendo realizado pelo sistema e se $|F_f| < |F_i|$ então $\Delta F > 0$ e o trabalho foi realizado sobre o sistema. Variações entre as duas regiões são dadas com a análise da localização de F_f e F_i , pois $F > 0$ para $r_+ < 3.1\sqrt{\theta}$ e $F < 0$ para $r_+ > 3.1\sqrt{\theta}$.

Capítulo 5

Não-comutatividade no buraco negro em uma distribuição de Lévy

Neste capítulo vamos discutir os resultados obtidos com relação às propriedades termodinâmicas, bem como a análise do tensor de momento-energia em um espaço-tempo não-comutativo seguindo a distribuição de Lévy.

5.1 Tensor Energia-Momento

O procedimento a ser seguido aqui é o mesmo método utilizado no estudo da termodinâmica com distribuição Gaussiana, sendo que vai possuir suas próprias particularidades porque trabalharemos agora com a distribuição de Lévy. De modo que, o passo a passo algébrico também é o mesmo que utilizado anteriormente e por isso, em muitos casos, iremos diretamente às respostas, uma vez que o desenvolvimento matemático já foi feito com cautela no capítulo 4.

Primeiramente é necessário saber quem é a nossa nova densidade de massa ($\rho_{\theta L}$) considerando a distribuição de Lévy. Para isso, iremos fazer uma breve alteração na equação 3.4 (que é a equação que mostra a densidade Gaussiana) e no lugar da distribuição Gaussiana irei colocar a distribuição de Lévy 2.107, com $\gamma = 1$ e $\delta = 0$. Ficando da seguinte maneira

$$\rho_{\theta L}(r) = A \frac{M}{24\sqrt{\theta\pi}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-\frac{\sqrt{\theta}}{4r}}}{\left(\frac{r}{\sqrt{\theta}}\right)^{\frac{3}{2}}}. \quad (5.1)$$

Em que o índice L é para identificar que estamos trabalhando com a distribuição de Lévy, A é uma constante de normalização que iremos determiná-la em breve e perceba também que foi acrescentado o termo $\sqrt{\theta}$ no expoente do exponencial e no denominador junto com r, o motivo para tal já foi explanado no desenvolvimento das propriedades termodinâmicas na distribuição Gaussiana. É que sempre iremos fazer um paralelo entre

a distância radial r e o comprimento mínimo $\sqrt{\theta}$ para que possamos analisar os casos comutativo de cada propriedade termodinâmica.

Dito isso, vamos agora determinar a constante de normalização A utilizando o método encontrado no artigo [21]

$$\int_0^\infty \rho_{\theta L}(r) dr = M. \quad (5.2)$$

Substituindo 5.1 e isolando a constante de normalização, encontraremos a seguinte expressão

$$A = \frac{12\sqrt{\theta}\pi\sqrt{2\pi}\theta^{\frac{1}{4}}}{\Gamma(\frac{1}{2})}. \quad (5.3)$$

Em que $\Gamma(\frac{1}{2})$ é a função gamma completa. De modo que, ao se calcular a distribuição de massa para o caso de Lévy ($m_{\theta L}$) obteremos a seguinte expressão

$$m_{\theta L} = \frac{3M}{4\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\sqrt{\theta}}{4r}}^\infty u^{-\frac{3}{2}-1} e^{-u} du. \quad (5.4)$$

Onde $\Gamma\left(\frac{-3}{2}, \frac{\sqrt{\theta}}{4r}\right)$ é identificada como função gamma incompleta superior mostrada no apêndice e podemos reescrevê-la da seguinte forma

$$m_{\theta L} = \frac{3M}{4\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{-3}{2}, \frac{\sqrt{\theta}}{4r}\right). \quad (5.5)$$

Devemos analisá-la agora no limite comutativo, devemos checar o resultado quando $\frac{\sqrt{\theta}}{r} \rightarrow \infty$. O motivo para tal surge da função gamma incompleta superior, se $\Gamma\left(\frac{-3}{2}, \frac{\sqrt{\theta}}{4r}\right)$ for analisada no limite $\frac{\sqrt{\theta}}{r} \rightarrow 0$ a função gamma incompleta superior irá divergir para o infinito, entretanto quando for analisada no limite $\frac{\sqrt{\theta}}{r} \rightarrow \infty$ a função gamma incompleta superior irá convergir para a função gamma completa da seguinte maneira $\Gamma\left(\frac{-3}{2}, \frac{\sqrt{\theta}}{4r}\right) = \Gamma\left(\frac{-3}{2}, \infty\right) = \Gamma\left(\frac{-3}{2}\right) = \frac{4\sqrt{\pi}}{3}$. Que ao ser substituído em 5.5 recuperamos as características do espaço-tempo comutativo.

Uma vez que já temos posse da densidade de massa, podemos utilizar o resultado obtido no tópico 4.1 para conseguir o gráfico da pressão radial e tangencial.

Analisando o gráfico 5.1, de imediato, é possível perceber uma diferença crucial no comportamento da pressão nos casos Gaussiano e Lévy, no caso de Lévy (Linhas tracejadas), em ambos os casos, é previsto que a pressão se anule quando $r_+ = 0$. Podemos dar uma explicação para isso analisando a curvatura R , usando a equação 4.24. Repare que ao analisar a densidade 5.1 quando $r_+ \rightarrow 0$ o exponencial de fato vai tender zero, o que conseqüentemente vai fazer com que a curvatura R também seja, consolidando a informação que está contida no gráfico. Uma outra análise interessante é que no caso da pressão tangencial (linha tracejada vermelha) nos pontos próximos à $r_+ = 0$, e em um

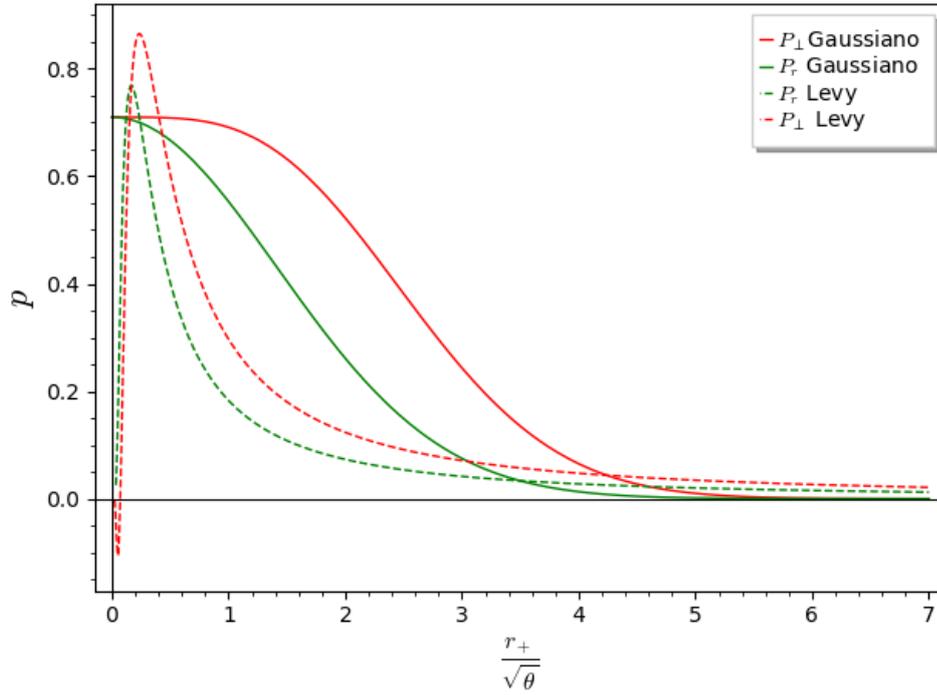


Figura 5.1: Pressão radial e tangencial nos casos Gaussiano e Lévy. No eixo vertical temos a pressão e no eixo horizontal temos o raio do horizonte de eventos normalizado pelo comprimento de escala mínimo $\sqrt{\theta}$.

intervalo muito curto, é previsto a existência de uma força negativa, ou seja, no sentido contrário. É possível perceber também que os efeitos da não-comutatividade começam a perder relevância de modo mais tardio, enquanto que na distribuição Gaussiana os efeitos cessam em torno de $r_+ = 5\sqrt{\theta}$ nas curvas com distribuição de Lévy os efeitos cessam em uma distância radial bem maior. E isso é consequência de uma característica intrínseca da distribuição de Lévy, que são as caudas pesadas mencionadas anteriormente.

5.2 Distribuição de massa

Prosseguimos agora com o estudo da distribuição de massa. Uma vez que já possuímos 5.5 podemos substituí-la na métrica de Schwarzschild e obter a distribuição de massa no espaço-tempo não-comutativo em uma distribuição de Lévy. A métrica toma a seguinte forma

$$ds^2 = - \left[1 - \frac{1}{r} \frac{3M}{2\sqrt{\pi}} \Gamma \left(\frac{-3}{2}, \frac{\sqrt{\theta}}{4r} \right) \right] dt^2 + \left[1 - \frac{1}{r} \frac{3M}{2\sqrt{\pi}} \Gamma \left(\frac{-3}{2}, \frac{\sqrt{\theta}}{4r} \right) \right]^{-1} dr^2. \quad (5.6)$$

Do qual podemos concluir que

$$r_+ = \frac{3M}{2\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{-3}{2}, \frac{\sqrt{\theta}}{4r_+}\right) \iff M_+ = \frac{2r_+\sqrt{\pi}}{3} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{-3}{2}, \frac{\sqrt{\theta}}{4r_+}\right)}. \quad (5.7)$$

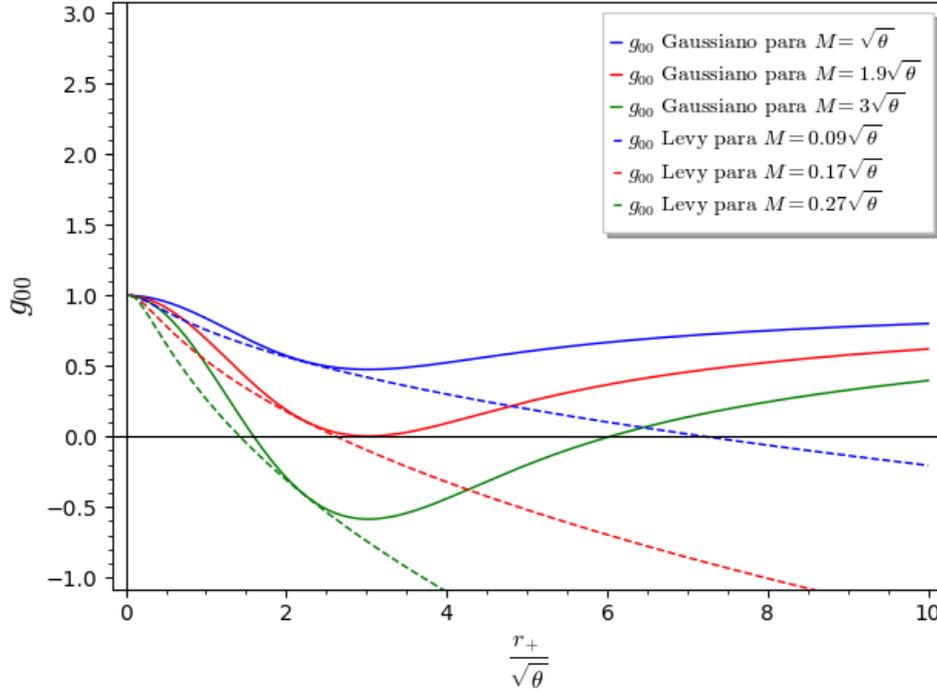


Figura 5.2: g_{00} em função de $\frac{r_+}{\sqrt{\theta}}$ para vários valores de M.

Analisando o termo g_{00} no caso de Lévy é notório a grande diferença de comportamento entre os casos Gaussiano e Lévy. O primeiro fato interessante, é que em um buraco negro que segue a distribuição de Lévy não há a previsão de um objeto irá orbitá-lo, uma vez que não houve a formação de um poço potencial, e isso vale para qualquer ordem de massa. Outro ponto importante a se notar é que no caso Gaussiano, dependendo da ordem de grandeza da massa, há a previsão do surgimento de 2 horizontes de eventos, enquanto que no caso de Lévy, como pode-se ver na legenda, há a previsão do surgimento de horizontes de eventos para qualquer ordem de grandeza da massa. No entanto, não há possibilidade de formação de 2 horizontes de eventos.

Analisando agora a distribuição de massa, vemos que ambas as distribuições, Gaussiana e Lévy, tem em comum é que as distribuições de massa à medida que $\frac{r_{\pm}}{\sqrt{\theta}} \rightarrow 0$ explodem ao infinito. E à medida que $\frac{r_{\pm}}{\sqrt{\theta}} \rightarrow \infty$ a distribuição de massa no caso de Lévy tende a 0, enquanto que no caso Gaussiano segue o comportamento de uma reta. No entanto, ao se analisar no limite comutativo, quando $\frac{r_{\pm}}{\sqrt{\theta}} \rightarrow \infty$, nós retornamos ao caso comutativo dado pela equação 4.27.

