Universidade Federal Rural de Pernambuco

Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação

Departamento de Física

Programa de Pós-Graduação em Física Aplicada

TRAJETÓRIAS DA LUZ NA PROXIMIDADE DE UM BURACO NEGRO DE SCHWARZSCHILD PERFURADO POR UMA CORDA CÓSMICA

Lucas Leandro Amorim Pereira

Dissertação de Mestrado

Recife - PE

16 de Outubro de 2024

Universidade Federal Rural de Pernambuco
Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação
Departamento de Física

Lucas Leandro Amorim Pereira

TRAJETÓRIAS DA LUZ NA PROXIMIDADE DE UM BURACO NEGRO DE SCHWARZSCHILD PERFURADO POR UMA CORDA CÓSMICA

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Física Aplicada do Departamento de Física da Universidade Federal Rural de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Física Aplicada.

Orientador: Prof. Dr. Antônio de Pádua Santos

Recife - PE
16 de Outubro de 2024

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Sistema Integrado de Bibliotecas da UFRPE
Bibliotecário(a): Ana Catarina Macêdo – CRB-4 1781

P436t Pereira, Lucas Leandro Amorim.

Trajetórias da luz na proximidade de um buraco negro de schwarzschild perfurado por uma corda cósmica / Lucas Leandro Amorim Pereira. – Recife, 2024.

79 f.; il.

Orientador(a): Antônio de Pádua Santos

Dissertação (Mestrado) Universidade Federal Rural de Pernambuco, Programa de Pós-Graduação em Física Aplicada, Recife, BR-PE, 2024.

Inclui referências.

1. Buracos negros (Astronomia). 2. Einstein, Equações de. 3. Relatividade geral (Física). 4. Schwarzschild, Karl, 1873-1916 I. Santos, Antônio de Pádua, orient. II. Título

CDD 621

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA APLICADA

TRAJETÓRIAS DA LUZ NA PROXIMIDADE DE UM BURACO NEGRO DE SCHWARZSCHILD PERFURADO POR UMA CORDA CÓSMICA

Lucas Leandro Amorim Pereira

Dissertação julgada adequada para obtenção do título de mestre em Física, defendida e aprovada por unanimidade em 16 de Outubro de 2024 pela Comissão Examinadora.

Orientador:

Prof. Dr. Antônio de Pádua Santos
DF/ UFRPE

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Adauto José Ferreira de Souza
DF/ UFRPE

Prof. Dr. Alexandre Manoel de Morais Carvalho
Examinador Externo - Instituto de Física /UFAL

“ O importante é não parar de questionar; a curiosidade tem sua própria razão de existir.”

Albert Einstein

Agradecimentos

Primeiramente à Deus por toda saúde força para superar cada dificuldade e obstáculo durante esse tempo como Mestrando.

Aos meus pais, Roselice Pereira e Jeremias Pereira, meus avós maternos Arcângela Amorim e Ermínio Pereira, meus avós Paternos Maria das Graças Pereira e José Atanásio Pereira, por todo amor, carinho, conselhos e ajudas para que eu pudesse conseguir meus objetivos. Por todas as forças nos momentos mais difíceis e pela confiança nos melhores momentos. A minha outra Mãe Tatiane Coelho que sempre me propôs amor e carinho desde criança e que sempre esteve ao meu lado quando precisei. A minha tia Rosete Barbosa e Minha Avó Vicentina Pereira por toda ajuda que me deram durante os anos em que convivi com elas, pela paciência e carinho e afeto.

Ao Prof. Dr. Antônio de Pádua Santos, por sua excelente orientação durante os dois anos de Mestrado e também no desenvolvimento deste trabalho, por todos os conselhos dado ao longo desses anos, por sua paciência e credibilidade para comigo. Bem como, gostaria de agradecer aos Professores: Dr. Adauto José, Dr. José Ferraz, Dr. Anderson Barbosa e a todos os membros que fazem parte do curso de Pós-Graduação em Física Aplicada da UFRPE.

Aos meus amigos do Mestrado: Marcos André (Piauí), João Victor, Miqueias Carneiro, Anderson Fernandes, Ruan Victor, Johnny José, Laedson Silva, Antônio Neto (*Toinho*).

Aos meus amigos/irmãos desde a graduação: Darlene Pereira e Gustavo Santana pela amizade sincera e apoio em todos os momentos.

Em especial a Jhowcy Rodrigues por toda a paciência, apoio, dedicação, ajuda, por sua companhia, amor e carinho nos bons e piores momentos.

Resumo

Neste trabalho vamos discutir sobre a interação entre um Buraco Negro de Schwarzschild e uma Corda cósmica. Onde esse trabalho foi inspirado a uma pesquisa publicada na "*The Astrophysical Journal Letters*" com o seguinte tema: **A Nonthermal Radio Filament Connected to the Galactic Black Hole?** (Um filamento de rádio não térmico conectado ao buraco negro galáctico?). Nessa pesquisa foi investigado o um filamento de rádio não térmico (em inglês, *nonthermal radio filament*) (NTF) que foi encontrado próximo ao Buraco Negro *Sagittarius* A^*, onde foram examinados implicações potenciais, onde foi considerado a possibilidade de que esse filamento seja a manifestação de uma *Corda Cósmica*. Com isso, através da *Equação de Campo de Einstein* chegamos a *Métrica de Schwarzschild* que descreve o espaço-tempo ao redor de uma massa esférica não carregada e não rotativa, como um Buraco Negro de Schwarzschild. Esta é uma solução exata das equações de campo de Einstein na Relatividade Geral e é expressa em coordenadas esféricas (t, r, θ, ϕ). Ao inserirmos o *déficit angular* da Métrica da Corda cósmica na Métrica de Schwarzschild, conseguimos obter o comportamento de uma partícula nas próximidades de um Buraco Negro de Schwarzschild perfurado por uma Corda cósmica.

Palavras-chave: Buraco Negro de Schwarzschild, Cordas Cósmicas, Relatividade Geral

Abstract

In this paper we will discuss the interaction between a Schwarzschild Black Hole and a Cosmic String. This paper was inspired by a research published in "*The Astrophysical Journal Letters*" with the following theme: **A Nonthermal Radio Filament Connected to the Galactic Black Hole?** In this research, a nonthermal radio filament (NTF) that was found near the *Sagittarius* A^* Black Hole was investigated, where potential implications were examined, where the possibility that this filament is the manifestation of a *Cosmic String* was considered. With this, through *Einstein's Field Equation* we arrive at the *Schwarzschild Metric* that describes the space-time around an uncharged and non-rotating spherical mass, such as a Schwarzschild Black Hole. This is an exact solution of Einstein's field equations in General Relativity and is expressed in spherical coordinates (t, r, θ, ϕ). By inserting the *angular deficit* of the Cosmic String Metric into the Schwarzschild Metric, we can obtain the behavior of a particle in the vicinity of a Schwarzschild Black Hole pierced by a Cosmic String.

Keywords: Schwarzschild Black Hole, Cosmic Strings, General Relativity

Lista de Figuras

Sumário

Capítulo 1

Introdução

A *Cosmologia* é a linha de estudos da Astronomia que lida diretamente com a origem do Universo por meio do uso de aparelhos tecnológicos e de cálculos físicos avançados. No passado, a Cosmologia foi utilizada pelos pré-socráticos para descobrir a possível origem do Universo por meio de observações e especulações, onde o termo Cosmologia tem sua raiz no idioma grego antigo, derivada dos termos *Cosmos* (Universo) e *Logos* (razão, organização racional) (Souza 2004).

Em 1917 foi o ano do nascimento da Cosmologia Moderna, pois foi quando Físico alemão Albert Einstein (1879-1955) publicou um artigo no qual as suas recém propostas equações do campo gravitacional eram usadas para estudar a Física do Universo. Esses resultados contidos nesse artigo são hoje conhecidos como o modelo cosmológico de Einstein e as equações do campo gravitacional utilizadas neste modelo foram as mesmas que deram origem à *Teoria da Relatividade Geral*. Nesse trabalho, Einstein assumiu que o Universo pode ser tratado como um objeto único, uma entidade física única, e que o estudo do Universo como um todo é possível de ser feito por meio das leis da Física. Além disso, para Einstein o objetivo da cosmologia moderna é obter a estrutura geométrica e a distribuição de matéria do universo (Ribeiro e Videira 2011).

Portanto, é através dos estudos de Einstein e de outros Físicos, como: *Edwin Hubble* (1889-1953), *Stephen Hawking* (1942-2018), *Karl Schwarzschild* (1873-1916) e entre outros, que temos a convicção de uma série de transformações que acontecem por bilhões de anos, até a estrutura que conhecemos hoje. Tal que o universo tende a se expandindo cada vez mais, dando origem aos diversos astros, como: Planetas, Cometas, Estrelas, Galáxias, Nebulosas, Satélites Naturais, Buracos Negros, dentre outros.

O resultado de uma pesquisa feita em 2017 pelos Físicos *Mark R. Morris*, *Jun-Hui Zhao* e *W. M. Goss* foi publicado no periódico científico "*The Astrophysical Journal Letters*" com o seguinte tema: **A Nonthermal Radio Filament Connected to the Galactic Black Hole?** (Um filamento de rádio não térmico conectado ao buraco negro galáctico?). Nessa pesquisa foi investigado o um filamento de rádio não térmico (em inglês, *nonthermal radio filament*) (NTF) que foi encontrado próximo ao Buraco Negro *Sagittarius* A^* ou *Sgr* A^*, tal que esse filamento ficou conhecido como *O Filamento SgrA Oeste* (em inglês, *The SgrA West Filament*)(SgrAWF), onde é composto de gás hidrogênio ionizado, e possui uma estrutura torcida em forma de espiral, como mostra a Fig1.1.

Assumindo que o SgrAWF tem uma relação Física com o Sgr A^*, foram examinados

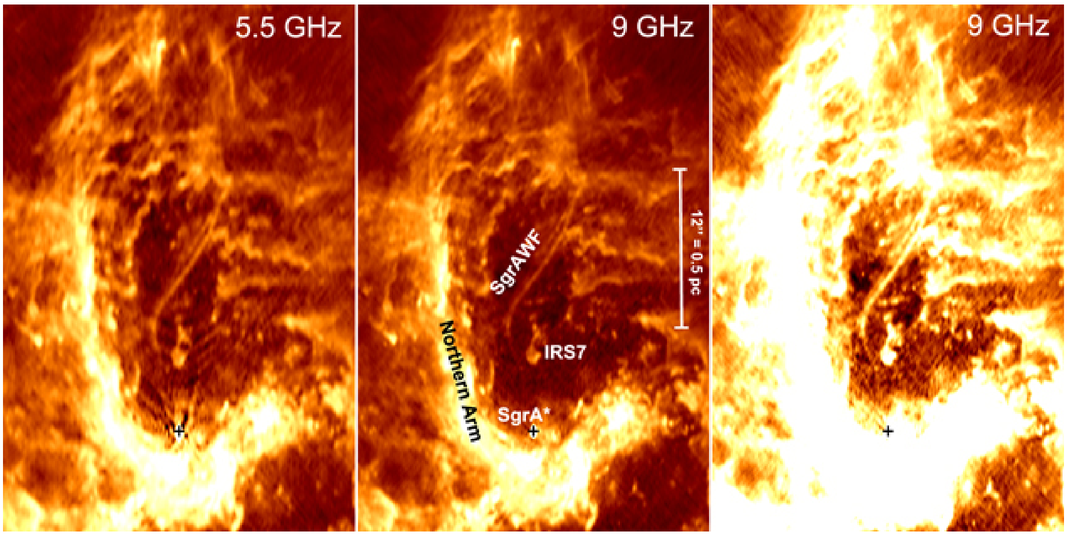

Figura 1.1: O Filamento SgrA Oeste. Fonte: (Morris e Zhao 2017)

implicações potenciais, onde foi considerado a possibilidade de que SgrAWF seja a manifestação de uma *Corda Cósmica* de baixa densidade de massa que ficou ancorada no Buraco Negro.

Cordas cósmicas são objetos teóricos postulados na Física, principalmente na cosmologia, que se formariam como defeitos topológicos[1] durante as transições de fase no universo primordial. Até o momento, não há evidências observacionais confirmadas da existência de cordas cósmicas. No entanto, a busca por sinais de suas influências, como através de lentes gravitacionais ou padrões específicos na radiação cósmica de fundo, continua sendo uma área ativa de pesquisa em Cosmologia e Astrofísica. Portanto, com base no artigo publicado na "*The Astrophysical Journal Letters*" decidimos estudar os efeitos de uma Corda Cósmica no Buraco Negro de Schwarzschild, onde analisamos como essa interação pode causar uma variedade de efeitos como: a perturbação da forma do horizonte de eventos do Buraco Negro, criando um comportamento incomum na forma como ele captura a matéria ao seu redor, e uma redistribuição da matéria e da energia, podendo gerar ondas gravitacionais detectáveis devido à sua interação com a gravidade extrema do Buraco Negro.

Estudar a interação entre Buracos Negros e Cordas cósmicas é importante tanto em contextos teóricos quanto práticos, no avanço do conhecimento sobre o universo. Os Buracos Negros são os melhores laboratórios naturais para testar a teoria da relatividade geral de Einstein, que descreve a gravidade como uma curvatura do espaço-tempo. Já as cordas cósmicas surgem em teorias que buscam unir a gravidade com as outras forças fundamentais. Estudar essa interação pode revelar novas formas de curvatura do espaço-tempo, e desafiar ou confirmar previsões da relatividade em regimes extremos.

Um outro fator importante é que as Cordas cósmicas estão associadas a ideias de quebra de simetria no universo primordial e aparecem em teorias como a *Teoria das cordas* e *Teorias de grande unificação*. Estudá-las em conjunto com Buracos Negros pode fornecer pistas sobre uma teoria mais abrangente que unifique a relatividade geral e a mecânica quântica, algo que ainda não foi alcançado. O entendimento dessa interação poderia aproximar os cientistas da chamada

[1] São irregularidades ou perturbações que ocorrem na ordem de um sistema físico e são caracterizados por sua resistência a serem eliminados por deformações contínuas.

Gravidade quântica.

Por fim, o estudo dessas interações nos permite explorar o desconhecido, expandindo as fronteiras da ciência. Buscar entender como a natureza se comporta em situações extremas, como a interação de Buracos Negros com Cordas cósmicas, desafia nosso entendimento atual e estimula o desenvolvimento de novas ideias.

Capítulo 2

Teoria da Relatividade Geral

No ano de 1905, Einstein havia proposto a Teoria da Relatividade Especial. Onde esta teoria apresentava que: a velocidade da luz no vácuo c é constante, independente da velocidade da fonte; a massa depende da velocidade; ocorre uma dilatação do tempo e uma contração do comprimento durante movimento em alta velocidade; massa e energia são equivalentes e nenhuma informação ou matéria pode se mover mais rápido do que a luz. Em 1907, apenas dois anos após a formulação da Relatividade Especial, Einstein teve a percepção que mais tarde escreveu como *" O pensamento mais feliz da minha vida"* . Esse pensamento foi a constatação de que, para um indivíduo que está caindo livremente, acelerando de um local alto, a sensação que esse individuo terá é como se a gravidade fosse "desligada" , logo, ele não sentiria o seu próprio peso.

Esta ideia, ligando gravitação e aceleração, permitiu a Einstein o início da extensão da Teoria da Relatividade para incluir a gravitação e mostrar que uma teoria do movimento relativo geral poderia ser uma teoria da gravitação. Foi justamente essa ideia que mais tarde Einstein chamou de *Princípio da Equivalência*.

O *Princípio da Equivalência* estabelece que é impossível distinguir entre um campo gravitacional e um movimento acelerado do observador, e uma das suas previsões é que a luz emitida de dentro de um campo gravitacional intenso deve sofrer uma mudança mensurável para energias espectrais mais baixas, o que para a luz significa uma mudança para o vermelho, o denominado *desvio para o vermelho* ou *Redshift*. Este princípio possui algumas formulações, mas as duas mais comuns são o *Princípio da Equivalência Fraca* e o *Princípio da Equivalência Forte*.