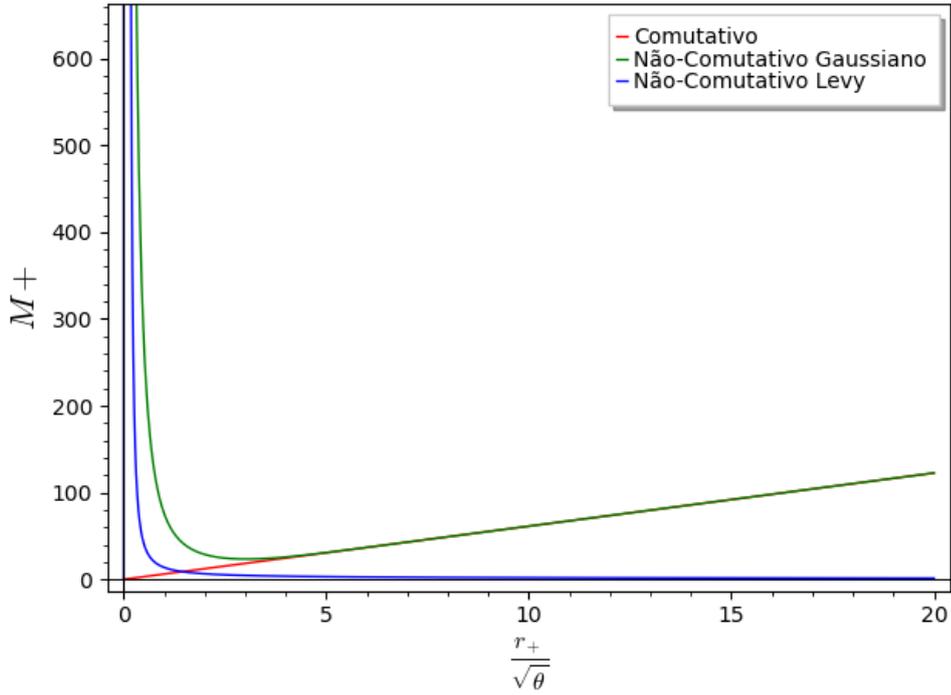


Figura 5.3: Massas nos casos comutativo e não-comutativo Gaussiano e Lévy. No eixo vertical temos a distribuição de massa e no eixo horizontal temos o raio do horizonte de eventos normalizado pelo $\sqrt{\theta}$.

Ao tomarmos o limite $r_+ \rightarrow 0$ na expressão da massa ela se anula, bem diferente do caso Gaussiano em que ela não se anula. Ou seja, não há um limite de evaporação do buraco negro seguindo a distribuição de Lévy, ela irá emitir radiação até sua completa evaporação. E a expressão da massa mínima é dada por

$$M_{min} = \frac{8\sqrt{\pi}\theta^3}{r^{\frac{3}{2}}}. \quad (5.8)$$

5.3 Temperatura de Hawking

A temperatura de Hawking pode ser encontrada através da relação 2.102

$$T_H = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{dg^{rr}}{dr} \right) \Big|_{r=r_+}. \quad (5.9)$$

Calculando a derivada de g^{rr}

$$\frac{dg^{rr}}{dr} \Big|_{r=r_+} = \frac{3M}{2\sqrt{\pi}} \left[\frac{1}{r_+^2} \Gamma\left(\frac{-3}{2}, \frac{\sqrt{\theta}}{4r_+}\right) - \frac{1}{r_+} \Gamma'\left(\frac{-3}{2}, \frac{\sqrt{\theta}}{4r_+}\right) \right]. \quad (5.10)$$

Em que Γ' representa a derivada da função gamma incompleta superior. Substituindo e desenvolvendo a álgebra, obteremos a seguinte expressão

$$T_H = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{r_+} - \frac{\Gamma' \left(\frac{-3}{2}, \frac{\sqrt{\theta}}{4r_+} \right)}{\Gamma \left(\frac{-3}{2}, \frac{\sqrt{\theta}}{4r_+} \right)} \right]. \quad (5.11)$$

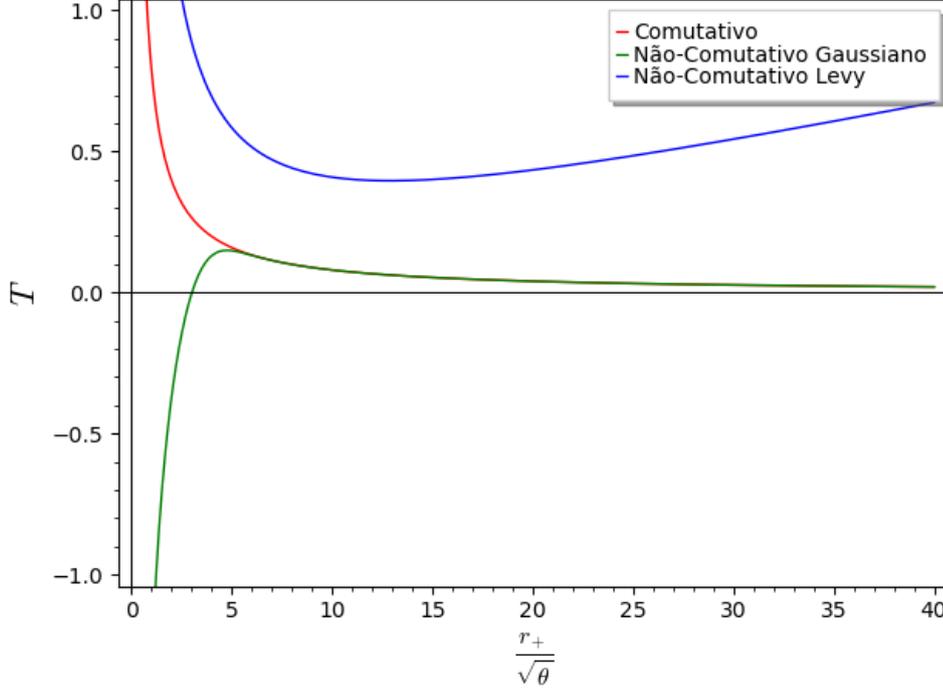


Figura 5.4: Temperatura Hawking nos casos comutativo e não-comutativo Gaussiano e Lévy. No eixo vertical temos a temperatura de Hawking e no eixo horizontal temos o raio do horizonte de eventos normalizado pelo comprimento de escala mínimo $\sqrt{\theta}$.

Diferente do caso Gaussiano, que em pequenas distâncias a temperatura Hawking começa da menor temperatura possível, a temperatura no buraco negro com distribuição de Lévy à medida que $\frac{r_+}{\sqrt{\theta}} \rightarrow 0$ explode ao infinito, em $r_+ \approx 4\sqrt{\theta}$, e atinge a sua temperatura mínima em $\approx 8\sqrt{\theta}$. À medida que a distância radial tende ao infinito a temperatura Hawking aumenta de valor indefinidamente. Bem diferente do caso não-comutativo Gaussiano e o comutativo, que tendem a valores pequenos à medida que $\frac{r_+}{\sqrt{\theta}} \rightarrow 0$. No entanto, ao se analisar no limite comutativo, quando $\frac{r_+}{\sqrt{\theta}} \rightarrow \infty$, nós retomamos o caso comutativo dado pela expressão 4.36.

5.4 Entropia

A entropia pode ser encontrada através da expressão

$$\Delta S_+ = \int \frac{dM_+}{T_H} = \int_{r_0}^{r_+} \frac{1}{T_H} \left(\frac{\partial M_+}{\partial r_+} \right) dr_+. \quad (5.12)$$

Em que iremos utilizar a seguinte notação $\Gamma \equiv \Gamma\left(\frac{-3}{2}, \frac{\sqrt{\theta}}{4r_+}\right)$ para facilitar a visualização. A expressão da derivada da massa é dada por

$$\frac{\partial M_+}{\partial r_+} = \frac{2\sqrt{\pi}}{3} \left[\frac{\Gamma - r_+ \Gamma'}{\Gamma^2} \right]. \quad (5.13)$$

Onde Γ' representa a derivada da função gamma incompleta superior. Substituindo na expressão da entropia e desenvolvendo um pouco de álgebra chegaremos a seguinte expressão

$$S_+ = \frac{8\pi^{\frac{3}{2}}}{3} \int_0^{r_+} \frac{r'_+}{\Gamma} dr'_+. \quad (5.14)$$

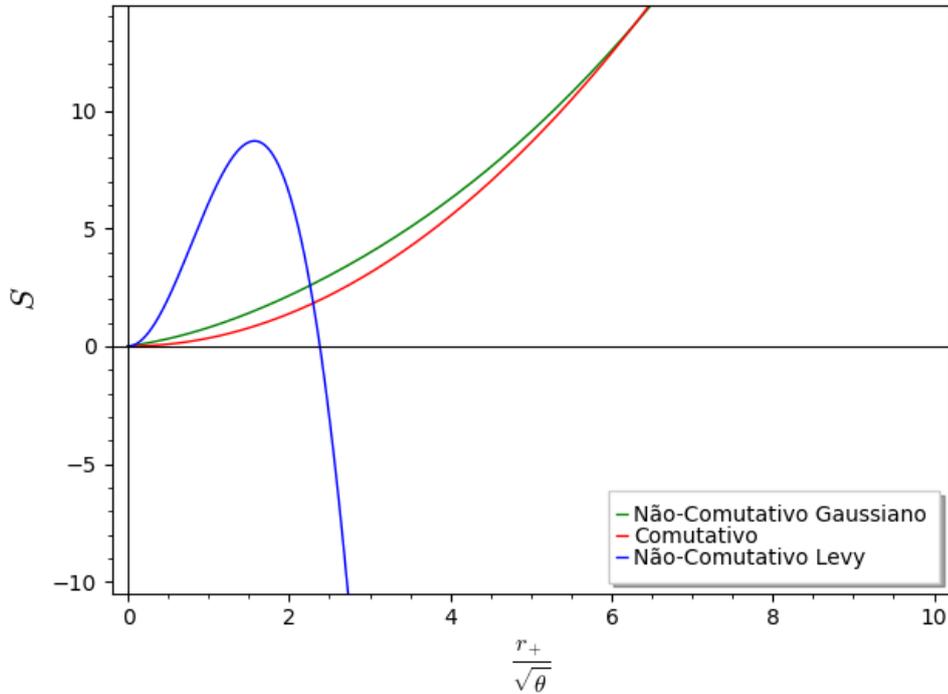


Figura 5.5: Entropia nos casos comutativo e não-comutativo Gaussiano e Lévy. No eixo vertical temos a Entropia e no eixo horizontal temos o raio do horizonte de eventos normalizado pelo comprimento de escala mínimo $\sqrt{\theta}$.

Essa não também não é uma integral trivial de ser realizada, de forma que é necessário fazer uma aproximação para a função gamma incompleta superior para conseguir efetuarla. A aproximação feita na função gamma é detalhada no tópico 5.7 da energia livre na distribuição de Lévy. Podemos perceber de imediato o comportamento diferente da entropia nos casos Gaussiano e Lévy, primeiro ponto a se analisar é que o gráfico indica que a entropia na distribuição de Lévy (Linha azul) tem um valor máximo atingido em $\approx 1.5\sqrt{\theta}$ e depois continua decrescendo até $S = 0$ em $\approx 2.7\sqrt{\theta}$, após essa distância não faz sentido analisar a entropia uma vez que entropia negativa não existe. E de forma similar ao caso gaussiano e comutativo, a entropia na distribuição de Lévy "começa" no zero.