- **Princípio da Equivalência Fraca**: este princípio afirma que a trajetória de uma partícula em um campo gravitacional depende apenas de sua posição inicial e velocidade, e não de sua massa ou composição, ou seja, a aceleração de objetos em queda livre não depende de sua composição, por isso, algumas vezes é chamado de *Princípio da universalidade da queda livre*. Onde este princípio não se aplica a objetos muito massivos que alterariam o campo gravitacional ao seu redor. Por isso, se refere apenas a forças gravitacionais.

- **Princípio da Equivalência Forte**: este princípio afirma que as leis da Física em um referencial inercial são as mesmas em todos os lugares do espaço-tempo, independentemente da presença de um campo gravitacional.

Ambas as versões do *Princípio da Equivalência* foram sujeitas a muitos testes experimentais. Onde os primeiros testes foram realizados ao longo de muitos anos com alta precisão e com uma sensibilidade cada vez melhor pelo cientista húngaro *Loránd Eötvös* no final do século XIX. Tal que seus resultados foram citados por Einstein na primeira formulação completa da Relatividade Geral (Acevedo e Morais 2019).

Ainda no ano de 1907, o matemático alemão Hermann Minkowski (1864-1909) percebeu que a Teoria da Relatividade Especial poderia ser melhor compreendida e sugeriu uma abordagem em termos geométricos. Minkowski introduziu a ideia de um espaço em quatro dimensões, conhecido como *espaço-tempo de Minkowski*, onde tanto o espaço como o tempo não são entidades separadas. Ele propôs que os eventos podem ser representados como pontos em um espaço-tempo quadridimensional, onde três dimensões são espaciais e uma dimensão é temporal (Lambourne 2010).

Através dessas influências, Einstein obteve um pensamento cada vez mais geométrico, e em meados de 1912, percebeu que para desenvolver ainda mais na relatividade e na gravitação, precisava descobrir o que os matemáticos sabiam sobre certos problemas relativos aos invariantes na geometria. Foi então, através do matemático Marcel Grossman (1878–1936), Einstein descobriu o que procurava, um assunto conhecido como *Geometria Riemanniana*, um ramo da matemática particularmente voltada com o estudo de espaços curvos com uma *métrica Riemanniana* com um produto interno sobre o espaço tangente em cada ponto que varia continuamente de ponto a ponto.

2.1 Métricas e Geometria Riemanniana

O matemático alemão Bernhard Riemann (1826-1866) percebeu que os elementos de linha poderiam ser usados não apenas para resumir uma geometria, mas como ponto de partida para a consideração de uma geometria. Ele percebeu que, construindo elementos lineares de acordo com certos princípios gerais simples, seria possível desenvolver toda uma família de geometrias que pudessem descrever espaços planos e curvos com qualquer número desejado de dimensões. Esta é a base da geometria Riemanniana.

Um espaço de Riemann de n-dimensões é um espaço no qual o elemento de linha assume a forma geral (Manfio):

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} dx^i dx^j \tag{2.1}$$

Onde $dx^1, dx^2, ..., dx^n$ são os diferenciais das coordenadas espaciais e temporais, e g_{ij} são as funções das coordenadas conhecidas como *Tensor Métrico* que devem ser simétricos no sentido de que $g_{ij} = g_{ij}$, Tal que onde i e j simplesmente indicam as posições dos índices e não têm outro significado. Já ds^2 é o elemento de linha (intervalo) no espaço-tempo que faz a medida da separação infinitesimal entre dois eventos.

Na Física a *Métrica* define a estrutura geométrica de um espaço. No contexto da Relatividade Geral e da Teoria dos campos, a *Métrica* é utilizada para representar a curvatura e a geometria do espaço-tempo, possibilitando calcular volumes, distâncias e ângulos, onde é fundamental para a definição das leis da Física em um contexto relativístico.

Após as coordenadas usadas serem especificadas para descrever um espaço, são os coeficientes métricos que realizam a função de relacionar os diferenciais de coordenadas aos comprimentos e, assim, determinar a geometria do espaço. Depois de conhecer a métrica, a geometria do espaço é totalmente determinada. No entanto, o inverso não é verdadeiro. A geometria não determina exclusivamente a métrica; isso ocorre simplesmente porque existem muitos sistemas de coordenadas possíveis, logo, muitas maneiras diferentes de escrever a métrica. Como por exemplo temos a Métrica de Minkowski que descreve um espaço-tempo plano na Relatividade Especial (Machado 2016):

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \tag{2.2}$$

E a Métrica de Schwarzschild que descreve o espaço-tempo ao redor de um objeto esférico e não rotativo, como um Buraco Negro Estático:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2r}\right)c^2dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2r}\right)^{-1} dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2\sin^2\theta\, d\phi^2 \tag{2.3}$$

Uma operação que é importante sabermos é a operação de *levantar* e *abaixar* índices de um tensor, o que nos permite obter um novo tensor. Conseguimos fazer isso usando a *Métrica* e sua inversa, ou seja, dado um tensor $T^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta}$ (Tutida 2021),

$$T^{\alpha\beta\mu}{}_{\delta} = g^{\mu\gamma}T^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta} \tag{2.4}$$

$$T_{\mu}{}^{\beta}{}_{\gamma\delta} = g_{\mu\alpha}T^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta} \tag{2.5}$$

$$T_{\mu\nu}{}^{\rho\sigma} = g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}g^{\rho\gamma}T^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta} \tag{2.6}$$

Os índices são notações usadas em tensores para indicar suas componentes em diferentes direções ou dimensões de um espaço. Eles são essenciais para trabalhar com vetores e tensores, especialmente em espaços multidimensionais, como no contexto da relatividade geral e geometria diferencial. Temos dois tipos de índice: *Covariante* e *Contravariante*.

- **Índices Covariantes (Inferiores)**: Representados por índices subscritos, como T_μ. Eles referem-se às componentes de um tensor em relação às formas lineares (co-vetores).

- **Índices Contravariantes (Superiores)**: Representados por índices sobrescritos, como T^μ. Eles referem-se às componentes de um tensor em relação aos vetores.

2.2 Transporte Paralelo e Coeficiente de Conexão

O *Transporte Paralelo* descreve como vetores são transportados ao longo de curvas em um espaço curvo de maneira que permanecem "paralelos"segundo a geometria do espaço-tempo sem mudar a sua direção em relação à geometria local. Para entender a intuição Física por trás do transporte paralelo, consideremos um vetor no espaço plano tridimensional. Em um espaço plano, podemos mover um vetor de um ponto a outro sem mudar sua direção ou magnitude, pois não há curvatura (Gorodetskaya 2015). No entanto, em um espaço curvo, como a superfície de uma esfera da Fig. 2.1, mover um vetor de um ponto a outro pode resultar em uma mudança aparente de direção devido à curvatura do espaço.

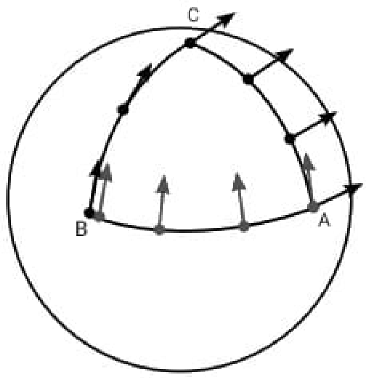

Figura 2.1: Transporte paralelo de um vetor ao longo do ABC. Fonte: (Crowell 2024)

O conceito de transporte paralelo é fundamental na teoria da relatividade geral e descreve como um vetor é movido ao longo de uma curva de maneira que ele permaneça "paralelo"a si mesmo em relação à conexão usada. Aqui, vamos explicar como ocoore o transporte paralelo na Fig. 2.1:

- **Ponto inicial:** Começando no ponto A na linha do Equador. O vetor aponta para o norte (tangente à superfície da esfera).

- **O movimento ao longo do Equador:** O vetor se movimenta ao longo do Equador até o ponto B, mantendo o vetor paralelo à superfície. No contexto da esfera, esse vetor não muda de direção em relação à superfície porque existe o movimento ao longo de uma linha de latitude constante.

- **Movimento ao Longo de um Meridiano:** Do ponto B, o vetor se move ao longo de um meridiano (linha de longitude) até o ponto C, mantendo o vetor paralelo à superfície. À medida que se move para o norte, o vetor vai “rodando” para manter paralelo em relação à superfície da esfera.

- **Movimento ao Longo de C até A:** Do ponto C, o vetor se move até o ponto A no Equador ao longo de um meridiano diferente, ou seja, um caminho diferente. Mantendo o vetor paralelo à superfície enquanto faz isso. Podemos notar que, embora o vetor comece apontando para o norte quando parte do ponto inicial, ao retornar ao ponto A no Equador, o vetor terá girado em relação à sua direção original.

Esse exemplo demonstra que, ao transportar um vetor paralelo da mesma maneira ao longo de uma curva fechada na superfície de uma esfera, o vetor pode não voltar à sua orientação original. A diferença de orientação resulta da curvatura da superfície da esfera. Essa propriedade é uma manifestação da curvatura intrínseca da superfície. Tanto que, na Relatividade Geral o *Transporte Paralelo* é usado para descrever como vetores se comportam ao serem movidos através do espaço-tempo curvo.

Para entendermos a distribuição da velocidade de uma partícula viajando ao longo da curva C do ponto P até o ponto Q com velocidade $\mathbf{V}_P$ e $\mathbf{V}_Q$ nos respectivos pontos, temos que, ao longo da curva **C** os vetores $\mathbf{V}_P$ permanecem paralelos ao longo do caminho sem mudar sua direção e magnitude em relação à geometria do espaço, como mostra a Fig. 2.2 .

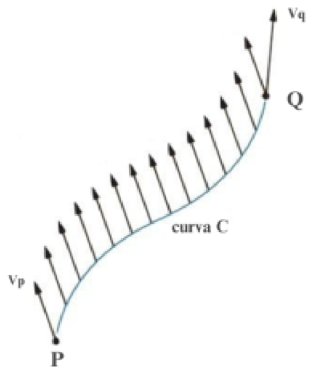

Figura 2.2: O transporte paralelo de um vetor ao longo de uma curva de P para Q. (Lambourne 2010).

E para isso, utilizamos as Coordenadas Esféricas (r,θ,ϕ) com seus vetores de base $(\hat{r},\hat{\theta},\hat{\phi})$, onde estes mudam sua direção de acordo com a posição da partícula. Uma consequência disso é que as componentes do vetor transportado paralelamente de P até Q serão diferentes do vetor original que partiu de P. Portanto, para transportar paralelamente um vetor nesta situação é preciso identificar exatamente como as componentes devem mudar durante cada deslocamento infinitesimal ao longo da curva C, como mostra a Fig. 2.3 .

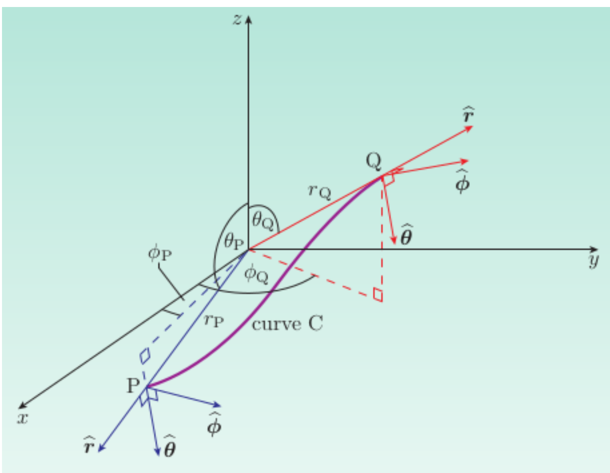

Figura 2.3: Vetores de base apontando em diferentes direções para cada ponto. Fonte: (Lambourne 2010).

Estendendo esse problema para um *Espaço de Riemann Tridimensional Curvo* com coordenadas x^1, x^2, x^3 e Métrica g_{ij}, onde queremos fazer o *Transporte Paralelo* em um vetor no ponto P ao longo da curva C até o ponto Q, de tal forma que as posições ao longo da curva são descritas por um parâmetro u, onde a curva é descrita por três funções de coordenadas $x^1(u), x^2(u), x^3(u)$ com seus respectivos vetores de base e_1, e_2, e_3. Portanto, para qualquer ponto na curva C, que corresponda ao parâmetro u, podemos escrever o valor local de um campo vetorial arbitrário $\mathbf{v}(u)$ em termos de suas componentes e vetores de bases coordenadas nesse ponto (Lambourne 2010). Assim temos:

$$\mathbf{v}(u) = v^j(u)e_j(u) \tag{2.7}$$

Fazendo a derivada pela regra do produto em relação a u,

$$\frac{d}{du}\mathbf{v} = \frac{d}{du}v^j e_j + v^j \frac{d}{du}e_j \tag{2.8}$$

Aplicando a regra da cadeia em $\frac{d}{du}e_j$,

$$\frac{d}{du}e_j = \frac{\partial}{\partial x^k}e_j \frac{d}{du}x^k$$

Onde o termo $\frac{\partial}{\partial x^k}e_j$ representa a taxa de variação de e_j em relação a x^k e terá componentes na direção de cada um dos vetores de base, assim temos,

$$\frac{\partial}{\partial x^k}e_j = \Gamma^i{}_{jk}e_j \tag{2.9}$$

Substituindo a Eq2.9 na Eq2.8, obtemos

$$\frac{d}{du}\mathbf{v} = \frac{d}{du}v^j e_j + \Gamma^i{}_{jk}e_i v^j \frac{d}{du}x^k \tag{2.10}$$

O termo $\Gamma^i{}_{jk}$ é chamado de *Símbolo de Christoffel*, que é uma ferramenta matemática usada na geometria diferencial e na Teoria da Relatividade Geral para descrever a conexão afim em uma variedade riemanniana. Esses símbolos são fundamentais para a definição de derivadas covariantes e para a descrição de como os vetores variam ao longo de curvas na variedade. De modo que em qualquer ponto, $\Gamma^i{}_{jk}$ representa a componente na direção do vetor base e_i da taxa de variação e_j em relação a x^k (Afranchi 2022).

Na Eq. 2.10 todos os índices do lado direito são *Fictícios*, ou seja, qualquer um deles podem ser alterados de maneira que, $e_j = e_i$ e $v^j = v^i$, então

$$\frac{d}{du}\mathbf{v} = \frac{d}{du}v^i e_i + \Gamma^i{}_{jk}e_i v^j \frac{d}{du}x^k$$

$$\frac{d}{du}\mathbf{v} = \left(\frac{d}{du}v^i + \Gamma^i{}_{jk}v^j \frac{d}{du}x^k\right)e_i$$

Se o campo vetorial representa o mesmo vetor transportado paralelamente em todos os pontos, então podemos dizer que a sua *Taxa de Variação* é *Zero*. Sendo assim, considerando que o vetor $\mathbf{v}$ é transportado paralelamente ao longo da curva, temos $\frac{d}{du}\mathbf{v} = 0$. Portanto,

$$\left(\frac{d}{du}v^i + \Gamma^i_{jk}v^j\frac{d}{du}x^k\right)e_i = 0$$

$$\frac{d}{du}v^i + \Gamma^i_{jk}v^j\frac{d}{du}x^k = 0 \tag{2.11}$$

A Eq. 2.11 diz que a derivada covariante do vetor ao longo da curva é zero, o que implica que o vetor não muda sua orientação em relação ao espaço-tempo ao longo da curva.

Bem como na geometria diferencial, o *Transporte Paralelo* é usado para definir a *Derivada Covariante* e explorar propriedades de variedades curvas. Temos que a *Derivada Covariante* é uma ferramenta essencial na Relatividade Geral e na Geometria Diferencial, permitindo a diferenciação de vetores e tensores em variedades curvas. Ela generaliza a derivada convencional, levando em conta a curvatura do espaço-tempo e possibilitando a formulação precisa das leis físicas em contextos relativísticos.

2.2.1 Derivada Covariante

A *Derivada Covariante* é uma generalização da derivada usual que se aplica em variedades curvas, como o espaço-tempo na Relatividade Geral. Diferentemente da derivada padrão, que é adequada para espaços planos, a derivada covariante leva em conta a curvatura do espaço para fornecer uma maneira de diferenciar vetores e tensores ao longo de uma variedade. Temos que a *Derivada Covariante* parte de uma operação que envolve *produto interno* de um vetor A , como:

$$\nabla \cdot A$$

Considerando A como um *Vetor Contravariante*, e sabendo que o *produto interno* é *Base Covariante* $\cdot$ *Base Contravariante*, ou seja, $e^m \cdot e_i$, temos:

$$\nabla \cdot A = \left(e^m \frac{\partial}{\partial x^m}\right) \cdot \left(A^i e_i\right)$$

$$\nabla \cdot A = e^m \frac{\partial}{\partial x^m}A^i \cdot e_i + A^i e^m \cdot \frac{\partial}{\partial x^m}e_i$$

$$\nabla \cdot A = e^m \cdot e_i \frac{\partial}{\partial x^m}A^i + A^i e^m \cdot \frac{\partial}{\partial x^m}e_i$$

Onde: $\frac{\partial}{\partial x^m}e_i = \Gamma^k_{im}e_k$

$$\nabla \cdot A = e^m \cdot e_i \frac{\partial}{\partial x^m}A^i + A^i e^m \cdot \Gamma^k_{im}e_k$$

Podemos fazer uma manipulação dos índices em $A^i e^m \cdot \Gamma^k_{im}e_k$, onde k=i e i=k, então:

$$\nabla \cdot A = e^m \cdot e_i \frac{\partial}{\partial x^m}A^i + A^k e^m \cdot \Gamma^i_{km}e_i$$

$$\nabla \cdot A = e^m \cdot e_i \frac{\partial}{\partial x^m} A^i + e^m \cdot e_i A^k \Gamma^i_{km}$$

$$\nabla \cdot A = (e^m \cdot e_i) \left(\frac{\partial}{\partial x^m} A^i + A^k \Gamma^i_{km} \right)$$

$$\nabla \cdot A = \delta^i_j \left(\frac{\partial}{\partial x^m} A^i + A^k \Gamma^i_{km} \right)$$

$$\nabla_m A^i = \frac{\partial}{\partial x^m} A^i + A^k \Gamma^i_{km}$$

E assim temos a *Derivada Covariante*

$$\nabla_m A^i = \partial_m A^i + A^k \Gamma^i_{km}; i,k,m = 0,1,2,3 \tag{2.12}$$

Em que $\partial_m A^i$ é a derivada parcial do vetor A^i em relação à coordenada x^m, e Γ^i_{km} são os *Símbolos de Christoffel* que representam a conexão e incorporam informações sobre a curvatura da variedade. Tal que os *Símbolos de Christoffel* são determinados pela Métrica $g_{\mu\nu}$ do espaço-tempo e podemos determiná-los através da *Derivada Covariante expandida de forma geral*, levando em conta um *Tensor Covariante* da seguinte maneira:

$$\nabla_\gamma \mathbf{T}_{\mu\nu} = \partial_\gamma \mathbf{T}_{\mu\nu} - \Gamma^\rho{}_{\gamma\mu} \mathbf{T}_{\rho\nu} - \Gamma^\rho{}_{\gamma\nu} \mathbf{T}_{\rho\mu} \tag{2.13}$$

Para escrevermos os *Símbolos de Christoffel* em termos da Métrica, temos que na Fig. **??**, o comprimento e o ângulo dos vetores sejam iguais desde o ponto A até retonar ao ponto A, então temos que a *Derivada Covariante da Métrica* é:

$$\nabla_\gamma g_{\mu\nu} = 0 \tag{2.14}$$

Então, através da Eq.2.13 podemos substituir o Tensor pela Métrica, bem como vamos permutar os índices: γ, μ, ν de tal forma que:

$$\nabla_\gamma g_{\mu\nu} = \partial_\gamma g_{\mu\nu} - \Gamma^\rho{}_{\gamma\mu} g_{\rho\nu} - \Gamma^\rho{}_{\gamma\nu} g_{\rho\mu} = 0 \tag{2.15}$$

$$\nabla_\mu g_{\nu\gamma} = \partial_\mu g_{\nu\gamma} - \Gamma^\rho{}_{\mu\nu} g_{\rho\gamma} - \Gamma^\rho{}_{\mu\gamma} g_{\rho\nu} = 0 \tag{2.16}$$

$$\nabla_\nu g_{\gamma\mu} = \partial_\nu g_{\gamma\mu} - \Gamma^\rho{}_{\nu\gamma} g_{\rho\mu} - \Gamma^\rho{}_{\nu\mu} g_{\rho\gamma} = 0 \tag{2.17}$$

Assim, temos que:

$$\nabla_\gamma g_{\mu\nu} - \nabla_\mu g_{\nu\gamma} - \nabla_\nu g_{\gamma\mu} = 0$$

$$\left(\partial_\gamma g_{\mu\nu} - \Gamma^\rho{}_{\gamma\mu} g_{\rho\nu} - \Gamma^\rho{}_{\gamma\nu} g_{\rho\mu}\right) - \left(\partial_\mu g_{\nu\gamma} - \Gamma^\rho{}_{\mu\nu} g_{\rho\gamma} - \Gamma^\rho{}_{\mu\gamma} g_{\rho\nu}\right) - \left(\partial_\nu g_{\gamma\mu} - \Gamma^\rho{}_{\nu\gamma} g_{\rho\mu} - \Gamma^\rho{}_{\nu\mu} g_{\rho\gamma}\right) = 0$$

$$\partial_\gamma g_{\mu\nu} - \Gamma^{\rho}{}_{\gamma\mu} g_{\rho\nu} - \Gamma^{\rho}{}_{\gamma\nu} g_{\rho\mu} - \partial_\mu g_{\nu\gamma} + \Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} g_{\rho\gamma} + \Gamma^{\rho}{}_{\mu\gamma} g_{\rho\nu} - \partial_\nu g_{\gamma\mu} + \Gamma^{\rho}{}_{\nu\gamma} g_{\rho\mu} + \Gamma^{\rho}{}_{\nu\mu} g_{\rho\gamma} = 0$$

$$\partial_\gamma g_{\mu\nu} - \partial_\mu g_{\nu\gamma} - \partial_\nu g_{\gamma\mu} - \Gamma^{\rho}{}_{\gamma\mu} g_{\rho\nu} - \Gamma^{\rho}{}_{\gamma\nu} g_{\rho\mu} + \Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} g_{\rho\gamma} + \Gamma^{\rho}{}_{\mu\gamma} g_{\rho\nu} + \Gamma^{\rho}{}_{\nu\gamma} g_{\rho\mu} + \Gamma^{\rho}{}_{\nu\mu} g_{\rho\gamma} = 0$$

Os índices da parte inferior dos *Símbolos de Christoffel*, podem comutar, assim temos:

$$\partial_\gamma g_{\mu\nu} - \partial_\mu g_{\nu\gamma} - \partial_\nu g_{\gamma\mu} - \Gamma^{\rho}{}_{\gamma\mu} g_{\rho\nu} - \Gamma^{\rho}{}_{\gamma\nu} g_{\rho\mu} + \Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} g_{\rho\gamma} + \Gamma^{\rho}{}_{\gamma\mu} g_{\rho\nu} + \Gamma^{\rho}{}_{\gamma\nu} g_{\rho\mu} + \Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} g_{\rho\gamma} = 0$$

$$\partial_\gamma g_{\mu\nu} - \partial_\mu g_{\nu\gamma} - \partial_\nu g_{\gamma\mu} + 2\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} g_{\rho\gamma} = 0$$

$$2\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} g_{\rho\gamma} = \partial_\mu g_{\nu\gamma} + \partial_\nu g_{\gamma\mu} - \partial_\gamma g_{\mu\nu}$$

$$\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} g_{\rho\gamma} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu g_{\nu\gamma} + \partial_\nu g_{\gamma\mu} - \partial_\gamma g_{\mu\nu}\right)$$

Para que possamos eliminar a Métrica $g_{\rho\gamma}$, multiplicamos ambos os lados pela inversa dessa Métrica, ou seja:

$$\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} g_{\rho\gamma} g^{\gamma\lambda} = \frac{1}{2} g^{\gamma\lambda}\left(\partial_\mu g_{\nu\gamma} + \partial_\nu g_{\gamma\mu} - \partial_\gamma g_{\mu\nu}\right)$$

onde: $\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} g_{\rho\gamma} g^{\gamma\lambda} = \Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} \delta^{\lambda}_{\rho} = \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}$

$$\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\gamma\lambda}\left(\partial_\mu g_{\nu\gamma} + \partial_\nu g_{\gamma\mu} - \partial_\gamma g_{\mu\nu}\right)$$

Assim sendo, obtemos finalmente a expressão matemática para o *Símbolo de Christoffel* em termos da Métrica (Nascimento 2019),

$$\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\gamma\lambda}\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} g_{\nu\gamma} + \frac{\partial}{\partial x^\nu} g_{\gamma\mu} - \frac{\partial}{\partial x^\gamma} g_{\mu\nu}\right) \tag{2.18}$$

2.3 Geodésicas

Em um espaço plano euclidiano, o caminho mais curto entre dois pontos é o segmento de reta que os liga. Uma forma de definir uma linha reta no espaço euclidiano é como uma curva que segue sempre na mesma direção. Para estender esta definição aos espaços mais gerais da *Geometria Riemanniana*, precisamos analisar o conceito de "direção ao longo de uma curva" e o que significa "ir sempre na mesma direção". Em qualquer ponto de uma *curva parametrizada* por u e definida pelas funções de coordenadas $x^i(u)(i = 1, ..., n)$, podemos definir o vetor tangente $\mathbf{t}$ como o vetor que aponta ao longo da curva, como mostrado na Fig. 2.4 (Lambourne 2010).

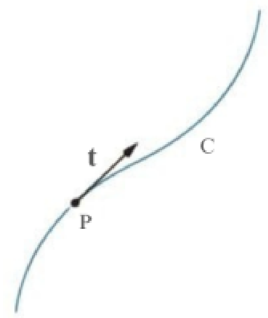

Figura 2.4: O vetor tangente **t** à curva C no ponto P. Fonte: (Lambourne 2010)

Da mesma maneira, os círculos têm um papel semelhante na superfície curva de uma esfera, onde a distância entre dois pontos é chamada de *Geodésica*.

As *Geodésicas* são as curvas que generalizam a ideia de "linha reta"em espaços curvos, como variedades diferenciais. Na Física, elas representam o caminho mais curto entre dois pontos ou o caminho seguido por uma partícula em queda livre sob a influência da gravidade em um espaço-tempo curvo, onde a métrica é determinada pelas equações de campo de Einstein.

O nome *Geodésica* tem a sua origem na Grécia antiga onde já se sabia que a Terra ("*Geo*") não era plana. Como encontrar o caminho mais curto entre lugares da superfície terrestre era então uma questão importante. Daí em diante, as curvas de menor comprimento entre dois pontos numa determinada superfície ficaram conhecidas como geodésicas. A noção de geodésica foi formalizada com rigor a partir do século XVIII, com o surgimento do cálculo diferencial. No início do século XX, a *Teoria da Relatividade Geral*, na qual as geodésicas têm um papel de destaque, veio definitivamente reforçar a importância do estudo destas curvas (Fatelo e Estg 2014).

Temos que a Lagrangiana para a geodésica é,

$$L = g_{\mu\nu}\frac{d}{d\lambda}x^{\alpha}\frac{d}{d\lambda}x^{\beta} \tag{2.19}$$

Pela Eq. de Euler - Lagrange, temos,

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\underbrace{\frac{\partial}{\partial \dot{x}^{\mu}}L}_{I} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}L}_{II}\right) = 0 \tag{2.20}$$

Onde, $\dot{x}^{\mu} = \dfrac{d}{d\lambda}x^{\mu}$

Na Eq2.20, temos que:

$$I = \frac{\partial}{\partial \dot{x}^{\mu}}L$$

$$I = \frac{\partial}{\partial \dot{x}^{\mu}}\left(g_{\mu\nu}\dot{x}^{\alpha}\dot{x}^{\beta}\right)$$

$$I = g_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial \dot{x}^{\mu}}\left(\dot{x}^{\alpha}\dot{x}^{\beta}\right)$$

Pela regra do produto,

$$I = g_{\mu\nu}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}^{\mu}}\dot{x}^{\alpha}\dot{x}^{\beta} + \dot{x}^{\alpha}\frac{\partial}{\partial \dot{x}^{\mu}}\dot{x}^{\beta}\right)$$

onde, $\frac{\partial}{\partial \dot{x}^{\mu}}\dot{x}^{\alpha} = \delta^{\alpha}_{\mu}$

$$I = g_{\mu\nu}\left(\delta^{\alpha}_{\mu}\dot{x}^{\beta} + \dot{x}^{\alpha}\delta^{\beta}_{\mu}\right)$$

$$I = g_{\mu\nu}\delta^{\alpha}_{\mu}\dot{x}^{\beta} + g_{\mu\nu}\dot{x}^{\alpha}\delta^{\beta}_{\mu}$$

Como $g_{\mu\nu}$ é simétrico, então $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$.

$$I = g_{\mu\nu}\dot{x}^{\beta} + g_{\mu\nu}\dot{x}^{\alpha}$$

$$I = g_{\mu\nu}\dot{x}^{\nu} + g_{\mu\nu}\dot{x}^{\nu}$$

$$I = 2g_{\mu\nu}\dot{x}^{\nu} \tag{2.21}$$

Para II, temos,

$$II = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}L$$

$$II = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\left(g_{\mu\nu}\dot{x}^{\alpha}\dot{x}^{\beta}\right)$$

$$II = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}g_{\mu\nu}\left(\dot{x}^{\alpha}\dot{x}^{\beta}\right) \tag{2.22}$$

Substituindo as Eq's 2.22 e 2.21 na Eq.2.20, temos

$$\underbrace{\frac{d}{d\lambda}\left(2g_{\mu\nu}\dot{x}^{\nu}\right)}_{III} - \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}g_{\mu\nu}\left(\dot{x}^{\alpha}\dot{x}^{\beta}\right) = 0 \tag{2.23}$$

$$III = \frac{d}{d\lambda}\left(2g_{\mu\nu}\dot{x}^{\nu}\right)$$

$$III = 2\left(\frac{d}{d\lambda}g_{\mu\nu}\dot{x}^{\nu} + g_{\mu\nu}\frac{d}{d\lambda}\dot{x}^{\nu}\right)$$

Aplicando a regra da cadeia em $\frac{d}{d\lambda}g_{\mu\nu}$, temos

$$III = 2\left(\frac{\partial}{\partial x^{\rho}} g_{\mu\nu} \frac{d}{d\lambda} x^{\rho} + g_{\mu\nu} \frac{d}{d\lambda} \dot{x}^{\nu}\right)$$

$$III = 2\left(\frac{\partial}{\partial x^{\rho}} g_{\mu\nu} \dot{x}^{\rho} + g_{\mu\nu} \ddot{x}^{\nu}\right) \tag{2.24}$$

Substituindo a Eq.2.24 na Eq.2.23,

$$2\left(\frac{\partial}{\partial x^{\rho}} g_{\mu\nu} \dot{x}^{\rho} + g_{\mu\nu} \ddot{x}^{\nu}\right) - \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} g_{\mu\nu}\left(\dot{x}^{\alpha} \dot{x}^{\beta}\right) = 0$$

Multiplicando ambos os lados por $\frac{1}{2}$,

$$\left[2\left(\frac{\partial}{\partial x^{\rho}} g_{\mu\nu} \dot{x}^{\rho} + g_{\mu\nu} \ddot{x}^{\nu}\right) - \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} g_{\mu\nu}\left(\dot{x}^{\alpha} \dot{x}^{\beta}\right)\right] \frac{1}{2} = 0 \frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x^{\rho}} g_{\mu\nu} \dot{x}^{\rho} + g_{\mu\nu} \ddot{x}^{\nu} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} g_{\mu\nu}\left(\dot{x}^{\alpha} \dot{x}^{\beta}\right) = 0$$