5.5 Capacidade calorífica

Podemos encontrar a capacidade calorífica da seguinte maneira

$$C_+ = \left(\frac{\partial M_+}{\partial r_+} \right) \left(\frac{\partial T_H}{\partial r_+} \right)^{-1}. \quad (5.15)$$

Já temos a expressão para a derivada da massa, precisamos da expressão da derivada da temperatura Hawking em relação ao raio

$$\frac{\partial T_H}{\partial r_+} = \frac{1}{4\pi} \left[-\frac{1}{r_+^2} - \frac{\Gamma''\Gamma - \Gamma'^2}{\Gamma^2} \right]. \quad (5.16)$$

Lembrando que foi utilizado a notação $\Gamma \equiv \Gamma\left(\frac{-3}{2}, \frac{\sqrt{\theta}}{4r_+}\right)$. Substituindo e desenvolvendo um pouco de álgebra chegamos a seguinte expressão

$$C_+ = \frac{8\pi^{\frac{3}{2}}}{3} \left[\frac{(\Gamma - r_+\Gamma')r_+^2}{-\Gamma^2 - r_+^2\Gamma''\Gamma - \Gamma'^2r_+^2} \right]. \quad (5.17)$$

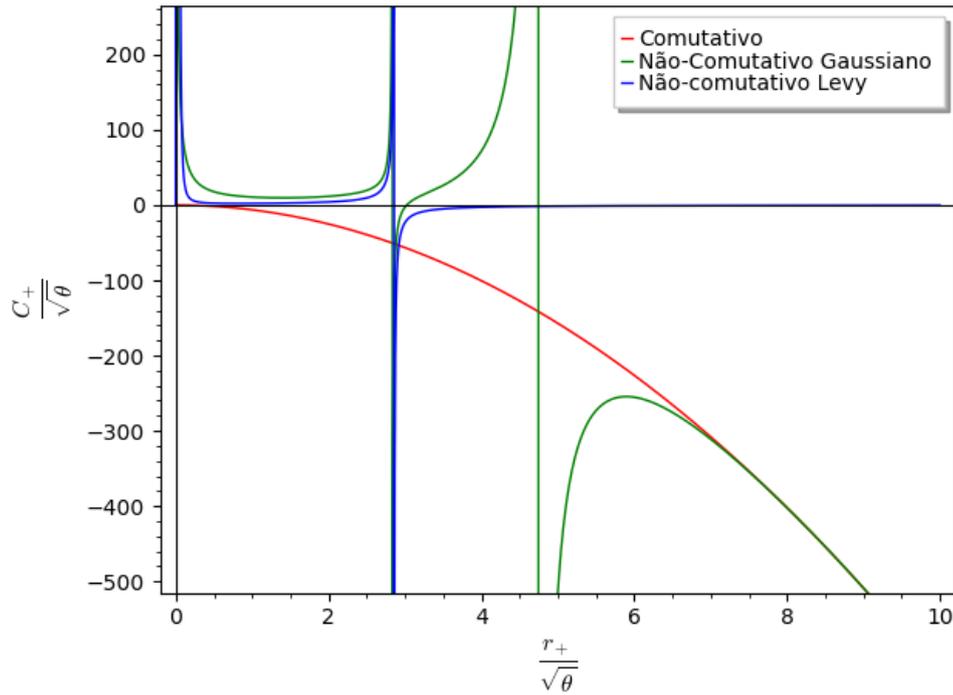


Figura 5.6: Capacidade calorífica nos casos comutativo e não-comutativo Gaussiano e Lévy. No eixo vertical temos a capacidade térmica normalizado pelo comprimento de escala mínimo $\sqrt{\theta}$ e no eixo horizontal temos o raio do horizonte de eventos normalizado pelo comprimento de escala mínimo $\sqrt{\theta}$.

Podemos ver no gráfico que a capacidade térmica na distribuição de Lévy houve apenas uma assíntota, no nosso caso em $r_+ \approx 2.9\sqrt{\theta}$, o que significa dizer que a função $\partial T_H / \partial r_+$ tem apenas 1 polo, diferente da distribuição Gaussiana que possui 2 polos. Em outras palavras podemos dizer que a capacidade térmica de um buraco negro que segue a distribuição de Lévy há apenas um único momento em que acontece a troca de

sinal da capacidade térmica. Um outro ponto muito importante para nossa análise é notar que mesmo em distâncias radiais não muito grandes, antes mesmo de ocorrer a convergência do caso não-comutativo Gaussiano para o caso comutativo, a capacidade térmica na distribuição de Lévy tende a zero rapidamente, o que significa dizer em outras palavras é que o buraco negro que segue essa distribuição não troca calor. E em $C = 0$ ocorre de forma análoga ao caso Gaussiano, à medida que se aproxima de $r_+ = 0$ a capacidade térmica explode, indicando que em distâncias próximas a $r_+ = 0$ é necessário uma quantidade de energia infinita para poder mudar sua temperatura. No entanto, ao se calcular no limite comutativo, quando $\frac{\sqrt{\theta}}{r_+} \rightarrow \infty$, obtemos o resultado mostrado em 4.49

5.6 Energia interna

Podemos encontrar a energia interna através de

$$E = M_0 + \int_{r_0}^{r_+} T(r'_+, R) \left(\frac{\partial S'_+}{\partial r'_+} \right) dr'_+. \quad (5.18)$$

Para isso precisamos explicitar a expressão para T , dada por 4.61

$$T = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{r_+} - \frac{\Gamma'(r_+)}{\Gamma(r_+)} \right] \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r_+ \Gamma(R)}{R \Gamma(r_+)}}}. \quad (5.19)$$

Em que foi utilizado a seguinte notação $\gamma(\frac{-3}{2}, \frac{\sqrt{\theta}}{4r_+}) \equiv \gamma(r_+)$ e $\gamma(\frac{-3}{2}, \frac{\sqrt{\theta}}{4R}) \equiv \gamma(R)$. Uma vez que sabemos quem é T podemos substituir diretamente na equação da energia interna, realizar um pouco de álgebra que chegaremos em

$$E = M_0 + \frac{4\sqrt{\pi}}{3} \frac{R}{\Gamma(R)} \left[\left(1 - \frac{\Gamma(R)}{R} \frac{r_0}{\Gamma(r_0)} \right)^{\frac{1}{2}} - \left(1 - \frac{\Gamma(R)}{R} \frac{r_+}{\Gamma(r_+)} \right)^{\frac{1}{2}} \right]. \quad (5.20)$$

Analisando o gráfico é perceptível um comportamento bem diferente da energia interna na distribuição de Lévy (linha azul) com a energia interna Gaussiana. O primeiro ponto a se analisar é que no caso Gaussiano a energia interna explode entre $r_+ = 2\sqrt{\theta}$ e $r_+ = 1.5\sqrt{\theta}$, enquanto que no caso de Lévy a energia interna explode apenas bem próximo à origem $r_+ = 0$ e decai a 0 zero rapidamente. Nesse caso, é fácil de ver o porque que a energia interna vai a zero, vimos no capítulo 4 na seção 4.5, equação 4.44, que a energia interna e a capacidade térmica estão diretamente relacionadas. Uma vez que a capacidade térmica vai a zero, a energia interna também deverá ir a zero. No entanto, ao se analisar no limite comutativo, quando $\frac{\sqrt{\theta}}{r_+} \rightarrow \infty$, retomamos o caso comutativo dado pela expressão 4.60.

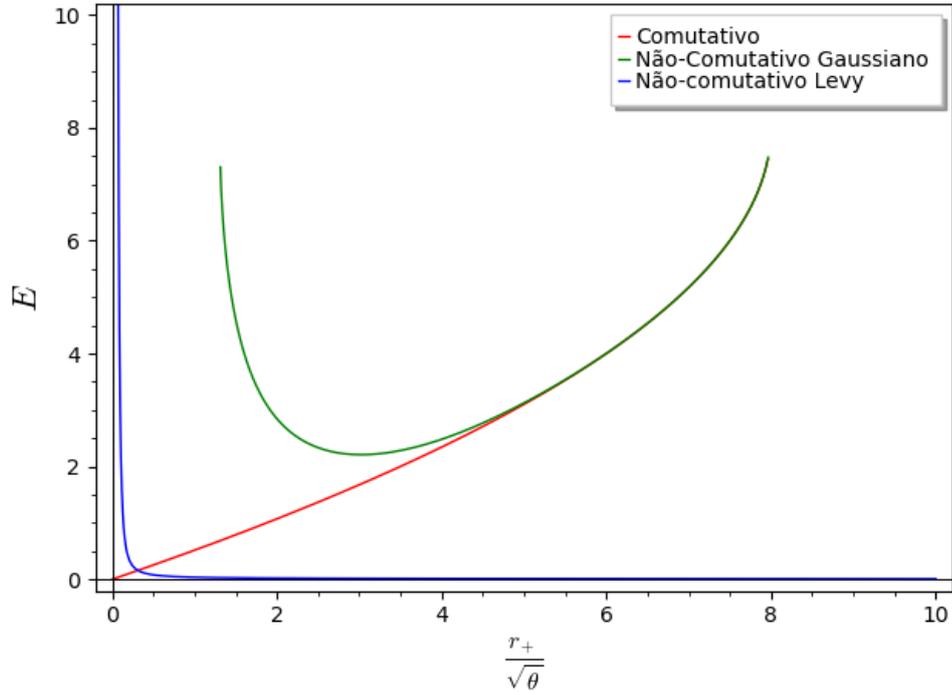


Figura 5.7: Energia interna nos casos comutativo e não-comutativo Gaussiano e Lévy. No eixo vertical temos a energia interna e no eixo horizontal temos o raio do horizonte de eventos normalizado pelo comprimento de escala mínimo $\sqrt{\theta}$. Na plotagem do gráfico foi feito $M_0 = 0$ e $r_0 = 0$.

5.7 Energia Livre

Um vez que encontramos a energia interna não-comutativa podemos encontrar a energia livre não-comutativa na distribuição de Lévy. Para encontrar a energia livre usaremos a mesma equação mostrada no capítulo 4

$$F = E(r_+, R) - TS_+. \quad (5.21)$$

Mas para conseguir encontrar uma expressão para a energia livre precisamos de S_+ , irei utilizar a expansão assintótica da função gamma incompleta superior mostrada no apêndice

$$\Gamma(p, x) = \Gamma(p) \left[1 - e^{-x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{p+k}}{\Gamma(p+k+1)} \right]. \quad (5.22)$$

No nosso caso $p = -\frac{3}{2}$ e $x = \frac{\sqrt{\theta}}{4r_+}$, substituindo encontraremos

$$\Gamma\left(\frac{-3}{2}, \frac{\sqrt{\theta}}{4r_+}\right) = \frac{4\sqrt{\pi}}{3} \left[1 + e^{\frac{\sqrt{\theta}}{4r_+}} \frac{4r_+^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi}} \right]. \quad (5.23)$$

De modo que a integral da entropia toma a seguinte forma

$$\int_{r_0}^{r_+} \frac{r'_+}{\frac{4\sqrt{\pi}}{3} \left[1 + e^{\frac{\sqrt{\theta}}{4r_+}} \frac{4r_+^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi}} \right]} \quad (5.24)$$

Resolvendo essa integral nós finalmente conseguiremos obter uma expressão para a entropia no espaço-tempo não-comutativo na distribuição de Lévy

$$S_+ = \frac{3}{4\sqrt{\pi}} \left[\frac{r_+^2 - r_0^2}{2} - \frac{128}{\sqrt{\pi}} \gamma \left(\frac{7}{2}, \frac{r_+}{4\sqrt{\theta}} \right) \right]. \quad (5.25)$$

O gráfico dessa função foi plotada na seção 5.4, é a figura 5.5. Uma vez que já sabemos a entropia e a temperatura local T , podemos finalmente encontrar uma expressão para a energia livre seguindo uma distribuição de Lévy

$$F = M_0 + \frac{4\sqrt{\pi}}{3} \frac{R}{\Gamma(R)} \left[\left(1 - \frac{\Gamma(R)}{R} \frac{r_0}{\Gamma(r_0)} \right)^{\frac{1}{2}} - \left(1 - \frac{\Gamma(R)}{R} \frac{r_+}{\Gamma(r_+)} \right)^{\frac{1}{2}} \right] - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{r_+} - \frac{\Gamma'(r_+)}{\Gamma(r_+)} \right] \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r_+}{R} \frac{\Gamma(R)}{\Gamma(r_+)}}} \left[\frac{r_+^2 - r_0^2}{2} - \frac{128}{\sqrt{\pi}} \gamma \left(\frac{7}{2}, \frac{r_+}{4\sqrt{\theta}} \right) \right]. \quad (5.26)$$

Lembrando que foi utilizado a notação $\gamma(\frac{-3}{2}, \frac{\sqrt{\theta}}{4r_+}) \equiv \gamma(r_+)$ e $\gamma(\frac{-3}{2}, \frac{\sqrt{\theta}}{4R}) \equiv \gamma(R)$.

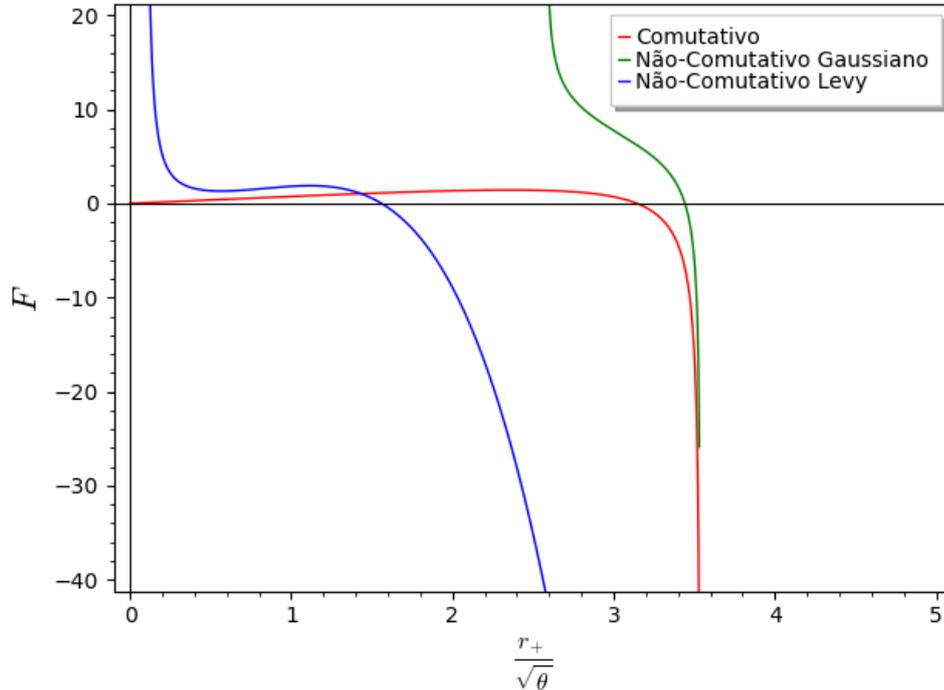


Figura 5.8: Energia Livre nos casos comutativo e não-comutativo Gaussiano. No eixo vertical temos a energia livre e no eixo horizontal temos o raio do horizonte de eventos normalizado pelo comprimento de escala mínimo $\sqrt{\theta}$. Na plotagem do gráfico foi feito $M_0 = 0$ e $r_0 = 0$.

Do gráfico podemos inferir diretamente, de modo análogo ao caso Gaussiano, que a energia livre em uma distribuição de Lévy também pode assumir valores positivos e negativos. Uma diferença crucial entre as energias livres, é que no caso da energia livre com distribuição de Lévy ele passa a ser negativo de forma mais rápida (em termos de valores de r_+) em comparação ao caso Gaussiano. No caso de Lévy ele começa a ser negativo em torno de $r_+ \approx 1.75\sqrt{\theta}$, enquanto que no caso Gaussiano passa a ser negativo em torno de $\approx 3.5\sqrt{\theta}$. Analisando agora a equação que utilizamos para encontrar a energia livre, $F = E - TS_+$, vimos que o acoplamento TS_+ é quem vai determinar o sinal da energia livre e observando o gráfico 5.5 da entropia vemos, desta vez, que a entropia aumenta de valor até um máximo e começa a diminuir até zerar. O que significa dizer que o sinal da energia livre não depende apenas da entropia, mas também da temperatura local T . O fato da energia livre ir a valores negativos de forma mais rápida representa outra forma de verificar o que vimos no gráfico 5.7, em que vimos que a energia interna E decai a 0 em curta distância e uma vez que E é menor, $F = E - TS_+$ se torna negativo. Também vimos que

$$\Delta F = -W. \quad (5.27)$$

Que nos mostra que a variação de F representa o trabalho consumido pelo sistema no processo isotérmico e o sinal de ΔF depende se $W > 0$ ou $W < 0$. Para regiões com valores menores que $r_+ \approx 1.75\sqrt{\theta}$ a energia livre é sempre positiva e por isso podemos investigar as variações $\Delta F = F_f - F_i$, com F_f sendo a energia livre final e F_i a energia livre inicial, da seguinte maneira: se $F_f > F_i$, então $\Delta F > 0$ e a relação 4.82 nos diz que o trabalho foi realizado sobre o sistema e se $F_f < F_i$ então $\Delta F < 0$ e o sistema realizou trabalho. Para a região $r_+ > 1.75\sqrt{\theta}$ temos que F assume valores negativos e se $|F_f| > |F_i|$ então $\Delta F < 0$, o que significaria trabalho sendo realizado pelo sistema e se $|F_f| < |F_i|$ então $\Delta F > 0$ e o trabalho foi realizado sobre o sistema. No entanto, ao analisarmos no limite comutativo, quando $\frac{\sqrt{\theta}}{r_+} \rightarrow \infty$, voltamos ao caso comutativo dado por 4.72.

Capítulo 6

Não-comutatividade no buraco negro em uma distribuição de Cauchy

De forma análoga ao feito na distribuição Gaussiana e de Lévy, neste capítulo vamos apresentar os resultados obtidos das propriedades termodinâmicas, bem como a análise do tensor de Energia-Momento e da distribuição de massa, sendo que agora seguindo uma distribuição de Cauchy.

6.1 Tensor Energia-Momento

O procedimento a ser seguido aqui é o mesmo que utilizado no capítulo 4, capítulo em que falamos sobre a distribuição Gaussiana. Sendo que agora vai possuir suas próprias particularidades porque trabalharemos com a distribuição de Cauchy.

Primeiramente vamos explicitar quem é nossa densidade de massa ($\rho_{\theta C}$) levando em consideração a distribuição de Cauchy. Para isso, iremos fazer uma breve alteração na equação 3.4 e no lugar da distribuição Gaussiana irei colocar a distribuição de Cauchy 2.112, com $\gamma = 1$ e $\delta = 0$.

$$\rho_{\theta C}(r) = A \frac{18\theta^{\frac{3}{2}}}{\pi} \frac{1}{\pi} \frac{M}{\left(\frac{r^2}{\theta} + 1\right)}. \quad (6.1)$$

Em que o índice C é para destacar que estamos trabalhando com uma densidade de massa que segue uma distribuição de Cauchy, A é uma constante de normalização que encontraremos logo em seguida e repare também que colocado um θ no denominador da última fração, abaixo do M, isso foi necessário para que futuramente possamos analisar as expressões no limite comutativo.

Podemos determinar a constante de normalização A [21] de modo análogo ao que foi feito no caso de Lévy

$$\int_0^{\infty} \rho_{\theta C}(r) dr = M. \quad (6.2)$$

Substituindo a densidade e isolando a constante A encontraremos

$$A = \frac{\pi}{18\theta^2}. \quad (6.3)$$

De modo que ao se calcular a distribuição de massa, obteremos

$$m_{\theta C}(r) = M \left[r - \sqrt{\theta} \tan^{-1} \left(\frac{r}{\sqrt{\theta}} \right) \right]. \quad (6.4)$$

Entretanto percebe-se que chegamos a um impasse, se analisarmos 6.4 no limite $\frac{r_+}{\sqrt{\theta}} \rightarrow 0$ nós iremos obter $m_{\theta C}(r) = 0$, o que não é desejável. e se analisarmos no limite $\frac{r_+}{\sqrt{\theta}} \rightarrow \infty$ a massa não-comutativa $m_{\theta C}(r)$ diverge, o que também não é desejável. Para conseguir a convergência no infinito vamos dividir ambos os lados por r e definir uma nova variável m_1 de tal modo que $m_{1\theta C} \equiv m_{\theta C}/r$ que é igual a

$$m_{1\theta C} = M \left[1 - \frac{\sqrt{\theta} \tan^{-1} \left(\frac{r}{\sqrt{\theta}} \right)}{r} \right]. \quad (6.5)$$

Repare agora que se analisarmos no limite comutativo, quando $\frac{r_+}{\sqrt{\theta}} \rightarrow \infty$, nós recuperamos as características do espaço-tempo comutativo.

Uma vez que sabemos a densidade podemos usar os resultados obtido na seção 4.1 para plotar o gráfico da pressão radial e tangencial.

É perceptível um comportamento semelhante das pressões na distribuição de Cauchy, linhas tracejadas cinzas e azuis, e as pressões na distribuição Gaussiana. Uma semelhança é o fato de que em $r_+ = 0$ a pressão não se anula e podemos verificar isso da mesma maneira que fizemos anteriormente usando a equação 4.24 para verificar a curvatura. Ao se utilizar essa relação nós obteremos a seguinte expressão

$$R = \frac{32M}{\sqrt{\theta}}. \quad (6.6)$$

E é justamente devido a essa curvatura não nula no centro que faz surgir uma pressão em $r_+ = 0$, com origem nas flutuações quânticas [35]. Um outro ponto importante a ser comentado é que os efeitos da não-comutatividade são relevantes em um intervalo maior do que na distribuição Gaussiana e isso se deve as propriedades da cauda pesada que se encontra na distribuição de Cauchy. O que em outras palavras significa dizer que a pressão em um buraco negro que segue a distribuição de Cauchy volta a se comportar como um fluido perfeito após uma distância radial muito maior do que a de um buraco negro que segue a distribuição Gaussiana

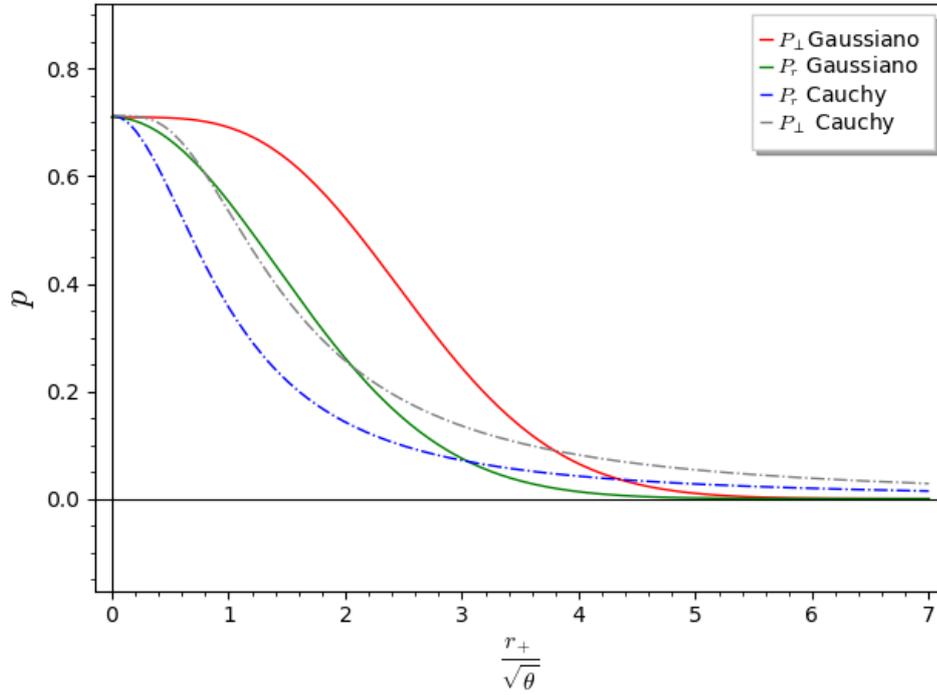


Figura 6.1: Pressão tangencial nos casos comutativo e não-comutativo Gaussiano e Cauchy. No eixo vertical temos a pressão e no eixo horizontal temos o raio do horizonte de eventos normalizado pelo comprimento de escala mínimo $\sqrt{\theta}$.

O gráfico 6.2 mostra o comportamento da pressão em cada caso, e em conjunto, para um melhor entendimento e visualização. Faremos isso em todas as seções daqui em diante.

6.2 Distribuição de massa

Uma vez que já temos a massa não-comutativa, podemos escrever a métrica não-comutativa que segue a distribuição de Cauchy

$$ds^2 = - \left[1 - \frac{2}{r} M \left(1 - \frac{\sqrt{\theta} \tan^{-1} \left(\frac{r}{\sqrt{\theta}} \right)}{r} \right) \right] dt^2 + \left[1 - \frac{2}{r} M \left(1 - \frac{\sqrt{\theta} \tan^{-1} \left(\frac{r}{\sqrt{\theta}} \right)}{r} \right) \right]^{-1} dr^2. \quad (6.7)$$

Perceba que se for analisado no limite em que $\frac{r_+}{\sqrt{\theta}} \rightarrow \infty$ nós voltamos a ter o caso de uma métrica comutativa. Do qual podemos concluir que

$$r_+ = 2M \left(1 - \frac{\sqrt{\theta} \tan^{-1} \left(\frac{r}{\sqrt{\theta}} \right)}{r} \right) \iff M_+ = \frac{r_+}{2} \frac{1}{\left(1 - \frac{\sqrt{\theta} \tan^{-1} \left(\frac{r}{\sqrt{\theta}} \right)}{r} \right)}. \quad (6.8)$$

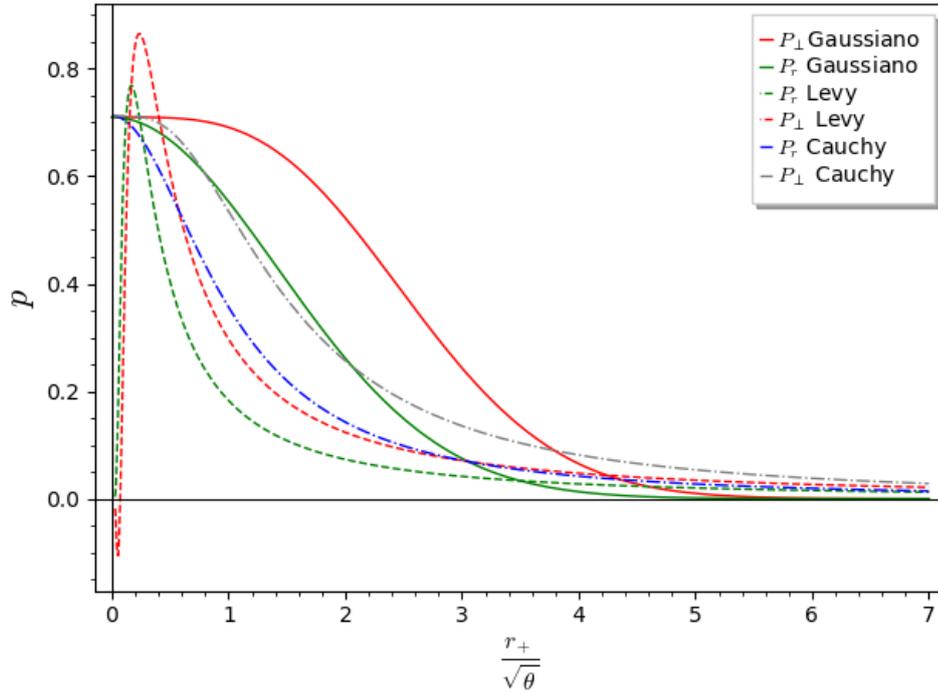


Figura 6.2: Pressão tangencial nos casos comutativo e não-comutativo Gaussiano, Lévy e Cauchy. No eixo vertical temos a pressão e no eixo horizontal temos o raio do horizonte de eventos normalizado pelo comprimento de escala mínimo $\sqrt{\theta}$.