Multiplicando por $g^{\mu\sigma}$,

$$g^{\mu\sigma}\left[\frac{\partial}{\partial x^{\rho}} g_{\mu\nu} \dot{x}^{\rho} + g_{\mu\nu} \ddot{x}^{\nu} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} g_{\mu\nu}\left(\dot{x}^{\alpha} \dot{x}^{\beta}\right)\right] = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x^{\rho}} g^{\mu\sigma} g_{\mu\nu} \dot{x}^{\rho} + g^{\mu\sigma} g_{\mu\nu} \ddot{x}^{\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} g_{\mu\nu}\left(\dot{x}^{\alpha} \dot{x}^{\beta}\right) = 0$$

Tal que, $g^{\mu\sigma} g_{\mu\nu} = \delta^{\mu}_{\nu}$

$$\frac{\partial}{\partial x^{\rho}} g^{\mu\sigma} g_{\mu\nu} \dot{x}^{\rho} + \ddot{x}^{\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} g_{\mu\nu}\left(\dot{x}^{\alpha} \dot{x}^{\beta}\right) = 0$$

$$\ddot{x}^{\nu} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x^{\rho}} g^{\mu\sigma} g_{\mu\nu} \dot{x}^{\rho} - \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} g_{\mu\nu}\left(\dot{x}^{\alpha} \dot{x}^{\beta}\right)}_{IV} = 0 \tag{2.25}$$

Onde o termo *IV* é uma expressão que pode ser escrita em termos dos *Símbolos de Christoffel* dado pela Eq.2.18,

$$\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\gamma\lambda}\left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} g_{\nu\gamma} + \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} g_{\gamma\mu} - \frac{\partial}{\partial x^{\gamma}} g_{\mu\nu}\right)$$

Podemos modificar seus índices para,

$$\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu}\left(\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} g_{\beta\nu} + \frac{\partial}{\partial x^{\beta}} g_{\alpha\nu} - \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} g_{\alpha\beta}\right)$$

Multiplicando por $\dot{x}^{\alpha} \dot{x}^{\beta}$,

$$\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu}\left(\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} g_{\beta\nu} + \frac{\partial}{\partial x^{\beta}} g_{\alpha\nu} - \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} g_{\alpha\beta}\right) \dot{x}^{\alpha} \dot{x}^{\beta}$$

Assim, na Eq.2.25, temos

$$\ddot{x}^{\nu} + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \left(\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} g_{\beta\nu} + \frac{\partial}{\partial x^{\beta}} g_{\alpha\nu} - \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} g_{\alpha\beta} \right) \dot{x}^{\alpha} \dot{x}^{\beta} = 0$$

$$\ddot{x}^{\nu} + \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} \dot{x}^{\alpha} \dot{x}^{\beta} = 0$$

$$\frac{d^2}{d\lambda^2} x^{\nu} + \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} \frac{d}{d\lambda} x^{\alpha} \frac{d}{d\lambda} x^{\beta} = 0 \tag{2.26}$$

Onde a Eq.2.26 representa a *Equação da Geodésica* que descreve como um ponto se move no espaço-tempo curvo. Tal que:

- $x^{\nu}(\lambda)$ são as coordenadas da partícula como função do parâmetro λ(tipicamente o tempo próprio).
- $\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}$ são os símbolos de Christoffel, que possuem a informação sobre a curvatura do espaço-tempo.
- $\frac{d^2}{d\lambda^2}$ é a aceleração da partícula.
- $\frac{d}{d\lambda} x^{\alpha}$ e $\frac{d}{d\lambda} x^{\beta}$ são as componentes da velocidade da partícula.

2.4 Tensor de Curvatura de Riemann

O *Tensor de Curvatura de Riemann* ou simplesmente *Tensor de Riemann* $R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\nu}$ é uma quantidade tensorial de quarta ordem que pode ser expresso em termos das derivadas segundas da métrica do espaço-tempo. Possui um papel fundamental na Teoria da Relatividade Geral de Einstein, pois é através desse tensor que podemos estudar as interações entre massa e energia no espaço-tempo, sendo essencial para calcular as equações de movimento e prever fenômenos gravitacionais como buracos negros, ondas gravitacionais e a curvatura do espaço-tempo em torno de objetos massivos.

O *Tensor de Riemann* é geralmente representado como um *Tensor Misto* $R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\nu}$, contendo uma *contravariante* de ordem 1 e uma *covariante* de ordem 3. Mas também pode ser representado por um *Tensor Covariante* $R_{\alpha\beta\gamma\nu}$, contendo uma covariante de ordem 4. Tal que o *Tensor de Riemann Misto* $R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\nu}$ é definido da seguinte maneira,

$$R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\nu} = \frac{\partial}{\partial x^{\gamma}} \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\nu} - \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma} + \Gamma^{\rho}{}_{\beta\nu} \Gamma^{\alpha}{}_{\rho\gamma} - \Gamma^{\rho}{}_{\beta\gamma} \Gamma^{\alpha}{}_{\rho\nu} \tag{2.27}$$

Com relação a sua simetria, o *Tensor de Riemann* possui as seguintes propriedades:

- O *Tensor de Riemann* na sua forma *Mista* é antissimétrico nos dois últimos índices, ou seja,

$$R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\nu} = -R^{\alpha}{}_{\beta\nu\gamma}$$

- O *Tensor de Riemann* na sua forma *Covariante* é antissimétrico nos dois primeiros índices e nos dois últimos indíces, ou seja,

$$R_{\alpha\beta\gamma\nu} = -R_{\beta\alpha\gamma\nu}$$

$$R_{\alpha\beta\gamma\nu} = -R_{\alpha\beta\nu\gamma}$$

- Ainda na forma *Covariante*, o *Tensor de Riemann* é simétrico em relação à troca do primeiro par de índices com o segundo par, ou seja,

$$R_{\alpha\beta\gamma\nu} = R_{\gamma\nu\alpha\beta}$$

2.5 Tensor Energia - Momento

Na Teoria da Gravidade de Newton, a densidade de massa é conservada, cuja a mesma é a fonte da gravitação. Na Relatividdade Geral, a massa de uma partícula não é conservada, mas está relacionada a magnitude da *Energia* e do *Momento*. Assim, como essas novas fontes da gravitação devem aparecer em um *Tensor*, então temos que um dos elementos básicos da Relatividade Geral é o *Tensor Energia-Momento*.

O *Tensor Energia-Momento* descreve a densidade e o fluxo de energia e momento em uma região do espaço-tempo. Onde O *Tensor Energia-Momento* é geralmente denotado por $T_{\mu\nu}$, onde (μ, ν = 0,1,2,3) variam em um espaço-tempo quadrimensional, com três dimensões espaciais e uma temporal. A notação convariante $T_{\mu\nu}$ indica que este é um tensor de ordem 2. Bem como, também pode ser representado por sua forma contravariante $T^{\mu\nu}$. Onde a sua forma *Contravariante* $T^{\mu\nu}$ é usada para componentes que se transformam de maneira oposta, como vetores tangentes. Já na forma *Covariante* $T_{\mu\nu}$ é comum quando se trabalha com componentes que se transformam de acordo com a derivada parcial em um sistema de coordenadas (Soares 2013).

Temos que o *Tensor Energia-Momento* $T^{\mu\nu}$ é simétrico, ou seja, $T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}$, possuindo 16 componentes, onde 4 componentes são do tipo $T_{\mu\mu}$ e as 12 componentes restante são do tipo $T_{\mu\nu}$, tal que $\mu \neq \nu$. E cada componente é uma função das coordenadas do espaço-tempo podendo ser interpretadas da seguinte forma:

- T_{00} É a Densidade de Energia.

- $T_{0i} = T_{i0}$ $(i = 1,2,3)$ É a Densidade do Fluxo de Energia ou Fluxo de Momento na direção i.

- $T_{ij} = T_{ji}$ $(i,j = 1,2,3)$ É a Taxa do Fluxo da Componente i e do Momento perpendicular à direção j.

Assim, temos:

$$[T_{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} T_{00} & T_{01} & T_{02} & T_{03} \\ T_{10} & T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{20} & T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{30} & T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} \tag{2.28}$$

2.5.1 Tensor Energia - Momento para Campos Eletromagnéticos

Para uma região do espaço que contém *Campos Elétricos* e *Magnéticos* com ausência de matéria e somente radiação eletromagnética, temos que as componentes do *Tensor Energia - Momento para Campos Eletromagnéticos* é,

$$T_{\mu\nu} = F_{\mu\alpha}F_{\nu\alpha} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} \tag{2.29}$$

Onde $F_{\mu\nu}$ é o Tensor do Campo Eletromagnético, que é um tensor antissimétrico de segunda ordem. Já $g_{\mu\nu}$ é o Tensor Métrico do espaço-tempo, que na Relatividade Especial é substituido pelo Tensor de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$. Onde esse tensor indica que na Relatividade Geral, a radiação eletromagnética por si só pode ser uma fonte da gravitação, mesmo que as partículas associadas (fótons) não possuem massa (Lambourne 2010).

Em coordenadas arbitrárias e num espaço-tempo que pode ser *Plano* ou *Curvo*, o *Tensor Energia-Momento* possui a seguinte propriedade,

$$\nabla_{\mu}T^{\mu\nu} = 0 \tag{2.30}$$

Na ausência de gravidade, num espaço-tempo de Minkowski plano, estes resultados nos permite simplesmente descrever a conservação da energia e do momento usando coordenadas gerais. Contudo, se o espaço-tempo for curvo, verifica-se que a Eq.2.30 geralmente não descreve a conservação da energia e do momento linear para o espaço-tempo. E isso é bom, porque na presença de gravitação (ou seja, curvatura), não se espera que a conservação da energia se aplique apenas à matéria e à radiação (Lambourne 2010).

2.6 Tensor de Einstein

O *Princípio da equivalência* levou Einstein a propor que a gravidade deveria ser considerada como uma manifestação da curvatura do espaço-tempo e não como uma força. Através disso, Einstein procurou uma teoria geométrica da gravidade, onde precisava encontrar um objeto geométrico que pudesse ser relacionado ao *Tensor Energia-Momento*. Com isso, ele precisava de um tensor de ordem 2 envolvendo as componentes do *Tensor métrico*.

Mesmo com várias ideias, Einstein demorou para encontrar a quantidade apropriada do tensor. Quando ele encontrou, percebeu que seus cálculos envolviam contrações do *Tensor de Curvatura de Riemann* Eq.2.27. E próprio *Tensor de Curvatura de Riemann* envolve os

Coeficientes de Conexão que são os *Símbolos de Christoffel* Eq.2.18.

Sabemos que o *Tensor de Curvatura de Riemann* é fundamental para o estudo de espaços curvos. Porém, existem outros dois tensores que se mostram muito úteis para esse tipo de espaço. Contraindo o *Tensor de Curvatura de Riemann*, vamos obter um novo tensor de ordem 2 da seguinte maneira,

$$R_{\alpha\beta} = R^{\gamma}{}_{\alpha\beta\gamma} \tag{2.31}$$

A Eq.2.31 é conhecida como *Tensor de Ricci*. Onde representa a contração do *Tensor de Curvatura de Riemann* e fornece informações sobre como o volume varia em um espaço curvado, ou seja, descreve como a matéria e a energia determinam a curvatura do espaço-tempo. Temos ainda que ele é simétrico no que diz respeito à troca de índices, ou seja, $R_{\alpha\beta} = R_{\beta\alpha}$. E se contrairmos o *Tensor de Ricci*, vamos obter o *Escalar de Curvatura* Eq.2.32, onde este define a curvatura de um espaço em um único ponto.

$$R = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} \tag{2.32}$$

2.6.1 Identidades de Bianchi

As *Identidades de Bianchi* se aplicam aos tensores de curvatura de Riemann, Ricci e ao escalar de curvatura. Na qual existem duas formas principais dessas identidades: as identidades de Bianchi diferenciais (primeiras identidades de Bianchi) e as identidades de Bianchi algébricas (segundas identidades de Bianchi).

Temos que as primeiras identidades de Bianchi referem-se ao *Tensor de Curvatura de Riemann* $R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\nu}$, E são expressas como:

$$R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\nu} + R^{\alpha}{}_{\nu\beta\gamma} + R^{\alpha}{}_{\gamma\nu\beta} = 0 \tag{2.33}$$

O *Tensor de Curvatura de Riemann* na sua forma geral é dado pela Eq, 2.27,

$$R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\nu} = \frac{\partial}{\partial x^{\gamma}}\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\nu} - \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma} + \Gamma^{\rho}{}_{\beta\nu}\Gamma^{\alpha}{}_{\rho\gamma} - \Gamma^{\rho}{}_{\beta\gamma}\Gamma^{\alpha}{}_{\rho\nu}$$

Onde os *Símbolos de Christoffel* é dado pela Eq.2.18,

$$\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\gamma\lambda}\left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}g_{\nu\gamma} + \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}g_{\gamma\mu} - \frac{\partial}{\partial x^{\gamma}}g_{\mu\nu}\right)$$

Analisando localmente, a métrica será representada por η, que é a *métrica de minkowski*. Portanto, sua derivada em um espaço plano é zero, ou seja, $\frac{\partial}{\partial x}\eta = 0$. No espaço plano, a métrica não varia de um ponto a outro. Assim, o produto dos *Símbolos de Christoffel* no *Tensor de Curvatura de Riemann* é zero. Porém, a derivada dos *Símbolos de Christoffel* é diferente de zero. Logo, na Eq.2.27, temos,

$$R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\nu} = \frac{\partial}{\partial x^{\gamma}}\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\nu} - \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma} \tag{2.34}$$

Onde a Eq.2.34 é o *Tensor de Curvatura de Riemann Localmente*. E tomando a *Derivada Covariante* desse tensor,

$$\nabla_\rho R^\alpha{}_{\beta\gamma\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\rho}\frac{\partial}{\partial x^\gamma}\Gamma^\alpha{}_{\beta\nu} - \frac{\partial}{\partial x^\rho}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}$$

Podemos permutar dos índices ρ, γ, ν do termo $\nabla_\rho R^\alpha{}_{\beta\gamma\nu}$, assim temos,

- Para (ρ, γ, ν):

$$\nabla_\rho R^\alpha{}_{\beta\gamma\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\rho}\frac{\partial}{\partial x^\gamma}\Gamma^\alpha{}_{\beta\nu} - \frac{\partial}{\partial x^\rho}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}$$

- Para (γ, ν, ρ):

$$\nabla_\gamma R^\alpha{}_{\beta\nu\rho} = \frac{\partial}{\partial x^\gamma}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\Gamma^\alpha{}_{\beta\rho} - \frac{\partial}{\partial x^\gamma}\frac{\partial}{\partial x^\rho}\Gamma^\alpha{}_{\beta\nu}$$

- Para (ν, ρ, γ):

$$\nabla_\nu R^\alpha{}_{\beta\rho\gamma} = \frac{\partial}{\partial x^\nu}\frac{\partial}{\partial x^\rho}\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma} - \frac{\partial}{\partial x^\nu}\frac{\partial}{\partial x^\gamma}\Gamma^\alpha{}_{\beta\rho}$$

Somando as três equações, temos:

$$\begin{aligned}\nabla_\rho R^\alpha{}_{\beta\gamma\nu} + \nabla_\gamma R^\alpha{}_{\beta\nu\rho} + \nabla_\nu R^\alpha{}_{\beta\rho\gamma} = {} & \frac{\partial}{\partial x^\rho}\frac{\partial}{\partial x^\gamma}\Gamma^\alpha{}_{\beta\nu} - \frac{\partial}{\partial x^\rho}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma} + \frac{\partial}{\partial x^\gamma}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\Gamma^\alpha{}_{\beta\rho} - \frac{\partial}{\partial x^\gamma}\frac{\partial}{\partial x^\rho}\Gamma^\alpha{}_{\beta\nu} \\ & + \frac{\partial}{\partial x^\nu}\frac{\partial}{\partial x^\rho}\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma} - \frac{\partial}{\partial x^\nu}\frac{\partial}{\partial x^\gamma}\Gamma^\alpha{}_{\beta\rho}\end{aligned}$$

$$\nabla_\rho R^\alpha{}_{\beta\gamma\nu} + \nabla_\gamma R^\alpha{}_{\beta\nu\rho} + \nabla_\nu R^\alpha{}_{\beta\rho\gamma} = 0 \tag{2.35}$$

A Eq.2.35 mostra que as derivadas covariantes do *Tensor de Curvatura de Riemann* é zero.

Multiplicando ambos os lados da Eq.2.35 pela métrica $g^{\alpha\rho}$, temos:

$$\left(\nabla_\rho R^\alpha{}_{\beta\gamma\nu} + \nabla_\gamma R^\alpha{}_{\beta\nu\rho} + \nabla_\nu R^\alpha{}_{\beta\rho\gamma}\right) g^{\alpha\rho} = 0$$

$$\underbrace{g^{\alpha\rho}\nabla_\rho R^\alpha{}_{\beta\gamma\nu}}_{a} + \underbrace{g^{\alpha\rho}\nabla_\gamma R^\alpha{}_{\beta\nu\rho}}_{b} + \underbrace{g^{\alpha\rho}\nabla_\nu R^\alpha{}_{\beta\rho\gamma}}_{c} = 0 \tag{2.36}$$

Então:

$$a = g^{\alpha\rho}\nabla_\rho R^\alpha{}_{\beta\gamma\nu}$$

Os índices γ e ν são antissimétricos, logo,

$$a = -g^{\alpha\rho}\nabla_\rho R^\alpha{}_{\beta\nu\gamma}$$

$$a = -\nabla^\alpha R^\alpha{}_{\beta\nu\gamma} \tag{2.37}$$

$$b = g^{\alpha\rho}\nabla_\gamma R^\alpha{}_{\beta\nu\rho}$$

Os índices ν e ρ são antissimétricos, logo,

$$b = -g^{\alpha\rho}\nabla_\gamma R^\alpha{}_{\beta\rho\nu}$$

$$b = -\nabla_\gamma R_{\beta\nu} \tag{2.38}$$

$$c = g^{\alpha\rho}\nabla_\nu R^\alpha{}_{\beta\rho\gamma}$$

$$c = \nabla_\nu R_{\beta\gamma} \tag{2.39}$$

Substituindo as Eq's.2.39, 2.38 e 2.37 na Eq.2.36, temos:

$$-\nabla^\alpha R^\alpha{}_{\beta\nu\gamma} - \nabla_\gamma R_{\beta\nu} + \nabla_\nu R_{\beta\gamma} = 0 \tag{2.40}$$

Multiplicando pela métrica $g^{\beta\gamma}$,

$$\left(-\nabla^\alpha R^\alpha{}_{\beta\nu\gamma} - \nabla_\gamma R_{\beta\nu} + \nabla_\nu R_{\beta\gamma}\right) g^{\beta\gamma} = 0$$

$$-g^{\beta\gamma}\nabla^\alpha R^\alpha{}_{\beta\nu\gamma} - g^{\beta\gamma}\nabla_\gamma R_{\beta\nu} + g^{\beta\gamma}\nabla_\nu R_{\beta\gamma} = 0$$

$$-g^{\beta\gamma}\nabla^\alpha R^\alpha{}_{\beta\nu\gamma} - \nabla^\beta R_{\beta\nu} + \nabla_\nu R = 0$$

$$-\nabla^\alpha R_{\alpha\nu} - \nabla^\beta R_{\beta\nu} + \nabla_\nu R = 0$$

Tal que, $\alpha = \beta = \mu$, logo,

$$-\nabla^\mu R_{\mu\nu} - \nabla^\mu R_{\mu\nu} + \nabla_\nu R = 0$$

$$\nabla_\nu R - 2\nabla^\mu R_{\mu\nu} = 0$$

Onde, $\nabla_\nu = g_{\mu\nu}\nabla^\mu$

$$g_{\mu\nu}\nabla^\mu R - 2\nabla^\mu R_{\mu\nu} = 0$$

Multiplicando por $\left(-\frac{1}{2}\right)$, temos

$$-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\nabla^{\mu}R-\left(-\frac{1}{2}\right)2\nabla^{\mu}R_{\mu\nu}=0$$

$$\nabla^{\mu}R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\nabla^{\mu}R=0$$

$$\nabla^{\mu}\left(R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right)=0$$

$$\nabla^{\mu}G_{\mu\nu}=0 \tag{2.41}$$

A Eq.2.41 é a Identidade de Bianchi na sua forma contraída em termos do Tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$, do Escalar de Curvatura R e da Métrica $g_{\mu\nu}$. E através desta equação, temos o *Tensor de Einstein*,

$$G_{\mu\nu}=R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \tag{2.42}$$

Na *Teoria da Relatividade Geral*, as Identidades de Bianchi asseguram a consistência das equações de campo de Einstein. Essas equações descrevem como a matéria e a energia influenciam a curvatura do espaço-tempo. As identidades de Bianchi implicam que a divergência do Tensor de Einstein é zero, o que é uma condição necessária para a conservação da energia e do momento em um sistema físico.

2.7 Equação de Campo de Einstein

As principais ideias centrais da *Teoria da Relatividade Geral* foram resumidas pelo Fisico amaricano John Wheeler que dizia:

> "A matéria diz ao espaço-tempo como se curvar, e o espaço-tempo curvado diz à matéria como se mover." (Wheeler, J).

Para compreender melhor a citação de Wheeler, podemos dizer que o ponto central das ideias físicas da Relatividade Geral são que a Energia e o Momento em uma região do espaço-tempo determinam a geometria do espaço-tempo naquela região. A geometria do espaço-tempo determina então uma classe especial de caminhos do espaço-tempo, que são as *Geodésicas*. Movendo-se apenas sob a influência da gravidade, as partículas massivas viajam ao longo de Geodésicas semelhantes ao tempo (onde $ds^2 > 0$), enquanto os raios de luz seguem Geodésicas nulas (com $ds^2 = 0$). Assim, a distribuição de Energia e Momento numa região determina o movimento da matéria e da radiação em queda livre naquela região (Lambourne 2010).

O objetivo de Einstein foi determinar uma equação de uma teoria geométrica da gravidade que pudesse atuar da mesma maneira sobre todos os tipos de matéria. Com isso, ele identificou que o *Tensor Energia-Momento* $[T_{\mu\nu}]$ poderia descrever as fontes da gravitação. E ainda encontrou um outro tensor simétrico, de ordem 2, que é o *Tensor de Einstein* $[G_{\mu\nu}]$.

Tanto $[T_{\mu\nu}]$ como $[G_{\mu\nu}]$ possuem divergência igual a zero, como mostram as Eq's.2.30 e 2.41, respectivamente. Temos que o tensor $[T_{\mu\nu}]$ diz respeito à distribuição da matéria e da energia no espaço-tempo, já o tensor $[G_{\mu\nu}]$ fala da curvatura e das distâncias, ou seja, diz respeito à geometria do espaço-tempo. Logo, ambos os tensores são proporcionais, o que levou Einstein a propor a sua equação de campo em termos de componentes de tensores por meio da relação (Sousa 2008),

$$G_{\mu\nu} = KT_{\mu\nu} \tag{2.43}$$

Onde K é uma constante de proporcionalidade que é igual a $\dfrac{8\pi G}{c^4}$, em que G é a constante gravitacional, $G = 6,674310^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$ e c é a velocidade da luz no vácuo, $c = 299.792.458 m/s$. Assim, temos que a *Equação de Campo de Einstein* é,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \tag{2.44}$$

A Eq.2.44 é uma equação tensorial que se aplica em quatro dimensões, ou seja, uma coordenada temporal e três coordenadas espaciais (largura, profundidade e altura), considerando as coordenadas do espaço-tempo x^0, x^1, x^2, x^3 ou t, x, y, z. A variação dos índices dos tensores envolvidos é essencial para a compreensão das interações entre matéria, energia e a geometria do espaço-tempo. Tal que os índices μ e ν variam entre 0 e 3. Com isso, a Eq.2.44 pode ser expressa na sua forma matricial da seguinte maneira,

$$\begin{pmatrix} R_{00} & R_{01} & R_{02} & R_{03} \\ R_{10} & R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{20} & R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{30} & R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{30} & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} R = \frac{8\pi G}{c^4} \begin{pmatrix} T_{00} & T_{01} & T_{02} & T_{03} \\ T_{10} & T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{20} & T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{30} & T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} \tag{2.45}$$

Na Eq.2.44 o lado esquerdo se refere a geometria da curvatura do espaço-tempo, ou seja, os termos $R_{\mu\nu}$ e R. Onde o conceito de curvatura está ligado a noção de *Transporte Paralelo*, tal que este é definido em termos da *Conexão*. Já a Conexão na Relatividade Geral é a *Conexão de Levi-Civita* que é definida pelos *Símbolos de Christoffel*. Portanto, a Curvatura depende dos Símbolos de Christoffel. Já o lado direito da Eq.2.44 se refere ao conteúdo de matéria e energia.

Capítulo 3

Buraco Negro de Schwarzschild e a Corda Cósmica

3.1 Buraco Negro

Um *Buraco Negro* é uma região do espaço-tempo caracterizada por um campo gravitacional extremamente forte que deforma o espaço ao seu redor, de tal forma que nada, nem mesmo a luz, pode escapar de sua atração. A ideia dos Buracos Negros surge da Teoria da Relatividade Geral de Einstein, que descreve como a gravidade é a curvatura do espaço-tempo causada pela massa. Em virtude dessa deformação algumas coisas "estranhas"acontecem ao seu redor, de tal maneira que chegamos a duvidar se de fato essas coisas acontecem. Porém, devido a observações e sua matemática sólida, temos total convicção do que ocorre ao redor de um Buraco Negro.

O conceito moderno de Buraco Negro tem suas origens no século XVIII com o reverendo inglês *John Michell* (1724–1793) que propôs a existência de estrelas invisíveis para o observador (*estrelas negras*) porque a luz não poderia escapar da atração gravitacional gerada por elas. A sugestão de Michell está em um trabalho apresentado perante a *Royal Society* de Londres por *Henry Cavendish* (1731–1810) em três sessões distintas: 11 e 18 de dezembro de 1783 e 15 de janeiro de 1784, e publicado em 1784 nas atas da *Royal Society*. Em 1796, doze anos após o trabalho de Michell ter sido apresentado por Cavendish perante a *Royal Society* e publicado nas suas atas, *Pierre Simon Laplace* (1749–1827) escreve sem demonstrar (Machado e Tort 2016):

> *"A atração gravitacional de uma estrela com um diâmetro de 250 vezes o diâmetro do Sol e comparável em densidade com a densidade da Terra seria tão grande que a luz não poderia escapar da sua superfície. Os maiores corpos do Universo poderiam ser invisíveis por causa da sua magnitude (da velocidade de escape)."*

Porém, o termo Buraco Negro só foi introduzido no ano de 1967 pelo Físico norte-americano *John Archibald Wheeler* (1911-2008) para denotar o estágio final de colapso de estrelas com massa superior a 3 M $\odot$ [1].

3.1.1 Formação de um Buraco Negro

Os Buracos Negros são criados a partir do estágio final dos ciclos de vida de estrelas super massivas (aquelas com massas superiores a aproximadamente 8 $M_{\odot}$), onde chamamos esse processo de *Colapso Gravitacional*. É também através do Colapso Gravitacional que podem ser formadas as *Estrelas de Nêutrons* e *Anãs Brancas*.

Estrelas massivas se formam a partir de nuvens de gás e poeira no espaço interestelar, onde a gravidade faz com que essas nuvens colapsem, aumentando a pressão e a temperatura no núcleo da estrela até que comecem as reações de *Fusão nuclear* [2]. Tal que, nas profundezas da estrela os átomos de Hidrogênio (H) são esmagados contra outros átomos de H que se combinam para formar um outro elemento mais denso, o Hélio (He). Com isso, há uma liberação de energia do centro da estrela na forma de calor e luz anulando a força da gravidade, mantendo a estrela estável até o momento em que a reação começar a parar à medida que o seu combustível (H) vai esgotando. Assim que o H esgotar, a estrela combinará os átomos de He recém-formados para formar átomos ainda mais densos, como: Carbono (C), Neônio (Ne), Oxigênio (O), Silício (Si) e Ferro (Fe), como mostra a Fig.3.1.

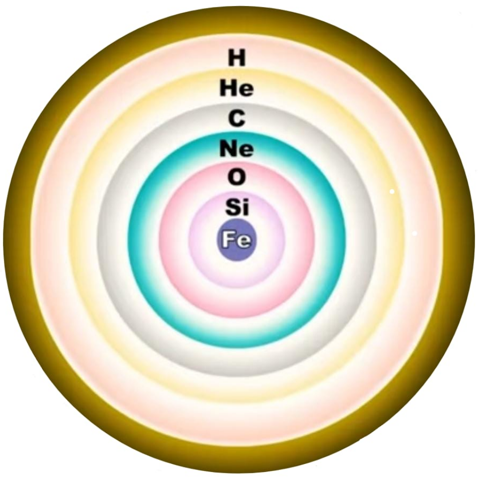

Figura 3.1: Formação de átomos mais densos por fusão nuclear de uma estrela super massiva.

[1] M $\odot = 1{,}9891 \times 10^{30}$ kg que é a massa solar.

[2] É o processo pelo qual dois núcleos atômicos leves se combinam para formar um núcleo mais pesado, liberando uma quantidade significativa de energia. Esse é o processo que alimenta o sol e outras estrelas, onde os núcleos de hidrogênio se fundem para formar hélio.

O Fe é o ponto final do processo de fusão nuclear porque fundir Fe não libera energia, na verdade, consome energia. Quando o núcleo da estrela massiva se torna totalmente Fe, ele não pode mais suportar a pressão gravitacional e o núcleo colapsa rapidamente em segundos, fazendo com que a densidade e a temperatura possam aumentar a níveis extremos. E a rápida compressão do núcleo provoca uma explosão catastrófica conhecida como *Supernova*. A Supernova expulsa as camadas externas da estrela para o espaço, como matéria e energia, deixando para trás o que restou da estrela, o seu núcleo colapsado, como mostra a Fig.3.2.

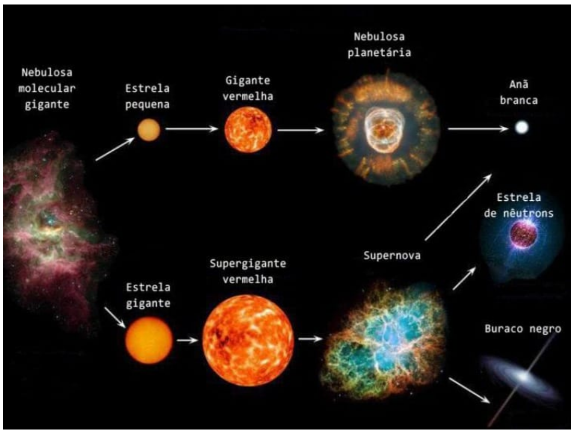

Figura 3.2: O ciclo de vida de uma estrela. Imagem fora da escala. Fonte: (Grossmann 2012)

De acordo com a massa do núcleo remanescente após a supernova, podem se formar diferentes objetos:

- **Anã Branca**: Tem uma densidade extremamente alta, com uma massa comparável à do Sol, mas um volume semelhante ao da Terra. Isso significa que a matéria em uma Anã Branca é comprimida a uma densidade milhares de vezes maior que a da matéria comum. Onde não pode ter uma massa maior que aproximadamente 1,4 $M_\odot$ (o chamado *limite de Chandrasekhar*). Acima dessa massa, a pressão de degenerescência dos elétrons não seria suficiente para equilibrar a gravidade, levando a um colapso gravitacional.