Com esses dados em mãos podemos fazer uma análise do termo g_{00} da métrica e estudar seu comportamento e posteriormente fazer o mesmo com a distribuição de massa

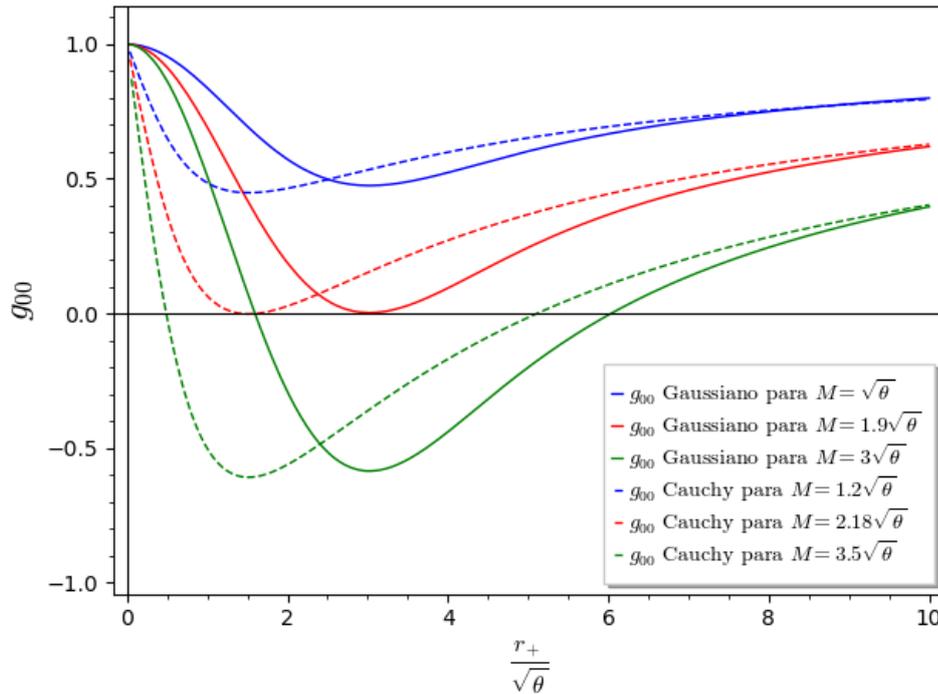


Figura 6.3: g_{00} em função de $\frac{r_+}{\sqrt{\theta}}$ para vários valores de M .

Diferentemente do caso da distribuição de Lévy, que não há previsão de formação de um poço potencial, na distribuição de Cauchy há a formação de poços de potenciais e sua profundidade vai depender a ordem de grandeza da massa do buraco negro. Perceba que nos três casos apresentados um corpo que se aproxima do buraco negro irá "se prender" a sua órbita, mas no caso de $M = 1.2\sqrt{\theta}$ o corpo precisará de pouca energia para escapar da força gravitacional, enquanto que no caso para $M = 3.5\sqrt{\theta}$ precisará de um nível de energia bem maior para conseguir escapar do campo gravitacional. Também podemos inferir desse gráfico que para grandezas de massas $M < 1.2\sqrt{\theta}$ não há a formação de horizontes de eventos, para $M = 2.18\sqrt{\theta}$ há a situação crítica que se chama buraco negro extremo e para $M = 3.5\sqrt{\theta}$ há a formação de 2 horizontes de eventos.

E por fim, é interessante notar a semelhança entre das curvas apresentadas entre Cauchy e Lévy. O caso do buraco extremo na distribuição Gaussiana ocorre em $r_+ \approx 3\sqrt{\theta}$ e na distribuição de Cauchy ocorre em $r_+ = 1.75\sqrt{\theta}$. Mal tal semelhança não é coincidência, como vimos na seção 2.8.2 a distribuição Gaussiana e a de Cauchy, em linhas gerais, são bem próximas, a Gaussiana é obtida para um $\alpha = 2$ e a de Cauchy é obtida para um $\alpha = 1$, o que os torna distribuições bem próximas. Tal semelhança já possível ver nos formatos das curvas nos gráficos 2.5 e 2.7. Abaixo está o gráfico contendo o comportamento de g_{00} para todos os casos de distribuição.

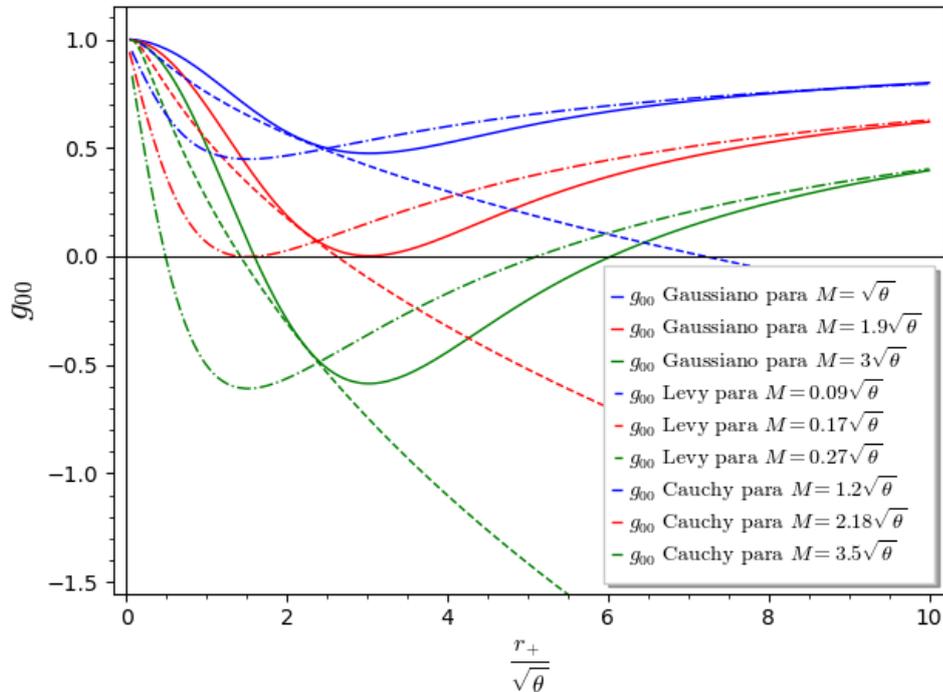


Figura 6.4: g_{00} em função de $\frac{r_+}{\sqrt{\theta}}$ para vários valores de M .

Vamos agora analisar o gráfico da distribuição de massa

Primeiramente é válido notar que ao tomarmos o limite $r_+ \rightarrow 0$ na expressão 6.5 da massa ela não se anula, de modo idêntico ao caso Gaussiano. O que significa dizer,

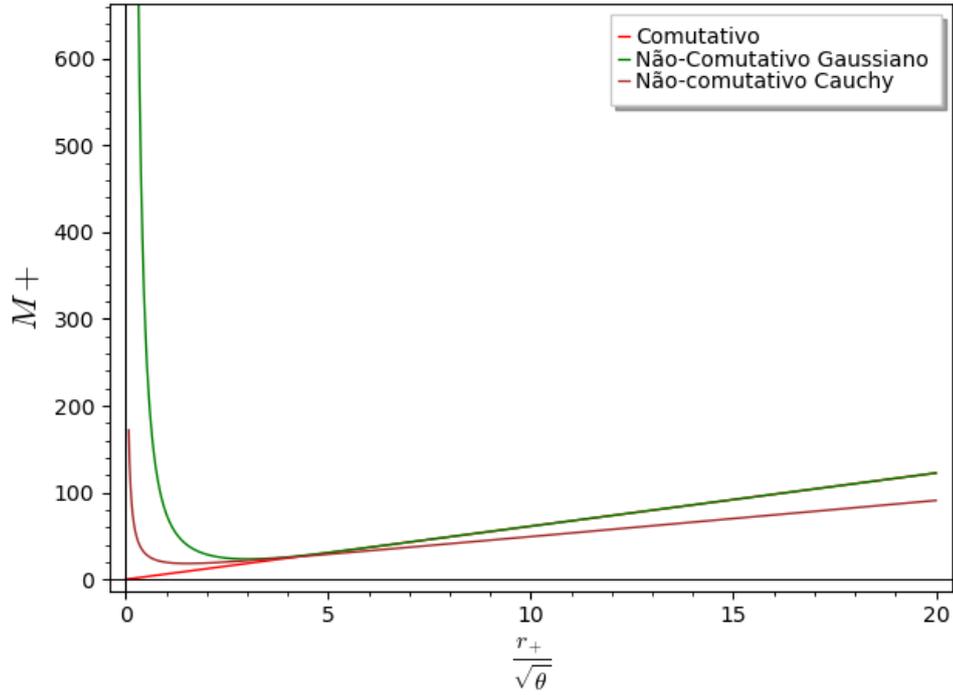


Figura 6.5: Massa nos casos comutativo e não-comutativo. No eixo vertical temos a massa e no eixo horizontal temos o raio do horizonte de eventos normalizado pelo comprimento de escala mínimo $\sqrt{\theta}$.

em outras palavras, que há um limite de evaporação do buraco negro, ele irá irradiar até uma determinada quantidade de massa restante.

Do gráfico 6.5 vemos que ambas as distribuições de massa à medida que $\frac{r_+}{\sqrt{\theta}}$ se aproxima de 0 explodem indefinidamente ao infinito mas de maneiras distintas, o que é esperado devido aos efeitos quânticos. Em $r_+ = 4\sqrt{\theta}$ há uma convergência entre os casos Gaussiano, comutativo e Cauchy e após esse ponto a distribuição de massa que segue a distribuição de Cauchy (linha marrom) aumenta de acordo com o crescimento de uma reta. No entanto, ao analisarmos no limite comutativo, quando $\frac{r_+}{\sqrt{\theta}} \rightarrow \infty$, na equação 6.8 recuperamos o caso comutativo.

E por fim, temos o gráfico 6.6 em que contém o comportamento da distribuição de massa nos três casos estudados.

6.3 Temperatura Hawking

A temperatura Hawking pode ser encontrada pelo mesmo método utilizado anteriormente, utilizando a equação 2.102

$$T_H = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{dg^{rr}}{dr} \right) \Big|_{r=r_+}. \quad (6.9)$$

explicitando a derivada

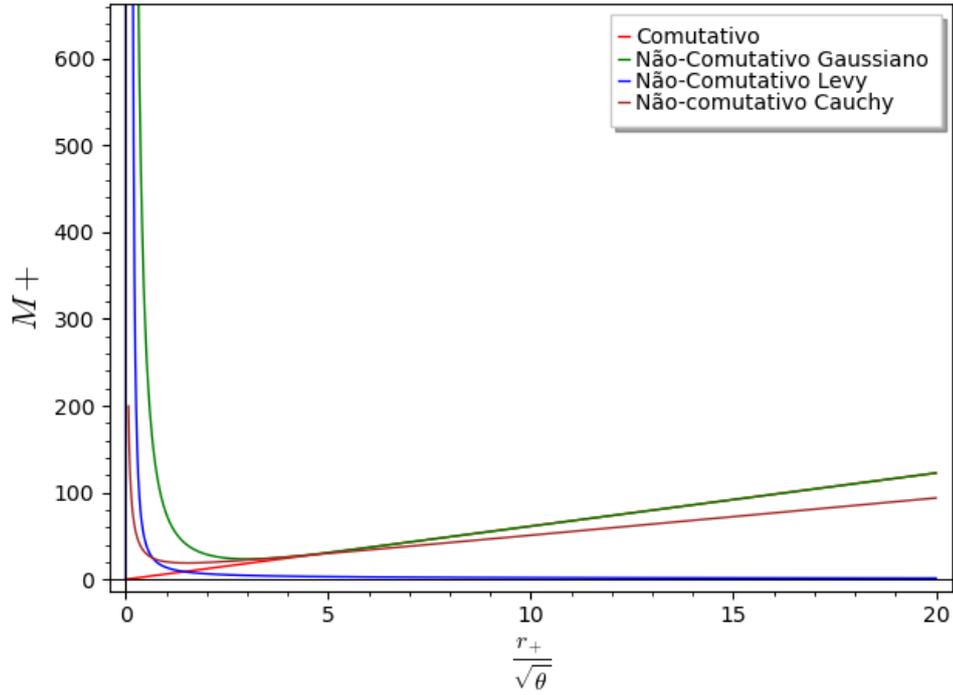


Figura 6.6: Massa nos casos comutativo e não-comutativo. No eixo vertical temos a massa e no eixo horizontal temos o raio do horizonte de eventos normalizado pelo comprimento de escala mínimo $\sqrt{\theta}$.

$$\left. \frac{dg^{rr}}{dr} \right|_{r=r_+} = 2M \left[\frac{1}{r_+^2} - \frac{2\sqrt{\theta} \tan^{-1}\left(\frac{r_+}{\sqrt{\theta}}\right)}{r_+^3} + \frac{r_+^2 \theta}{r_+^2 + \theta} \right]. \quad (6.10)$$

Com isso nós podemos obter uma expressão para a temperatura de Hawking em uma distribuição de Cauchy, que é dada por

$$T_H = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\left(1 - \frac{\sqrt{\theta} \tan^{-1}\left(\frac{r_+}{\sqrt{\theta}}\right)}{r_+}\right)} \left[\frac{1}{r_+} - \frac{2\sqrt{\theta} \tan^{-1}\left(\frac{r_+}{\sqrt{\theta}}\right)}{r_+^2} + \frac{r_+^2 \theta}{r_+^2 + \theta} \right]. \quad (6.11)$$

Um primeiro ponto importante que podemos retirar do gráfico 6.7 é que o buraco negro que segue a distribuição de Cauchy consegue atingir a temperatura zero próximo de $r_+ = \sqrt{\theta}$, enquanto que no caso de um buraco negro que segue a distribuição Gaussiana consegue atingir essa temperatura próximo de $r_+ = 3\sqrt{\theta}$. É válido mencionar que temperaturas negativas não fazem sentido em serem analisadas uma vez que trabalhamos com temperaturas absolutas, mas é necessário a sua plotagem para comparação com a distribuição Gaussiana e perceber suas similaridades. O gráfico também nos indica que a temperatura Hawking numa distribuição de Cauchy começa crescendo de forma suave e segue crescendo indefinidamente à medida que $\frac{r_+}{\sqrt{\theta}}$ aumenta. No entanto, ao se analisar a equação 6.11 no limite comutativo, quando $\frac{r_+}{\sqrt{\theta}}$, voltamos a ter o caso comuta-

tivo dado pela equação 4.36. E por fim temos o gráfico 6.8 que mostra o comportamento das temperatura Hawking em cada caso de distribuição.

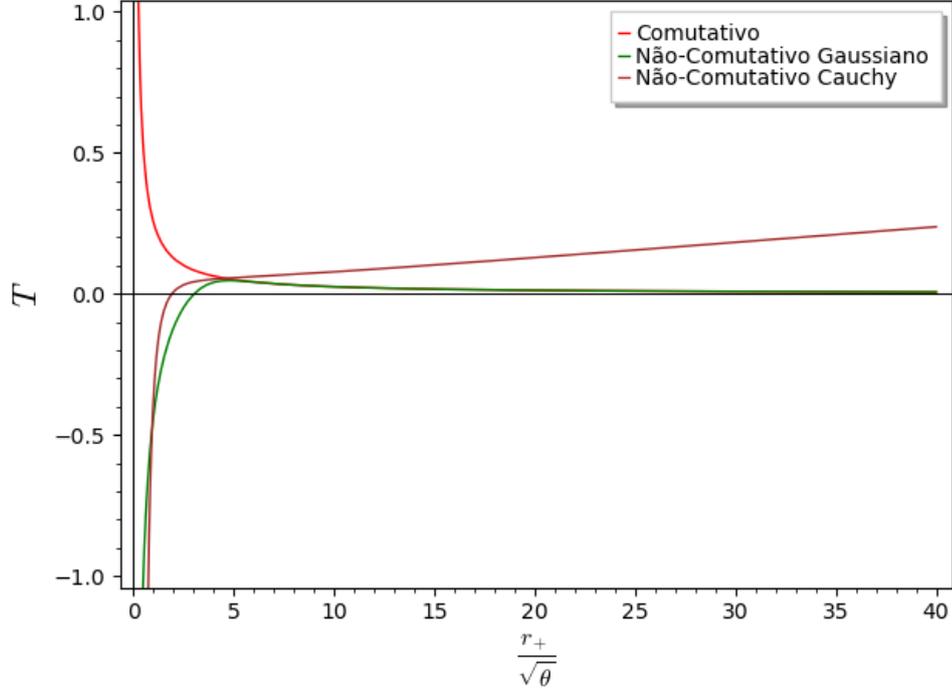


Figura 6.7: Temperatura Hawking nos casos comutativo, não-comutativo Gaussiano e Cauchy. No eixo vertical temos a temperatura de Hawking e no eixo horizontal temos o raio do horizonte de eventos normalizado pelo comprimento de escala mínimo $\sqrt{\theta}$.

6.4 Entropia

Podemos encontrar a entropia através de

$$S_+ = \int_0^{r_+} \frac{1}{T_H} \left(\frac{\partial M_+}{\partial r'_+} \right) dr'_+. \quad (6.12)$$

Explicitando a derivada da massa

$$\frac{\partial M_+}{\partial r'_+} = \frac{1}{2} \left[\frac{1 - \frac{2\sqrt{\theta} \tan^{-1}(\frac{r_+}{\sqrt{\theta}})}{r_+} - \frac{\theta}{r_+^2 + \theta}}{\left(1 - \frac{\sqrt{\theta} \tan^{-1}(\frac{r_+}{\sqrt{\theta}})}{r_+}\right)^2} \right]. \quad (6.13)$$

Uma vez que temos a derivada da massa podemos facilmente encontrar uma expressão para entropia

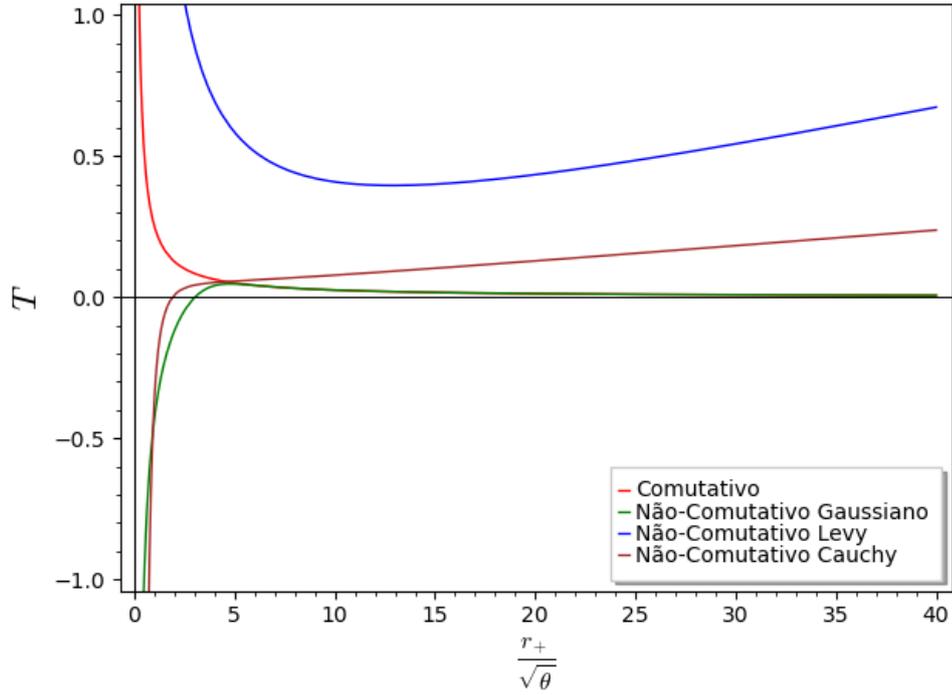


Figura 6.8: Temperatura Hawking nos casos comutativo, não-comutativo Gaussiano, Lévy e Cauchy. No eixo vertical temos a temperatura de Hawking e no eixo horizontal temos o raio do horizonte de eventos normalizado pelo comprimento de escala mínimo $\sqrt{\theta}$.

$$\begin{aligned}
 S_+ = \int_0^{r_+} 4\pi \left(1 - \frac{\sqrt{\theta} \tan^{-1}\left(\frac{r'_+}{\sqrt{\theta}}\right)}{r'_+} \right) & \left[\frac{1}{r'_+} - \frac{2\sqrt{\theta} \tan^{-1}\left(\frac{r'_+}{\sqrt{\theta}}\right)}{r'^2_+} + \frac{r'^2_+ \theta}{r'^2_+ + \theta} \right]^{-1} \\
 \cdot \frac{1}{2} & \left[\frac{1 - \frac{2\sqrt{\theta} \tan^{-1}\left(\frac{r'_+}{\sqrt{\theta}}\right)}{r'_+} - \frac{\theta}{r'^2_+ + \theta}}{\left(1 - \frac{\sqrt{\theta} \tan^{-1}\left(\frac{r'_+}{\sqrt{\theta}}\right)}{r'_+} \right)^2} \right] dr'_+. \quad (6.14)
 \end{aligned}$$

Um primeiro ponto a se analisar é que é possível identificar, através de 6.12, que a temperatura de Hawking na distribuição de Cauchy possui 1 polo simples e o motivo para tal é que observando o gráfico 6.9 podemos ver uma assíntota em $r_+ \approx \sqrt{\theta}$, indicando que há uma inversão de sinal da entropia. Entretanto essa inversão no sinal da entropia será ignorada, uma vez que não faz sentido analisar entropia negativa. Um outro ponto importante a se observar é a proximidade entre as curvas da entropia na distribuição de Cauchy e Gaussiana, tal proximidade, como já explicado anteriormente, se deve à aproximação entre a distribuição Gaussiana e a distribuição de Cauchy, corroborando com o resultado obtido. No entanto, ao analisar no limite comutativo, quando $\frac{r_+}{\sqrt{\theta}} \rightarrow \infty$, nós recuperamos o caso comutativo mostrado na equação 4.43.

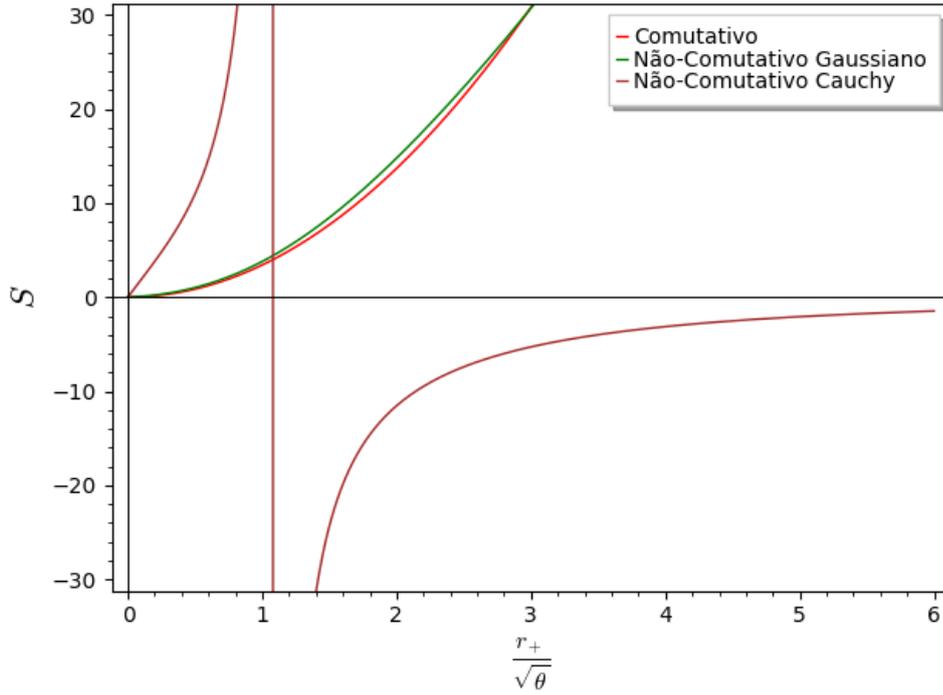


Figura 6.9: Entropia nos casos comutativo e não-comutativo Gaussiano e Cauchy. No eixo vertical temos a Entropia e no eixo horizontal temos o raio do horizonte de eventos normalizado pelo comprimento de escala mínimo $\sqrt{\theta}$.