- **Estrela de Nêutrons**: Se o núcleo remanescente tiver uma massa próximo de 1,4 a 3 $M_\odot$, os prótons e elétrons se combinam para formar nêutrons, dando origem a uma estrela de nêutrons. Essas estrelas são extremamente densas, com massas comparáveis à do Sol, mas diâmetros de apenas cerca de no máximo 25 quilômetros.

- **Buraco Negro**: Se o núcleo remanescente for mais massivo do que o limite superior para uma estrela de nêutrons, que é de 3 $M_\odot$, ele colapsará ainda mais, compactando-se em um corpo tão denso que a gravidade superficial não deixa nem mesmo a luz escapar.

No ano de 1964 foram lançados dois foguetes suborbitais Aerobee [3] equipados com um par de Contadores Geiger [4] como parte de uma missão de mapear alguns pontos de origem

[3]Foguetes utilizados para experimentos de alta altitude na estratosfera e termosfera, proporcionando dados valiosos sobre a atmosfera, a radiação cósmica e outras áreas de pesquisa científica.

[4]Instrumentos de detecção de radiação ionizante, como: radiação alfa, beta e gama.

de emissões de radiação de alta energia. Ondas de alta energia, como raios X e raios gama, são bloqueadas pela nossa atmosfera, então a observação de emissões mais energéticas devem ser feitas na órbita da Terra. Como resultado, foram mapeadas oito fontes de emissões de raios X. Uma delas chamou atenção por ser extremamente forte, localizada em direção a *Constelação de Cygnus* na nossa galáxia *(Via Láctea)* a cerca de 6.070 anos-luz[5] de distância da Terra,onde essa fonte foi posteriormente denominada *Cygnus X-1*. O *Leiden Observatory*, na Holanda, e o *National Radio Astronomy Observatory*, nos Estados Unidos, detectaram de forma independente que a fonte do sinal de raios X estava na estrela HDE 226868, uma supergigante azul. Mas tais emissões tão intensas e energéticas não poderiam ser emitidas por uma estrela, portanto, HDE 226868 deveria ter um objeto companheiro invisível que fosse capaz de aquecer o gás até milhões de graus Celsius para que fosse capaz de emitir sinais de raios X (Hosti 2021).

Em 1971 foi anunciada a descoberta de um corpo celeste muito massivo junto de HDE 226868. Por meio de medidas de desvio de vermelho da luz da estrela supergigante, viu-se que essa estrela apresentava desvios periódicos, ora para o vermelho, ora para o azul. Ou seja, a estrela estava orbitando algo invisível e muito mais massivo do que ela mesma. Estimou-se que o objeto poderia ser um Buraco Negro, já que mesmo a maior estrela de nêutrons não conseguiria exceder três massas solares. Foi então, que no final de 1973, com diversas evidências em mãos, a comunidade astronômica já estava convencida de que Cygnus X-1 de fato era um Buraco Negro com uma massa de 15 $M\odot$ a 20 $M\odot$. Estava descoberto o primeiro Buraco Negro da história (Hosti 2021).

Porém, somente em 2019, através do projeto *Event Horizon Telescope* (EHT), foi apresentada a primeira imagem de um Buraco Negro, por meio de uma rede de radiotelescópios espalhados por toda a Terra. Localizado na direção da *Costelação de Virgem* na galáxia de *Messier* 87, a aproximadamente 53,5 milhões de anos-luz da Terra, está o Buraco Negro $M87^*$ Fig.3.3. Este é um Buraco Negro supermassivo, com uma massa equivalente a cerca de 6,5 bilhões $M\odot$.

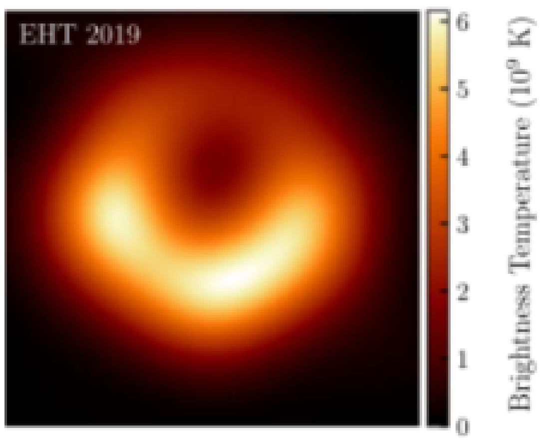

Figura 3.3: Foto do Buraco Negro M87*. Fonte: (Medeiros et al. 2023)

No ano de 1974 o Físico *Karl Jansky* (1905-1950) detectou um sinal de rádio vindo de um local no centro da Via Láctea, na direção da *Constelação de Sagitário*. Com isso,

[5]É a distância que a luz viaja no vácuo em um ano. É utilizada como unidade de comprimento para expressar distâncias astronômicas e é equivalente a cerca de 9,46 trilhões de quilômetros ($9,5x10^{12}$ Km).

os Astrônomos *Bruce Balick* e *Robert Brown*, usando o interferômetro de linha de base do *Observatório Nacional de Rádio Astronomia* (NRAO), conseguiram identificar que esse sinal de rádio poderia ser um Buraco Negro no Centro da Via Láctea, onde este foi chamado de *Sagittarius* A^* ou simplesmente *Sgr* A^*. A confirmação de que *Sgr* A^* é, de fato, um Buraco Negro supermassivo veio através das observações detalhadas do movimento das estrelas próximas, na década de 1990, utilizando telescópios infravermelhos e outras tecnologias avançadas. Essas observações mostraram que as estrelas orbitavam rapidamente em torno de um objeto invisível e extremamente massivo, fornecendo evidências conclusivas de que *Sgr* A^* é um Buraco Negro supermassivo. Tal que *Sgr* A^* possui uma massa equivalente a 4 milhões $M_\odot$ e está a cerca de 26 000 anos-luz da Terra (Broderick e Loeb 2009).

No dia 12 de maio de 2022, por meio do projeto EHT, foi divulgada a primeira imagem do Buraco Negro Sgr A^*, como mostra a Fig.3.4.

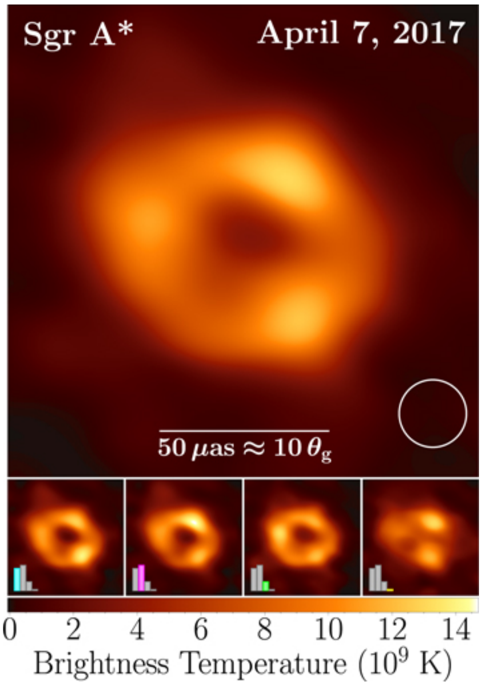

Figura 3.4: Foto do Buraco Negro Sgr A^*. Fonte: (Collaboration et al. 2022)

3.1.2 Características de um Buraco Negro

Na sua Teoria da Relatividade Geral, Einstein propôs que a gravidade não é apenas uma força entre massas, mas uma curvatura do espaço-tempo causada pela presença de massa e energia. Um Buraco Negro, por ser muito massivo é capaz de gerar uma curvatura no espaço-tempo ao seu redor, tal que esta é uma das manifestações mais extremas da gravidade descritas pela Teoria da Relatividade Geral. Com isso, temos que um Buraco Negro possui algumas características como mostra a Fig.3.5.

- **Singularidade**: A Singularidade de um Buraco Negro é uma região no espaço-tempo onde as leis da Física, como as conhecemos, deixam de se aplicar de forma normal. É um ponto de densidade infinita onde a curvatura do espaço-tempo se torna infinita, e o campo gravitacional é tão intenso que nada, nem mesmo a luz, pode escapar. Onde a singularidade é cercada por uma fronteira esférica chamada *Horizonte de Eventos*.

- **Horizonte de Eventos**: O Horizonte de Eventos é a superfície imaginária que marca a fronteira do Buraco Negro. Define o limite em que a velocidade necessária para escapar de um Buraco Negro excede a velocidade da luz, que é o limite de velocidade no universo. Matéria e radiação ficam presas e não conseguem sair.

- **Disco de Acreção**: O Disco de Acreção é uma estrutura formada por matéria em rotação ao redor de um objeto central massivo, como o próprio Buraco Negro. Tal que essa matéria é composta de gás e poeira que se aproximam do Buraco Negro devido a sua gravidade extrema. Porém, essa matéria não cai diretamente no Horizonte de Eventos, ela fica girando em torno dele. Isso acontece por mecanismos básicos da Física, como a *Conservação de Momento Angular* e a *Força Centrífuga*. Os Buracos Negros geralmente giram em torno de si mesmos, criando um arrasto no próprio tecido do espaço-tempo.

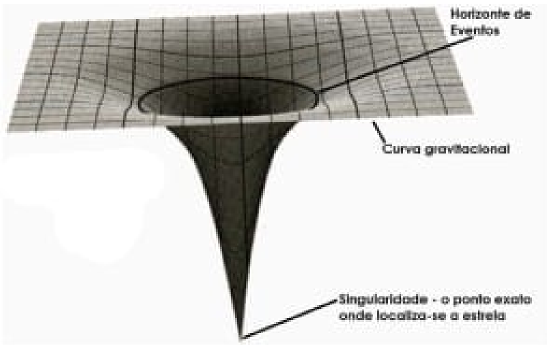

Figura 3.5: Representação de um Buraco Negro. Fonte: (Almeida 2021)

3.2 Buraco Negro de Schwarzschild

Um estudo mais preciso sobre Buracos Negros só foi possível com o advento da Teoria da Relatividade Geral, formulada por Einstein em 1915. Em menos de dois meses após a publicação da Relatividade Geral, o Astrônomo alemão *Karl Schwarzschild* (1873-1916), que já acompanhava os trabalhos de Einstein em gravitação, encontrou uma solução para as equações de Einstein. O Buraco Negro de Schwarzschild foi a primeira solução exata das equações da Relatividade Geral, além disso, são os mais simples que podem ser encontrados no universo. Na Relatividade Geral, descrever o espaço-tempo correspondente é equivalente a fornecer uma *Métrica* que seja solução das equações de Einstein. A métrica é um tensor que define a maneira como as distâncias e os ângulos são medidos em um espaço curvo, isto é, ela mostra como nossas réguas e relógios são afetados pela presença de um corpo massivo. A Métrica de Schwarzschild, que descreve o espaço-tempo em torno de um centro de atração de massa M esfericamente simétrico, sem rotação e sem carga elétrica, como é o Buraco Negro de Schwarzschild é dado por (Lobo 2006):

A métrica de Schwarzschild descreve o espaço-tempo em torno de uma massa esférica não-rotativa no vácuo. A dedução começa com a equação de campo de Einstein no vácuo:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0$$

que pode ser simplificada para:

$$R_{\mu\nu} = 0$$

1. Métrica Genérica com Simetria Esférica:
Assumimos uma métrica estática e esfericamente simétrica da forma:

$$ds^2 = A(r)dt^2 - B(r)dr^2 - r^2 d\theta^2 - \sin^2\theta\, d\phi^2$$

onde $A(r)$ e $B(r)$ são funções da coordenada radial r.
2. Conexões de Christoffel:
As componentes não nulas da conexão de Christoffel são dadas por:

$$\Gamma^t_{tr} = \frac{A'(r)}{2A(r)}, \quad \Gamma^r_{tt} = \frac{A'(r)}{2B(r)}, \quad \Gamma^r_{rr} = \frac{B'(r)}{2B(r)}, \quad \Gamma^r_{\theta\theta} = -rB(r)$$

$$\Gamma^r_{\phi\phi} = -rB(r)\sin^2\theta, \quad \Gamma^\theta_{r\theta} = \frac{1}{r}, \quad \Gamma^\phi_{r\phi} = \frac{1}{r}$$

3. Tensor de Ricci:
Agora, calculamos o tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$. As componentes principais são:
Componente R_{tt}:

$$R_{tt} = \frac{A''(r)}{2B(r)} - \frac{A'(r)B'(r)}{4B^2(r)} + \frac{A'(r)}{rB(r)}$$

Componente R_{rr}:

$$R_{rr} = -\frac{A''(r)}{2A(r)} + \frac{A'(r)B'(r)}{4A(r)B(r)} + \frac{A'(r)}{rA(r)} - \frac{B'(r)}{rB(r)}$$

Componente $R_{\theta\theta}$:

$$R_{\theta\theta} = 1 - \frac{1}{B(r)} + \frac{rB'(r)}{2B^2(r)} - \frac{rA'(r)}{2A(r)B(r)}$$

4. Resolver as Equações de Campo:
A equação $R_{\mu\nu} = 0$ nos fornece um sistema de equações diferenciais. Vamos resolvê-las.
(i) Equação $R_{rr} = 0$:
A partir de $R_{rr} = 0$, temos:

$$\frac{A'(r)}{A(r)} + \frac{B'(r)}{B(r)} = 0$$

Integrando, obtemos:

$$A(r)B(r) = \text{constante}$$

Definimos essa constante como 1 para simplificação:

$$B(r) = \frac{1}{A(r)}$$

(ii) Equação $R_{\theta\theta} = 0$:
A partir de $R_{\theta\theta} = 0$, obtemos a seguinte equação diferencial para $A(r)$:

$$rA'(r) + A(r) - 1 = 0$$

A solução dessa equação é:

$$A(r) = 1 - \frac{C}{r}$$

onde C é uma constante de integração.
5. Determinação da Constante C:
Para grandes distâncias r, $A(r)$ deve se aproximar do potencial gravitacional newtoniano:

$$\lim_{r\to\infty} A(r) = 1 - \frac{2GM}{r}$$

Portanto, $C = 2GM$, onde M é a massa do objeto central. Assim, temos:

$$A(r) = 1 - \frac{2GM}{r}$$

6. Métrica de Schwarzschild:
Substituindo $A(r) = 1 - \frac{2GM}{r}$ e $B(r) = \frac{1}{A(r)}$ na métrica original, obtemos a métrica de Schwarzschild:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta \, d\phi^2 \tag{3.1}$$

Esta é a métrica de Schwarzschild, que descreve o espaço-tempo em torno de uma massa esfericamente simétrica no vácuo.

onde:

- ds é o intervalo espaço-tempo.
- G é a constante de gravitação universal.
- M é a massa do objeto central.
- c é a velocidade da luz no vácuo.
- dt é o tempo próprio medido por um observador em repouso no infinito.
- r é a coordenada radial.

- θ é o ângulo polar.
- ϕ é o ângulo azimutal.

Na Eq.3.1 temos as seguintes considerações:

- O fator de curvatura $\left(1-\frac{2GM}{c^2r}\right)$ que aparece em dt e dr depende apenas de r uma vez que o centro de atração é esfericamente simétrico, isto é, o objeto é o mesmo para qualquer valor de ϕ . Por isso não se pode ter um valor de curvatura dependente de ϕ (Lobo 2006).
- No limite de grandes distâncias a curvatura tende a 1 como era de se esperar. Longe da fonte o campo gravitacional se aproxima de zero e a métrica de Schwarzschild se aproxima a uma métrica do espaço-tempo plano (Lobo 2006).
- Para $M = 0$, a métrica de Schwarzschild se reduz novamente a uma métrica onde o espaço-tempo é plano, como deveria. Ausência de fontes não produz curvatura (Lobo 2006).

A *Métrica de Schwarzschild* não é apenas uma solução para as equações de Einstein, ela é uma ferramenta indispensável para descrever o comportamento do espaço-tempo em torno de objetos massivos. Sua importância reside na previsão de Buracos Negros, explicações para observações astronômicas, como o avanço do periélio de Mercúrio e o desvio gravitacional da luz, e na consolidação da relatividade geral como uma teoria bem-sucedida da gravitação. Além disso, a métrica continua sendo crucial para o desenvolvimento de teorias mais avançadas, como a *Gravitação quântica*.