6.5 Capacidade calorífica

Podemos encontrar a capacidade calorífica da seguinte maneira

$$C_+ = \left(\frac{\partial M_+}{\partial r_+} \right) \left(\frac{\partial T_H}{\partial r_+} \right)^{-1}. \quad (6.15)$$

Mas já possuímos a derivada da massa, vamos explicitar agora a derivada da temperatura Hawking

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_H}{\partial r_+} = \frac{1}{4\pi} & \left[\left(\frac{\frac{r_+\theta}{r_+^2 + \theta} - \sqrt{\theta} \tan^{-1}\left(\frac{r_+}{\sqrt{\theta}}\right)}{\left(r_+^2 \left(1 - \frac{\sqrt{\theta} \tan^{-1}\left(\frac{r_+}{\sqrt{\theta}}\right)}{r} \right)^2 \right)} \left(\frac{1}{r_+} - \frac{2\sqrt{\theta} \tan^{-1}\left(\frac{r_+}{\sqrt{\theta}}\right)}{r_+^2} + \frac{r_+^3 \theta}{r_+^2 + \theta} \right) \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{\left(1 - \frac{\sqrt{\theta} \tan^{-1}\left(\frac{r_+}{\sqrt{\theta}}\right)}{r} \right)} \left(-\frac{1}{r_+^2} - \frac{2r^2\theta}{r_+^2 + \theta} - \frac{4\sqrt{\theta} \tan^{-1}\left(\frac{r_+}{\sqrt{\theta}}\right)r_+}{r_+^4} + \frac{r_+^4\theta + 3r_+^2\theta^2}{(r_+^2 + \theta)^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (6.16)$$

Dividindo 6.13 por 6.16 podemos obter uma expressão para a capacidade térmica

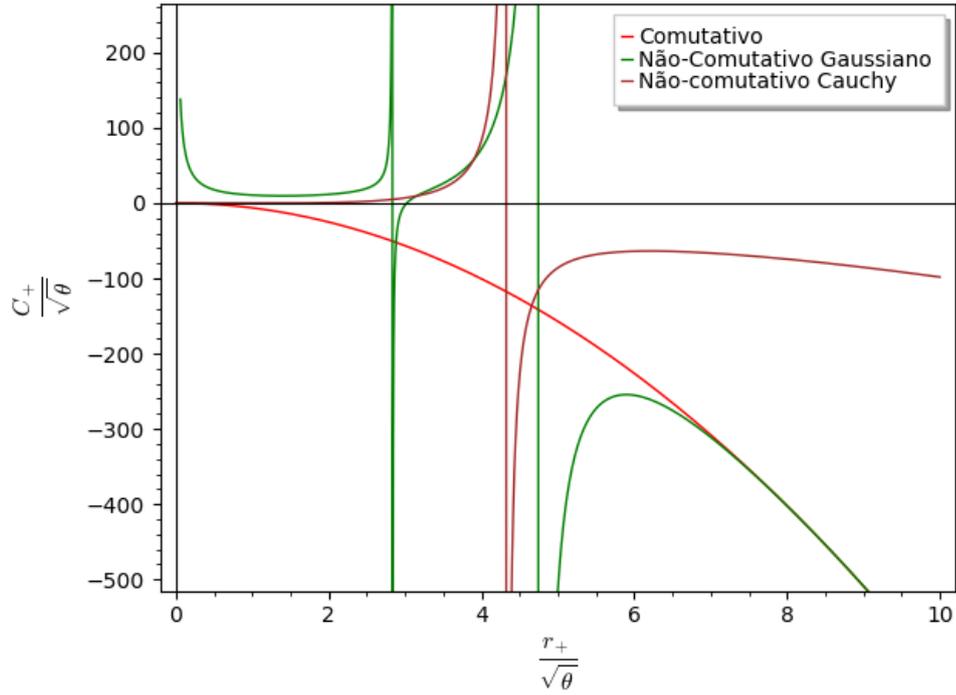


Figura 6.10: Capacidade calorífica nos casos comutativo, não-comutativo Gaussiano e Cauchy. No eixo vertical temos a capacidade térmica normalizado pelo comprimento de escala mínimo $\sqrt{\theta}$ e no eixo horizontal temos o raio do horizonte de eventos normalizado pelo comprimento de escala mínimo $\sqrt{\theta}$.

Podemos ver diretamente do gráfico que a capacidade térmica na distribuição de Cauchy houve apenas uma assíntota, no nosso caso em $r_+ \approx 4.5\sqrt{\theta}$, o que significa dizer que a função $\partial T_H / \partial r_+$ tem apenas 1 polo, de modo análogo a capacidade térmica na distribuição de Lévy que também apresentou 1 único polo. Isso significa dizer que um buraco negro que segue a distribuição de Cauchy há apenas um único momento em que ocorre a inversão de sinal na capacidade térmica. Um outro ponto interessante, é que diferente dos demais casos, no caso da capacidade térmica que segue a distribuição de Cauchy é possível que ele chegue a $C_+ = 0$ em $r_+ = 0$, indicando que ele não troca calor a essas distâncias. No entanto, ao se analisar no limite comutativo, quando $\frac{r_+}{\sqrt{\theta}} \rightarrow \infty$, nós obtemos de volta o caso comutativo dado pela equação 4.49. E abaixo está o gráfico com o comportamento da capacidade calorífica para os três casos estudados.

6.6 Energia interna

Podemos encontrar a energia interna através de

$$E = M_0 + \int_{r_0}^{r_+} T(r'_+, R) \left(\frac{\partial S'_+}{\partial r'_+} \right) dr'_+. \quad (6.17)$$

Vamos primeiramente explicitar quem é $T(r'_+, R)$ usando 4.61

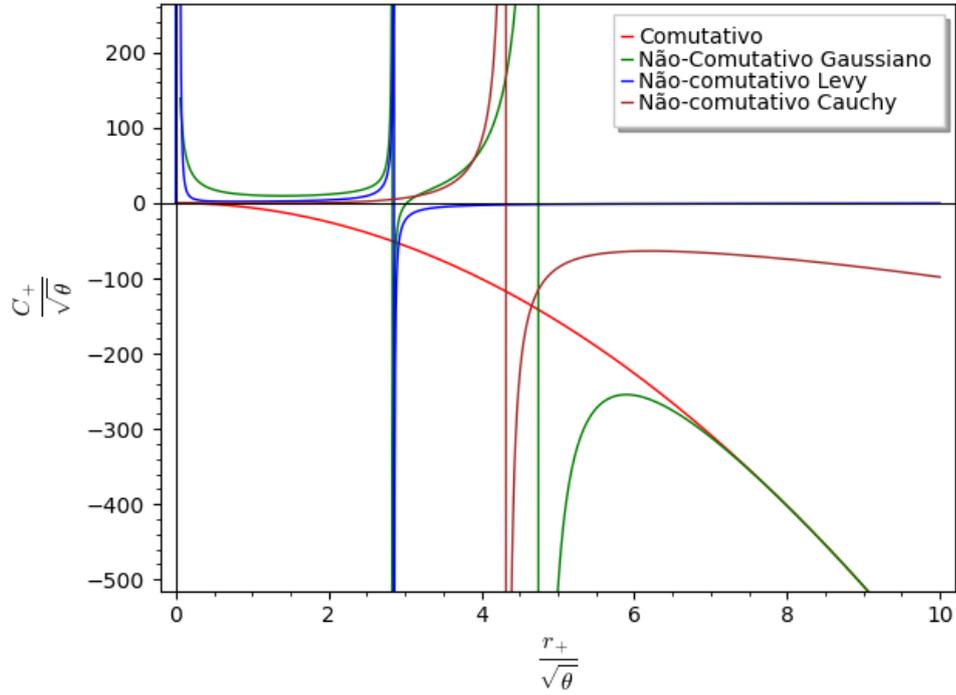


Figura 6.11: Capacidade calorífica nos casos comutativo, não-comutativo Gaussiano, Lévy e Cauchy. No eixo vertical temos a capacidade térmica normalizado pelo comprimento de escala mínimo $\sqrt{\theta}$ e no eixo horizontal temos o raio do horizonte de eventos normalizado pelo comprimento de escala mínimo $\sqrt{\theta}$.

$$T = \frac{\frac{1}{4\pi} \frac{1}{\left(1 - \frac{\sqrt{\theta} \tan^{-1}\left(\frac{r_+}{\sqrt{\theta}}\right)}{r}\right)} \left(\frac{1}{r_+} - \frac{2\sqrt{\theta} \tan^{-1}\left(\frac{r_+}{\sqrt{\theta}}\right)}{r_+^2} + \frac{r_+^3 \theta}{r_+^2 + \theta} \right)}{\sqrt{1 - \frac{r_+}{R} \frac{1}{\left(1 - \frac{\sqrt{\theta} \tan^{-1}\left(\frac{r_+}{\sqrt{\theta}}\right)}{r}\right)} \left(1 - \frac{\sqrt{\theta} \tan^{-1}\left(\frac{R}{\sqrt{\theta}}\right)}{R}\right)}}. \quad (6.18)$$

Precisamos agora saber quem é dS'_+ para conseguir encontrar a energia interna, basta utilizar a seguinte regra da cadeia

$$dS'_+ = \left(\frac{\partial S'_+}{\partial r'_+} \right) dr'_+. \quad (6.19)$$

Que obteremos

$$dS'_+ = \left[4\pi \left(1 - \frac{\sqrt{\theta} \tan^{-1}\left(\frac{r_+}{\sqrt{\theta}}\right)}{r_+} \right) \left[\frac{1}{r_+} - \frac{2\sqrt{\theta} \tan^{-1}\left(\frac{r_+}{\sqrt{\theta}}\right)}{r_+^2} + \frac{r_+^2 \theta}{r_+^2 + \theta} \right]^{-1} \right. \\ \left. \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \frac{2\sqrt{\theta} \tan^{-1}\left(\frac{r_+}{\sqrt{\theta}}\right)}{r_+} - \frac{\theta}{r_+^2 + \theta}}{\left(1 - \frac{\sqrt{\theta} \tan^{-1}\left(\frac{r_+}{\sqrt{\theta}}\right)}{r_+} \right)^2} \right) \right] dr'_+. \quad (6.20)$$

Basta substituir 6.20 e 6.18 em 6.17 que é possível obter uma expressão para a energia, não deixarei ela digitada aqui porque é demasiadamente grande e seria difícil obter uma boa visualização. Devido a complexidade da integral não foi possível obter um gráfico para análise, entretanto quando analisamos a energia interna na distribuição de Cauchy, quando $\frac{r_+}{\sqrt{\theta}} \rightarrow \infty$ voltamos ao caso comutativo dado pela equação 4.60.

6.7 Energia Livre

Para encontrar a energia livre basta usar a equação

$$F = E - TS_+. \quad (6.21)$$

Já possuímos todos os ingredientes para encontrar a energia livre, a energia interna foi obtida na seção anterior, T é dado pela equação 6.18 e a entropia é dado por 6.14. Pelo mesmos motivos apresentados na energia interna, não foi possível obter um gráfico para análise devido a complexidade da integral apresentada. No entanto, ao se analisar no limite comutativo, quando $\frac{r_+}{\sqrt{\theta}} \rightarrow \infty$, nós obtemos como resultado o caso comutativo dado pela equação 4.72.

Capítulo 7

Conclusões e Perspectivas

Nesta dissertação, focamos na investigação do comportamento do espaço-tempo não-comutativo quando aplicado a buracos negros esféricos e estáticos, um tema de grande relevância na física teórica moderna. A ideia central foi explorar como as modificações nas distribuições e nas propriedades geométricas do espaço-tempo, decorrentes da introdução de não-comutatividade, afetam aspectos fundamentais dos buracos negros, como suas propriedades termodinâmicas, o comportamento da distribuição de massa e do tensor de Energia-Momento. Buracos negros, na relatividade geral, são regiões do espaço-tempo onde o campo gravitacional é tão intenso que nada, nem mesmo a luz, pode escapar. Um dos buracos negros mais simples, e o que foi alvo de estudo aqui nessa dissertação, é o buraco negro de Schwarzschild, que é esférico e estático. Quando incorporamos a ideia de não-comutatividade, estamos introduzindo um conceito da mecânica quântica que permite que certas coordenadas espaciais ou temporais não comutem entre si, isto é, que o produto dessas coordenadas dependa da ordem em que são multiplicadas. Nosso objetivo com essa abordagem foi investigar como essa modificação afeta a estrutura clássica de um buraco negro, em particular no que diz respeito ao seu horizonte de eventos. A hipótese central é que, ao alterar as propriedades do espaço-tempo para outras distribuições além da usualmente convencionada, que é a distribuição Gaussiana, em escalas microscópicas (como aquelas próximas ao comprimento mínimo $\sqrt{\theta}$), podemos observar novas características ou ajustes nas propriedades termodinâmicas do buraco negro, como sua temperatura de Hawking, entropia, energia interna, etc... Além disso, examinar cenários não-comutativo em distribuições não Gaussianas pode nos fornecer uma ponte para conectar a gravidade quântica e a relatividade geral. Neste sentido, nossa investigação se propôs a abrir caminhos para melhor entender as correções quânticas ao comportamento clássico dos buracos negros.

Levando em consideração os resultados obtidos sobre o buraco negro esférico e estático em distribuições não Gaussianas, um primeiro aspecto que deve ser mencionado é que devido as dificuldades de natureza quântica do espaço-tempo, levam a não haver um consenso científico sobre a não-comutatividade do espaço-tempo. Portanto, a nossa

contribuição é tentar compreender as distribuições de massa e as propriedades termodinâmicas no contexto da álgebra do espaço-tempo e isto leva a necessidade de redefinir constantes e limites. Ademais, podemos observar que as propriedades termodinâmicas, de fato, só convergem para uma distribuição Gaussiana. Em outras distribuições, apesar de previsões teóricas indicarem o contrário, essa convergência não ocorre. No entanto, é possível identificar um "padrão" ao analisar os gráficos. De maneira geral, uma distribuição Gaussiana é obtida ao fixarmos $\alpha = 2$ na equação 2.104, enquanto a distribuição de Cauchy emerge ao definirmos $\alpha = 1$ e a distribuição de Lévy é obtida com $\alpha = 1/2$. Com isso, concluímos que a distribuição de Cauchy serve como um "meio-termo" entre as distribuições Gaussiana e Lévy, algo que é corroborado pelos gráficos. Ao observarmos o gráfico 6.6, referente à distribuição de massa, no limite comutativo $\frac{r_+}{\sqrt{\theta}} \rightarrow \infty$, percebemos que a convergência com o cenário comutativo ocorre à medida que α se aproxima de 2, ou seja, à medida que se aproxima da distribuição Gaussiana. Esse comportamento se repete nos gráficos 6.8 e 6.11, que representam, respectivamente, a temperatura de Hawking e a capacidade térmica.

Apesar dos resultados significativos obtidos em nossa investigação, é importante reconhecer as limitações ao modelo utilizado. Em nosso estudo, assumimos que o buraco negro é esférico e estático, o que implica uma esfericidade perfeita e isotropia (ou seja, a ausência de qualquer dependência direcional nas propriedades do buraco negro). No entanto, essa simplificação pode não capturar toda a complexidade dos cenários mais realistas, especialmente quando consideramos buracos negros rotacionais ou aqueles interagindo com matéria externa. Um exemplo dessa limitação pode ser observado na análise das distribuições não Gaussianas, onde vimos que as propriedades termodinâmicas do buraco negro tendem a convergir apenas para a distribuição Gaussiana no limite comutativo. As distribuições de Cauchy e Lévy, embora teoricamente promissoras, não apresentam a mesma convergência.

Portanto, fica como uma perspectiva futura o aprimoramento dos resultados obtidos e uma realização de um estudo mais aprofundado sobre os aspectos abordados nesta dissertação. Além disso, um estudo mais detalhado de certos parâmetros, ou até a inclusão de novas abordagens teóricas, o qual pode fornecer correções e novas perspectivas que aprimorariam o modelo atual.

Apêndice A

Função Gamma

Definições

A função Gamma, denotada por $\Gamma(s)$, é definida da seguinte maneira [13]

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} t^{s-1} e^{-t} dt \quad (\text{A.1})$$

De forma que ao dividir o intervalo da integral em um ponto $x \geq 0$ podemos obter as duas funções gamma incompleta

$$\gamma(s, x) = \int_0^x t^{s-1} e^{-t} dt \quad (\text{A.2})$$

$$\Gamma(s, x) = \int_x^{\infty} t^{s-1} e^{-t} dt \quad (\text{A.3})$$

Em que uma propriedade fundamental entre essas funções gamma é

$$\Gamma(s) = \gamma(s, x) + \Gamma(s, x) \quad (\text{A.4})$$

A função A.3 também é conhecida como a função de Prym, que foi um matemático alemão conhecido por seus trabalhos em geometria. É uma vez que consideramos que tais funções são funções da variável x e do parâmetro fixo s é possível notar que no limite $x \rightarrow 0$ o comportamento da função gamma incompleta inferior é tender a uma função gamma $\gamma(s, x \rightarrow 0) \rightarrow \Gamma(s)$, uma vez que

$$\gamma(s, \infty) = \int_0^{\infty} t^{s-1} e^{-t} dt = \Gamma(s) \quad (\text{A.5})$$

E essa é uma das propriedades mais fundamentais e utilizadas no nosso trabalho.

Algumas Propriedades

Destacaremos aqui algumas propriedades sobre as funções gamma

- **Expansão em série**

A função gamma incompleta, como vimos anteriormente, tem a seguinte definição

$$\gamma(s, x) = \int_0^x t^{s-1} e^{-t} dt \quad (\text{A.6})$$

Transformando a exponencial sua forma de expansão em série de potência ficamos assim

$$\int_0^x t^{s-1} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^k}{k!} dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^x t^{s+k-1} dt \quad (\text{A.7})$$

Resolvendo a integral e ajustando os termos obteremos a sua expressão para expansão em série

$$\gamma(s, x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{s+k}}{(s+k)k!} \quad (\text{A.8})$$

Tal expansão é série vai ser fundamental para explicarmos logo em seguida a propriedade da derivada da função gamma

- **Derivada**

Existe uma relação entre as derivadas e ela é dada por

$$\frac{\partial \gamma(s, x)}{\partial x} = -\frac{\partial \Gamma(s, x)}{\partial x} = x^{s-1} e^{-x} \quad (\text{A.9})$$

Que pode ser verificada usando a expansão em série obtida anteriormente

$$\frac{\partial}{\partial x} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{s+k}}{(s+k)k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(s+k)k!} \frac{\partial x^{s+k}}{\partial x} = x^{s-1} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k!} = x^{s-1} e^{-x} \quad (\text{A.10})$$

- **Expansão assintótica**

Essa parte é especialmente útil no desenvolvimento feito na seção das energias livre no caso da distribuições Gaussiana e Lévy. Usando A.4 Podemos escrever a expansão assintótica da função gamma incompleta inferior da seguinte forma [6], [7]

$$\begin{aligned}\gamma(s+1, x) &= \Gamma(n+1) - \Gamma(n+1, x) \\ &= \Gamma(n+1) - e^{-x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-k)} x^{n-k}\end{aligned}\quad (\text{A.11})$$

Mas no nosso caso, visto no capítulo 4, $n+1 = s = 3/2$ e $x = \frac{r_+^2}{4\theta}$, de forma que podemos reescrever da seguinte maneira

$$\begin{aligned}\gamma\left(\frac{3}{2}, x\right) &= \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) - \Gamma\left(\frac{3}{2}, x\right) \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left[1 - e^{-x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{1-2k/2}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}-k\right)} \right] \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left[1 - \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}/2} e^{-x} \right] \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left[1 - \frac{r'_+}{\sqrt{\pi}\sqrt{\theta}} e^{-\frac{r_+^2}{4\theta}} \right]\end{aligned}\quad (\text{A.12})$$

Já a função gamma incompleta superior tem a sua expansão assintótica escrita da seguinte forma

$$\begin{aligned}\Gamma(s, x) &= \Gamma(s) - \gamma(s, x) \\ &= \Gamma(s) - e^{-x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{s+k}}{s(s+1)\cdots(s+k)} \\ &= \Gamma(s) - e^{-x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(s)x^{s+k}}{\Gamma(s+k+1)} \\ &= \Gamma(s) \left[e^{-x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{s+k}}{\Gamma(s+k+1)} \right]\end{aligned}\quad (\text{A.13})$$

No nosso caso, visto no capítulo 5, $s = -3/2$ e $x = \frac{\sqrt{\theta}}{4r_+}$.

$$\Gamma\left(-\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{\theta}}{4r_+}\right) = \frac{4\sqrt{\pi}}{3} \left[1 + e^{\frac{\sqrt{\theta}}{4r_+}} \frac{4r_+^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi}} \right]\quad (\text{A.14})$$

• Relações úteis

$$\Gamma(1, x) = e^{-x} \tag{A.15}$$

$$\gamma(1, x) = 1 - e^{-x} \tag{A.16}$$

$$\gamma\left(\frac{1}{2}, x\right) = \sqrt{\pi} \operatorname{erf}(\sqrt{x}) \tag{A.17}$$

$$\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x) \tag{A.18}$$

E com A.18 podemos mostrar a seguinte relação $s(s + 1) \cdots (s + k) = \frac{\Gamma(s+k+1)}{\Gamma(s)}$

$$\begin{aligned} \Gamma(s + k + 1) &= (s + k)\Gamma(s + k) \\ \Gamma(s + k) &= (s + k - 1)\Gamma(s + k - 1) \\ &\vdots \\ \Gamma(s + 1) &= s\Gamma(s) \end{aligned} \tag{A.19}$$

com isso podemos concluir que

$$\begin{aligned} \Gamma(s + k + 1) &= (s + k)(s + k - 1) \cdots (s + 1)s\Gamma(s) \\ \frac{\Gamma(s + k + 1)}{\Gamma(s)} &= s(s + 1) \cdots (s + k - 1)(s + k) \end{aligned} \tag{A.20}$$

Referências Bibliográficas

- [1] ALMEIDA, C. R. As soluções de buracos negros: 1916-1965. *Cadernos de Astronomia* 4, 1 (2023), 16–34.
- [2] BEKENSTEIN, J. D. Black holes and entropy. *Physical Review D* 7, 8 (1973), 2333.
- [3] CARROLL, S. M. *Spacetime and geometry*. Cambridge University Press, 2019.
- [4] DE OLIVEIRA, M. J. *Termodinâmica*. Editora Livraria da Física, 2005.
- [5] DE SANTI, N. *Termodinâmica de buracos negros de Schwarzschild*. PhD thesis, Dissertação de mestrado, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2018.
- [6] DUARTE, J. C. R. V., ET AL. Efeitos da não-comutatividade do espaço-tempo sobre as propriedades termodinâmicas da corda negra.
- [7] EDITION, S. Table of integrals, series, and products.
- [8] GOHAR, H., AND SAIFULLAH, K. Emission of scalar particles from cylindrical black holes. *Astrophysics and Space Science* 343 (2013), 181–185.
- [9] GOHAR, H., AND SAIFULLAH, K. Quantum tunneling from scalar fields in rotating black strings. *Astroparticle Physics* 48 (2013), 82–85.
- [10] HASSANI, S. *Mathematical methods: for students of physics and related fields*, vol. 2. Springer, 2009.
- [11] HAWKING, S. W. Particle creation by black holes. *Communications in mathematical physics* 43, 3 (1975), 199–220.
- [12] HERDEIRO, C. Notas de teoria da relatividade.
- [13] JAMESON, G. The incomplete gamma functions. *The Mathematical Gazette* 100, 548 (2016), 298–306.
- [14] JEFREMOV, P. I., TSUPKO, O. Y., AND BISNOVATYI-KOGAN, G. S. Innermost stable circular orbits of spinning test particles in schwarzschild and kerr space-times. *Physical Review D* 91, 12 (2015), 124030.

- [15] KIM, W., SON, E. J., AND YOON, M. Thermodynamic similarity between the non-commutative schwarzschild black hole and the reissner-nordström black hole. *Journal of High Energy Physics 2008*, 04 (2008), 042.
- [16] LAMBOURNE, R. J. A. *Relativity*. Cambridge University Press, 2003.
- [17] LEMOS, N. A. *Mecânica analítica*. Universidade Federal Fluminense, 2000.
- [18] LIU, X., AND LIU, W. Hawking temperature calculation using tunneling mechanism. *International Journal of Theoretical Physics 48* (2009), 3614–3622.
- [19] MACKENZIE, D., LEUNG-SEA, S., AND MUNIESA, F. Do economists make markets?: on the performativity of economics.
- [20] MAINARDI, F. Lévy stable distributions in the theory of probability. *Lecture Notes on Mathematical Physics* (2007).
- [21] MIAO, Y.-G., AND XU, Z.-M. Thermodynamics of noncommutative high-dimensional ads black holes with non-gaussian smeared matter distributions. *The European Physical Journal C 76* (2016), 1–13.
- [22] MYUNG, Y. S., AND YOON, M. Regular black hole in three dimensions. *The European Physical Journal C 62* (2009), 405–411.
- [23] NICOLINI, P. Noncommutative black holes, the final appeal to quantum gravity: a review. *International Journal of Modern Physics A 24*, 07 (2009), 1229–1308.
- [24] NICOLINI, P., SMAILAGIC, A., AND SPALLUCCI, E. The fate of radiating black holes in noncommutative geometry. In *Beyond Einstein-Physics for the 21st Century* (2006), vol. 637.
- [25] NICOLINI, P., SMAILAGIC, A., AND SPALLUCCI, E. Noncommutative geometry inspired schwarzschild black hole. *Physics Letters B 632*, 4 (2006), 547–551.
- [26] NOGUEIRA, M. N. V. Termodinâmica de uma solução do tipo schwarzschild com uma teoria de gauge não-comutativa da gravidade.
- [27] ORNELLAS, T. M. Um estudo da teoria de campo gravitacional de einstein, 2023.
- [28] PARIKH, M. K., AND WILCZEK, F. Hawking radiation as tunneling. *Physical review letters 85*, 24 (2000), 5042.
- [29] PASSOS, F. S., ET AL. O teorema das seções de lévy aplicado à séries temporais correlacionadas não estacionárias: uma análise da convergência gaussiana em sistemas dinâmicos.

- [30] PELICER, M. R. Cálculo tensorial e relatividade geral. *Monografia: Universidade Estadual de Maringá* (2016).
- [31] PENG, C.-K., MIETUS, J., HAUSDORFF, J., HAVLIN, S., STANLEY, H. E., AND GOLDBERGER, A. L. Long-range anticorrelations and non-gaussian behavior of the heartbeat. *Physical review letters* 70, 9 (1993), 1343.
- [32] RAJ KUMAR PATHRIA, P. B. *Statistical Mechanics*, 3 ed. ELSEVIER, 2011.
- [33] ROCHA, É. C. Estrutura analítica complexa das distribuições estáveis de lévy.
- [34] SILVA, A. T. N. D., ET AL. Termodinâmica de um buraco negro btz com um comprimento mínimo.
- [35] SILVA, R. F. D. Estudo dos efeitos do espaço-tempo não comutativo no buraco negro de schwarzschild.
- [36] SNYDER, H. S. Quantized space-time. *Physical Review* 71, 1 (1947), 38.
- [37] SPALLUCCI, E., SMAILAGIC, A., AND NICOLINI, P. Non-commutative geometry inspired higher-dimensional charged black holes. *Physics Letters B* 670, 4-5 (2009), 449–454.
- [38] SRINIVASAN, K., AND PADMANABHAN, T. Particle production and complex path analysis. *Physical Review D* 60, 2 (1999), 024007.
- [39] THORNTON, S. T., AND MARION, J. B. *Dinâmica clássica de partículas e sistemas*. Cengage Learning, 2011.
- [40] TRANCANELLI, D. Grandezas físicas e análise dimensional: da mecânica à gravidade quântica. *Revista Brasileira de Ensino de Física* 38 (2016), e2505.