3.2.1 Horizonte de eventos de Schwarzschild

O Horizonte de Eventos de um Buraco Negro de Schwarzschild é uma superfície esférica imaginária que marca o limite além do qual nada pode escapar da atração gravitacional do Buraco Negro. É definido pelo *Raio de Schwarzschild* (R_s) que depende da massa do Buraco Negro, dado por (Bergliaffa 2023):

$$R_s = \frac{2GM}{c^2} \tag{3.2}$$

Como o R_s depende da massa do Buraco Negro, temos que para os Buracos Negros $M87^*$ e $Sgr\ A^*$, o R_s será 19.2 bilhões de Km e 11.8 milhões de Km, respectivamente.

Nas proximidades do Horizonte de Eventos muitos fenômenos físicos ocorrem. Onde um dos principais fenômenos é a *Dilatação Gravitacional do Tempo*, que ocorre devido intensa curvatura do espaço-tempo causada pela gravidade extrema do Buraco Negro, mostrando a profunda influência que essa gravidade tem sobre o *tempo* e o *espaço*. Para um observador próximo ao Horizonte de Eventos o tempo tende a zero. Com isso, esse observador vai sentir *Forças de maré*[6] extremas, levando à *Espaguetificação*, onde será esticado na direção radial e comprimido nas direções transversais devido à variação intensa da força gravitacional (Würz 2022).

[6] A força de maré refere-se às forças gravitacionais que um corpo celeste exerce sobre outro, causando distorções ou deformações. No caso de um Buraco Negro supermassivo, se uma estrela se aproxima muito dele, as forças de maré são tão fortes que fazem com que ela seja completamente destruída, e sua matéria espirale em direção a ele, formando um disco de acreção.

No entanto, para um observador distante o tempo passará de forma que estamos habituados em nosso dia a dia, além disso, A luz emitida por um objeto próximo ao Horizonte de Eventos será deslocada para o vermelho (redshift), tornando-se menos energética. Para O observador distante, a luz se torna progressivamente mais vermelha e menos visível à medida que o objeto se aproxima do horizonte de eventos.

Para a Dilatação Gravitacional do Tempo, focamos no componente temporal da Eq.3.1, com isso temos que a relação entre o Tempo Próprio (τ) e o Tempo Coordenado (t) é:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2\, dt^2 \tag{3.3}$$

Onde o Tempo Próprio (τ) entre dois eventos é dado por:

$$d\tau = \frac{ds}{c} \tag{3.4}$$

Substituindo a Eq.3.3 na Eq.3.4, temos:

$$d\tau = \frac{\sqrt{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2\, dt^2}}{c}$$

$$d\tau = cdt \frac{\sqrt{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)}}{c}$$

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} dt \tag{3.5}$$

A Eq.3.5 determina a Dilatação Gravitacional do Tempo nas proximidades de um Buraco Negro de Schwarzschild.

Onde:

- $d\tau$ é o intervalo de tempo medido por um observador próximo ao buraco negro.
- r é a distância radial do centro do buraco negro.
- dt é o intervalo de tempo medido por um observador distante, fora do campo gravitacional do Buraco Negro de Schwarzschild.

3.2.2 Órbitas Circulares Estáveis mais Internas (ISCO)

Ao analisar a trajetória de uma partícula de teste massiva e sem rotação orbitando um Buraco Negro central, pode-se obter um raio mínimo no qual uma partícula consegue sustentar uma órbitar circular estável. Este raio é chamado de Órbita Circular Estável mais Interna (ISCO, do inglês "*Innermost Stable Circular Orbits*"), sendo bastante importante pois em qualquer ponto além da ISCO, a órbita circular de uma partícula em torno do Buraco Negro é estável. Porém, após atravessar o ISCO, uma pequena perturbação na órbita já causaria uma rápida espiral em direção ao centro do Buraco Negro (Scarpin 2022). Onde a *Energia Específica* **E** e o *Momento*

Angular Específico **L** de uma partícula em órbita no ISCO são tais que qualquer diminuição no raio da órbita levará a uma perda significativa de estabilidade, fazendo com que a partícula espirale para dentro do Buraco Negro ou escape para uma órbita mais distante.

A localização do ISCO estabelece o limite interno dos discos de acreção ao redor de Buracos Negros. O material em um disco de acreção pode se mover em órbitas estáveis até a ISCO. Dentro deste raio, o material geralmente cai rapidamente no Buraco Negro. Portanto, o ISCO executa um papel crucial na dinâmica dos discos de acreção e na emissão de radiação, especialmente na faixa de raios-X. A radiação emitida pelo material no disco de acreção próximo ao ISCO pode oferecer informações sobre a Física extrema nos arredores dos Buracos Negros. A alta energia e o momento angular do material no ISCO auxiliam para processos de emissão complexos e altamente energéticos, que podem ser observados por telescópios de raios-X (Espinosa 2022).

Para o Buraco Negro de Schwarzschild, o ISCO define a distância mais próxima onde uma partícula pode manter uma órbita circular estável sem espiralar para dentro do Buraco Negro, como mostra a Fig.3.6.

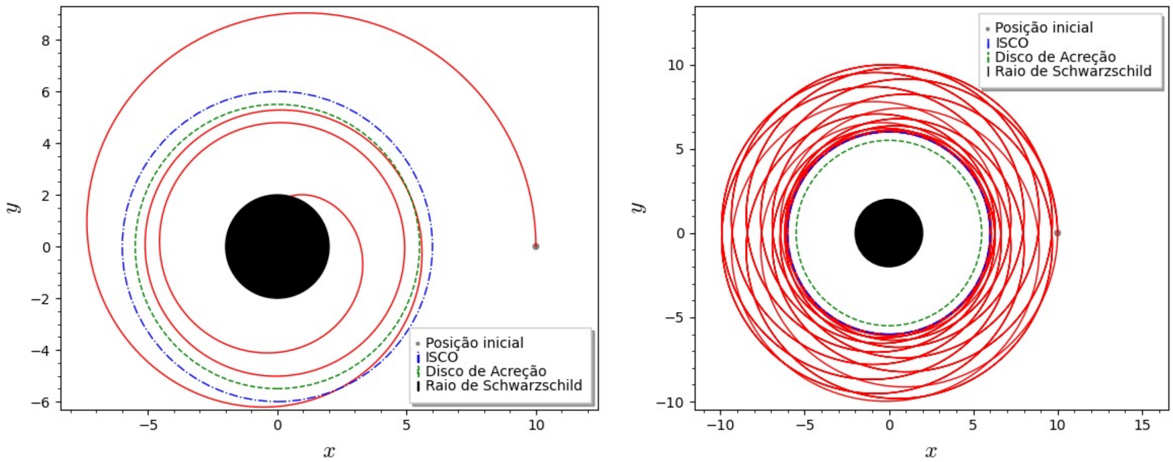

Figura 3.6: Simulação orbital para uma partícula caindo a partir de uma órbita elíptica perto de um Buraco Negro de Schwarzschild. Fonte: autoria própria.

Nesta condição, temos que o raio do ISCO (r_s) é definido tomando a Métrica de Schwarzschild Eq.3.1:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2\, dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 - r^2\, d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta\, d\phi^2$$

Temos $\theta = \frac{\pi}{2}$ e $d\theta = 0$ para órbitas circulares no Plano Equatorial, então:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2\, dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\phi^2 \tag{3.6}$$

Temos que a *Lagrangeana* $\mathscr{L}$ no plano equatorial é:

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{2GM}{c^2 r}\right)c^2\dot{t}^2 - \left(1-\frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1}\dot{r}^2 - r^2\dot{\phi}^2\right] \tag{3.7}$$

Onde: $\dot{t} = \frac{d}{d\tau}t$, $\dot{r} = \frac{d}{d\tau}r$ e $\dot{\phi} = \frac{d}{d\tau}\phi$.

Temos que a *Conservação da Energia* **E** é:

$$\frac{\partial}{\partial \dot{t}}\mathscr{L} = \frac{\partial}{\partial \dot{t}}\left\{\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{2GM}{c^2 r}\right)c^2\dot{t}^2 - \left(1-\frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1}\dot{r}^2 - r^2\dot{\phi}^2\right]\right\}$$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{t}}\mathscr{L} = \frac{\partial}{\partial \dot{t}}\left\{\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{2GM}{c^2 r}\right)c^2\dot{t}^2\right]\right\}$$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{t}}\mathscr{L} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{2GM}{c^2 r}\right)c^2\frac{\partial}{\partial \dot{t}}\left(\dot{t}^2\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{t}}\mathscr{L} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{2GM}{c^2 r}\right)c^2 2\dot{t}$$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{t}}\mathscr{L} = \left(1-\frac{2GM}{c^2 r}\right)c^2\dot{t} = \mathbf{E}$$

$$\mathbf{E} = \left(1-\frac{2GM}{c^2 r}\right)c^2\dot{t}$$

$$\dot{t} = \frac{\mathbf{E}}{\left(1-\frac{2GM}{c^2 r}\right)c^2} \tag{3.8}$$

O *Momento Angular* **L** é conservado e dado por:

$$\frac{\partial}{\partial \dot{\phi}}\mathscr{L} = \frac{\partial}{\partial \dot{\phi}}\left\{\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{2GM}{c^2 r}\right)c^2\dot{t}^2 - \left(1-\frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1}\dot{r}^2 - r^2\dot{\phi}^2\right]\right\}$$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{\phi}}\mathscr{L} = \frac{\partial}{\partial \dot{\phi}}\left(-\frac{1}{2}r^2\dot{\phi}^2\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{\phi}}\mathscr{L} = -\frac{1}{2}r^2\frac{\partial}{\partial \dot{\phi}}\left(\dot{\phi}^2\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{\phi}}\mathscr{L} = -r^2\dot{\phi} = \mathbf{L}$$

$$\dot{\phi} = -\frac{\mathbf{L}}{r^2} \tag{3.9}$$

Para *Órbitas Circulares* a *Lagrangeana* é definida como:

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{2GM}{c^2 r}\right)c^2\dot{t}^2 - \left(1-\frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1}\dot{r}^2 - r^2\dot{\phi}^2\right]$$

Para $\dot{r} = 0$,

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{2GM}{c^2 r}\right)c^2\dot{t}^2 - r^2\dot{\phi}^2\right] \tag{3.10}$$

Agora calcularmos o *Potencial Efetivo* $\mathbf{V}_{eff}$. Tal que este potencial na Cosmologia é usado para descrever as órbitas possíveis das partículas ao redor de um Buraco Negro. Ele inclui os efeitos combinados da gravidade do objeto central e das forças inerciais das partículas em órbita. O potencial efetivo no ISCO é particularmente importante para determinar características como a estabilidade das órbitas ao redor do Buraco Negro, como também, ajuda a calcular a posição exata do ISCO e as propriedades das órbitas estáveis próximas ao Buraco Negro, como a velocidade orbital, o período orbital e a energia potencial efetiva associada à órbita. Portanto, temos que o $\mathbf{V}_{eff}$ é dado definido pela Eq.3.10 da seguinte maneira:

$$\mathbf{V}_{eff} = \frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{2GM}{c^2 r}\right)c^2\dot{t}^2 - r^2\dot{\phi}^2\right]$$

Substituindo $\dot{t}$ e $\dot{\phi}$ na equação acima, temos:

$$\mathbf{V}_{eff} = \frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{2GM}{c^2 r}\right)c^2\left[\frac{\mathbf{E}}{\left(1-\frac{2GM}{c^2 r}\right)c^2}\right]^2 - r^2\left[-\frac{\mathbf{L}}{r^2}\right]^2\right\}$$

$$\mathbf{V}_{eff} = \left(1-\frac{2GM}{c^2 r}\right)\frac{\mathbf{L}^2}{2r} \tag{3.11}$$

Derivando a Eq.3.11, e considerando para órbitas estáveis $\frac{d}{dr}\mathbf{V}_{eff} = 0$, temos:

$$\frac{d}{dr}\mathbf{V}_{eff} = \frac{d}{dr}\left[\left(1-\frac{2GM}{c^2 r}\right)\frac{\mathbf{L}^2}{2r}\right]$$

Pela *Regra do Produto*,

$$\frac{d}{dr}\left(1-\frac{2GM}{c^2 r}\right)\frac{\mathbf{L}^2}{2r} + \left(1-\frac{2GM}{c^2 r}\right)\frac{d}{dr}\frac{\mathbf{L}^2}{2r} = 0$$

$$r^{-2}\left(\frac{2GM}{c^2}\right)\frac{\mathbf{L}^2}{2r} + \left(1-\frac{2GM}{c^2 r}\right)\left(-r^{-2}\right)\frac{\mathbf{L}^2}{2} = 0$$

$$-3r^{-4}\left(\frac{2GM\mathbf{L}^2}{c^2}\right) - 2r^{-3}\left(\frac{\mathbf{L}^2}{2}\right) = 0$$

$$-\frac{6GM\mathbf{L}^2}{c^2 r^4} - \frac{\mathbf{L}^2}{r^3} = 0$$

$$\frac{6GM\mathbf{L}^2}{c^2r^4} = \frac{\mathbf{L}^2}{r^3}$$

$$r = \frac{6GM}{c^2}$$

Onde, $\frac{2GM}{c^2}$ é o *Raio de Schwarzschild* (R_s) dado na Eq.3.2. Portanto:

$$r_s = 3R_S \tag{3.12}$$

A Eq.3.12 determina o Raio do ISCO.

3.2.3 Órbitas nas Proximidades de um Buraco Negro de Schwarzschild

Temos que a órbita na proximidade de um Buraco Negro de Schwarzschild existem para $r > r_s$. A frequência orbital, energia e momento angular dessas órbitas dependem do raio r. Essas órbitas são fundamentais para entender a dinâmica de discos de acreção e a emissão de radiação do Buraco Negro, proporcionando uma base para estudos observacionais e teóricos em Astrofísica Relativística.

No entanto, devido à curvatura do espaço-tempo, uma órbita que não seja perfeitamente circular experimentará uma *Precessão do periélio* ou *Precessão relativística*. Tal que, o Periélio é o ponto da órbita de uma patícula, na qual ela está mais próxima do Buraco Negro que está orbitando, onde em um campo gravitacional relativístico, o periélio da órbita dessa patícula avança lentamente ao longo do tempo criando uma órbita em espiral, de maneira que a partícula não retorna ao mesmo ponto após uma revolução completa. Este avanço é conhecido como *precessão do periélio* (Silva 2018).

A *precessão do periélio* é representada na Fig.3.7, onde mostra a órbita na forma de *roseta*.

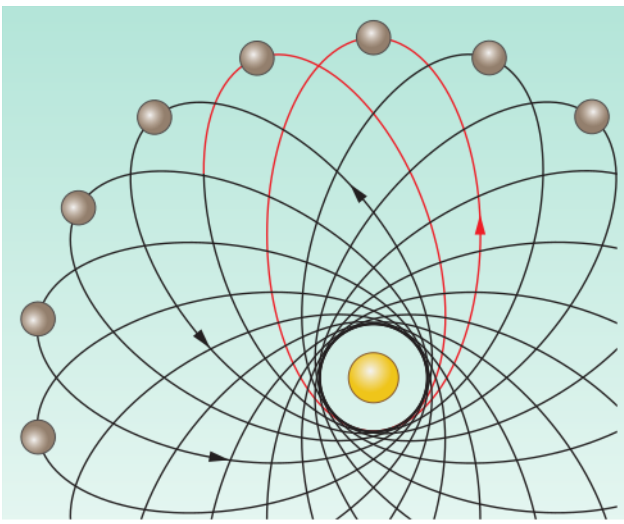

Figura 3.7: Precessão do periélio em roseta criado pela rotação de uma órbita quase elíptica em seu próprio plano. Fonte: (Lambourne 2010).

Para um Buraco Negro de Schwarzschild, a equação que descreve a precessão do periélio é:

$$\Delta\phi = \frac{6\pi GM}{c^2 a\,(1-e^2)} \tag{3.13}$$

Onde:

- $\Delta\phi$ é o avanço do periélio por órbita.
- a é o semi-eixo maior da órbita elíptica.
- e é a excentricidade da órbita.

A Excentricidade da órbita indica o quanto a órbita se desvia de ser um círculo perfeito, onde esta é uma grandeza adimensional que varia de $0 < e < 1$ para órbitas elípticas. Com isso, temos que quando a excentricidade cresce a elipse torna-se mais achatada e quando a excentricidade tende para zero a elipse tende para a circunferência.

3.3 Cordas Cósmicas

Defeitos topológicos são uma consequência natural de vários modelos que procuram entender o cenário padrão (forças eletrofracas e fortes) das interações fundamentais. Admite-se que essas interações se unifiquem numa escala de energia alta, como a *Teoria da Grande Unificação* (GUT do inglês "*grand unification theory*") , cujo valor, que depende do modelo, é da ordem de 10^{16} GeV [7]. À medida que o universo esfriou, passando de temperaturas comparáveis às da GUT para temperaturas menores, ocorreram *Transições de fase*, e isso deu origem a regiões nas quais as fases iniciais ficaram confinadas. Tais regiões, por serem topologicamente estáveis, são chamadas defeitos topológicos (Rocha 2009).

Os defeitos topologicos são basicamente de três tipos: *Monopolos* (objetos puntiformes), *Muros de domínio* (superfícies de descontinuidade) e *Cordas cósmicas* (linhas extensas). Apenas Cordas cósmicas e Muros de domínio podem cruzar o universo inteiro. No instante de sua formação, os defeitos surgem como uma rede que se desenvolve, posteriormente, por causa de sua própria dinâmica e da expansão do universo. Portanto, a influência cosmológica dos defeitos topológicos depende crucialmente de sua dinâmica (Rocha 2009).

Durante essa transição de fase nos primeiros instantes de evolução do universo, houve uma quebra de simetria no universo primitivo, ou seja, algumas regiões evoluíram de modo um pouco diferente das demais em termos de distribuição de massa. Com isso, Podemos comparar as cordas cósmicas com as rachaduras dentro de uma pedra de gelo, que se formam à medida que um ponto de nucleação aleatório inicia o processo de congelamento da água. A partir desse momento, a cristalização ocorre de modo desigual, formando linhas semelhantes a rachaduras por todo o gelo. Com o universo, poderia ter sido semelhante: à medida que se expandia nos primeiros instantes de modo desigual, as fissuras se espalharam por todo o cosmos. Da mesma forma que as fissuras no gelo surgem durante a transição de estado da água, as cordas

[7] É a abreviação para Giga Eletron Volts, uma unidade de medida de energia usada principalmente na Física de partículas. Um Giga Eletron Volt (GeV) equivale a um bilhão de eletronvolts (eV).

cósmicas surgiram nas transições do estágio de vácuo da expansão e do resfriamento do universo primordial (Cavalcante e Gnipper 2023).

Elas são essencialmente fissuras ou falhas unidimensionais no espaço-tempo, semelhantes às falhas que podem se formar em cristais quando eles se solidificam. São objetos unidimensionais, alongados e finos, com comprimento potencialmente infinito, mas com uma largura infinitesimalmente pequena e com uma densidade de energia extremamente alta, o que significa que uma pequena quantidade de corda cósmica pode conter uma quantidade enorme de massa-energia.

A importância das Cordas cósmicas consiste em sua capacidade de relacionar as grandes escalas cosmológicas com as pequenas escalas da física de partículas. Elas são uma manifestação da GUT, que tentam conectar as forças fundamentais da natureza (gravidade, eletromagnetismo, interações fracas e fortes) em um único quadro. Se forem detectadas, as Cordas cósmicas podem proporcionar evidências para a física de altíssimas energias e ajudarão a esclarecer os processos que ocorreram no universo primordial. Elas podem abrir uma nova janela para entendermos a origem do universo e as possíveis transições de fase que ocorreram após o Big Bang.

A equação da corda cósmica pode ser obtida a partir de uma distribuição infinitamente concentrada de matéria, com *densidade de energia* σ, Onde o elemento de linha do espaço-tempo de uma corda cósmica infinita é:

$$ds^2 = A^2_{(\rho)}dt^2 - d\rho^2 - c^2_{(\rho)}d\theta^2 - A^2_{(\rho)}dz^2 \tag{3.14}$$

No caso de uma certa distribuição estar localizada sobre o eixo azimutal z, o *Tensor energia-momento* Eq. 2.30, em coordenadas cilíndricas, é dado por:

$$T_{\mu\nu} = \sigma_{(\rho)} diag\,(1,0,0,1)\,\delta^2\,(\mathbf{r}) \tag{3.15}$$

Onde a função $\delta^2\,(\mathbf{r})$ é a função *delta de Dirac* em duas dimensões.

Considerando a Equação de campo de Einstein Eq.2.44, pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$R_{\mu\nu} = k\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right) \tag{3.16}$$

Sendo assim, temos que o *Tensor de Ricci* $R_{\mu\nu}$ para cada coordenada da Eq.3.16 é:

$$R_{tt} = R_{zz} = \frac{1}{A_{(\rho)}}\frac{d^2A_{(\rho)}}{d\rho^2} + \frac{1}{A_{(\rho)}C_{(\rho)}}\frac{dA_{(\rho)}}{d\rho}\frac{dC_{(\rho)}}{d\rho} + \frac{1}{A^2_{(\rho)}}\left(\frac{dA_{(\rho)}}{d_\rho}\right)^2 \tag{3.17}$$

$$R_{\rho\rho} = \frac{2}{A_{(\rho)}}\frac{d^2A_{(\rho)}}{d\rho^2} + \frac{1}{C_{(\rho)}}\frac{d^2C_{(\rho)}}{d\rho^2} \tag{3.18}$$

$$R_{\theta\theta} = \frac{1}{C_{(\rho)}}\frac{d^2C_{(\rho)}}{d\rho^2} + \frac{2}{A_{(\rho)}C_{(\rho)}}\frac{dA_{(\rho)}}{d\rho}\frac{dC_{(\rho)}}{d\rho} \tag{3.19}$$

E para T, temos que:

$$T = T_{tt} + T_{\rho\rho} + T_{\theta\theta} + T_{zz}$$

$$T = \sigma + 0 + 0 + \sigma$$

$$T = 2\sigma \tag{3.20}$$

Definindo agora as *Métricas* $g_{\mu\nu}$, temos

• Para g_{tt}:

$$g_{tt} = g^{t\alpha} g_{\alpha t}$$

$$g_{tt} = g^{tt} g_{tt} + \underbrace{g^{t\rho} g_{\rho t}}_{0} + \underbrace{g^{t\theta} g_{\theta t}}_{0} + \underbrace{g^{tz} g_{zt}}_{0}$$

$$g_{tt} = g^{tt} g_{tt}$$

$$g_{tt} = \frac{1}{A^2} A^2$$

$$g_{tt} = 1 \tag{3.21}$$

• Para $g_{\rho\rho}$:

$$g_{\rho\rho} = g^{\rho\alpha} g_{\alpha\rho}$$

$$g_{\rho\rho} = \underbrace{g^{\rho t} g_{t\rho}}_{0} + g^{\rho\rho} g_{\rho\rho} + \underbrace{g^{\rho\theta} g_{\theta\rho}}_{0} + \underbrace{g^{\rho z} g_{z\rho}}_{0}$$

$$g_{\rho\rho} = g^{\rho\rho} g_{\rho\rho}$$

$$g_{\rho\rho} = \left(-\frac{1}{1}\right)(-1)$$

$$g_{\rho\rho} = 1 \tag{3.22}$$

• Para $g_{\theta\theta}$:

$$g_{\theta\theta} = g^{\theta\alpha} g_{\alpha\theta}$$

$$g_{\theta\theta} = \underbrace{g^{\theta t} g_{t\theta}}_{0} + \underbrace{g^{\theta\rho} g_{\rho\theta}}_{0} + g^{\theta\theta} g_{\theta\theta} + \underbrace{g^{\theta z} g_{z\theta}}_{0}$$

$$g_{\theta\theta} = g^{\theta\theta} g_{\theta\theta}$$

$$g_{\theta\theta} = -\frac{1}{C^2}\left(-C^2\right)$$

$$g_{\theta\theta} = 1 \tag{3.23}$$

• Para g_{zz}:

$$g_{zz} = g^{z\alpha} g_{\alpha z}$$

$$g_{zz} = \underbrace{g^{zt} g_{tz}}_{0} + \underbrace{g^{z\rho} g_{\rho z}}_{0} + \underbrace{g^{z\theta} g_{\theta z}}_{0} + g^{zz} g_{zz}$$

$$g_{zz} = g^{zz} g_{zz}$$

$$g_{zz} = -\frac{1}{A^2}\left(-A^2\right)$$

$$g_{zz} = 1 \tag{3.24}$$

Através da Eq.3.16, podemos substituir pelas *Métricas* encontradas e pelo *Tensor Energia-Momento* da seguinte maneira:

• Para g_{tt} e T_{tt}:

$$R_{\mu\nu} = k\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T\right)$$

$$R_{tt} = k\left(T_{tt} - \frac{1}{2} g_{tt} T\right)$$

$$R_{tt} = k\left(\sigma - \frac{1}{2} 2\sigma\right)$$

$$R_{tt} = k\left(\sigma - \sigma\right)$$

$$R_{tt} = 0 \tag{3.25}$$

• Para $g_{\rho\rho}$ e $T_{\rho\rho}$:

$$R_{\mu\nu} = k\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T\right)$$

$$R_{\rho\rho} = k\left(T_{\rho\rho} - \frac{1}{2}g_{\rho\rho}T\right)$$

$$R_{\rho\rho} = k\left(0 - \frac{1}{2}2\sigma\right)$$

$$R_{\rho\rho} = k(0 - \sigma)$$

$$R_{\rho\rho} = -k\sigma \tag{3.26}$$

• Para $g_{\theta\theta}$ e $T_{\theta\theta}$:

$$R_{\mu\nu} = k\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right)$$

$$R_{\theta\theta} = k\left(T_{\theta\theta} - \frac{1}{2}g_{\theta\theta}T\right)$$

$$R_{\theta\theta} = k\left(0 - \frac{1}{2}2\sigma\right)$$

$$R_{\theta\theta} = -k\sigma \tag{3.27}$$

• Para g_{zz} e T_{zz}:

$$R_{\mu\nu} = k\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right)$$

$$R_{zz} = k\left(T_{zz} - \frac{1}{2}g_{zz}T\right)$$

$$R_{zz} = k\left(\sigma - \frac{1}{2}2\sigma\right)$$

$$R_{zz} = 0 \tag{3.28}$$

Substituindo a Eq.3.27 na Eq.3.19, temos:

$$R_{\theta\theta} = \frac{1}{C_{(\rho)}}\frac{d^2C_{(\rho)}}{d\rho^2} + \frac{2}{A_{(\rho)}C_{(\rho)}}\frac{dA_{(\rho)}}{d\rho}\frac{dC_{(\rho)}}{d\rho}$$

$$\frac{1}{C_{(\rho)}}\frac{d^2C_{(\rho)}}{d\rho^2} + \frac{2}{A_{(\rho)}C_{(\rho)}}\frac{dA_{(\rho)}}{d\rho}\frac{dC_{(\rho)}}{d\rho} = -k\sigma \tag{3.29}$$

A conservação de energia nos fornece mais uma equação diferencial da seguinte maneira:

$$\nabla_\mu T_{\mu\nu} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\Gamma^\mu{}_\nu + \Gamma^\mu{}_{\mu\alpha}\Gamma^\alpha{}_\nu - \Gamma^\alpha{}_{\mu\nu}\Gamma^\mu{}_\alpha = 0$$

• Para $\mu = \alpha = 0$ e $\nu = 1$, temos:

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial x^0}\Gamma^0{}_1}_{0} + \underbrace{\Gamma^0{}_{00}\Gamma^0{}_1}_{0} - \Gamma^0{}_{01}\Gamma^0{}_1 = 0$$

$$-\Gamma^0{}_{01}\Gamma^0{}_1 = 0$$

• Temos que $\Gamma^0{}_{01} = T^t{}_{t\rho} = \frac{1}{A}\frac{dA}{d\rho}$ e $T^0{}_0 = \sigma$. Assim,

$$-\frac{1}{A}\frac{dA}{d\rho} = 0 \tag{3.30}$$

Substituindo a Eq.3.30 na Eq.3.29, temos:

$$\frac{1}{C_{(\rho)}}\frac{d^2C_{(\rho)}}{d\rho^2} - \frac{2}{C_{(\rho)}}\underbrace{\frac{dA_{(\rho)}}{Ad\rho}}_{0}\frac{dC_{(\rho)}}{d\rho} = -k\sigma$$

$$\frac{1}{C_{(\rho)}}\frac{d^2C_{(\rho)}}{d\rho^2} = -k\sigma$$

$$k\sigma = -\frac{1}{C_{(\rho)}}\frac{d^2C_{(\rho)}}{d\rho^2}$$

$$\sigma = -\frac{1}{KC_{(\rho)}}\frac{d^2C_{(\rho)}}{d\rho^2} \tag{3.31}$$

Pela Eq.3.13, temos que:

$$x = \begin{pmatrix} A^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -C^2_{(\rho)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -A^2 \end{pmatrix}$$

$$x = A^2\left(-C^2_{(\rho)}\right)\left(-A^2\right)$$

$$x = A^4C^2_{(\rho)}$$

$$A^2 C_{(\rho)} = \sqrt{x} \tag{3.32}$$

Fazendo a integral com relação a ρ e θ, temos:

$$\mu = \int_0^\infty d\rho \int_0^{2\pi} A^2 C_{(\rho)} \sigma d\theta$$

$$\mu = \int_0^\infty d\rho \int_0^{2\pi} A^2 C_{(\rho)} \left(-\frac{1}{KC_{(\rho)}} \frac{d^2 C_{(\rho)}}{d\rho^2} \right) d\theta$$

$$\mu = \int_0^{2\pi} A^2 \left(-\frac{1}{K} \right) d\theta \int_0^\infty \frac{d^2 C_{(\rho)}}{d\rho^2} d\rho$$

$$\mu = -\frac{A^2}{K} \int_0^{2\pi} d\theta \frac{d^2 C_{(\rho)}}{d\rho^2} \int_0^\infty d\rho$$

$$\mu = -\frac{2\pi A^2}{K} \left(\frac{dC_{(\rho)}}{d\rho} - 1 \right)$$

$$\mu = -\frac{2\pi A^2}{\frac{8\pi G}{C^4_{(\rho)}}} \left(\frac{dC_{(\rho)}}{d\rho} - 1 \right)$$

$$\mu = \frac{A^2 C^4_{(\rho)}}{4G} \left(1 - \frac{dC_{(\rho)}}{d\rho} \right)$$

Como $C_{(\rho)}$ e A^2 são constantes, podemos dizer que $C_{(\rho)} = 1$ e $A^2 = 1$, então:

$$\mu = \frac{1}{4G} \left(1 - \frac{dC_{(\rho)}}{d\rho} \right)$$

$$\frac{dC_{(\rho)}}{d\rho} = 1 - 4G\mu$$

$$\int dC_{(\rho)} = \int (1 - 4G\mu)\, d\rho$$

$$C_{(\rho)} = (1 - 4G\mu)\, \rho \tag{3.33}$$

Portanto, temos que a *Métrica da Corda Cósmica* é:

$$ds^2 = dt^2 - d\rho^2 - c^2_{(\rho)} d\theta^2 - dz^2$$

$$ds^2 = dt^2 - d\rho^2 - [(1 - 4G\mu)\, \rho]^2\, d\theta^2 - dz^2$$

$$ds^2 = dt^2 - d\rho^2 - (1-4G\mu)^2 \rho^2 d\theta^2 - dz^2$$

Chamando $1-4G\mu = \alpha$, temos:

$$ds^2 = dt^2 - d\rho^2 - \alpha^2 \rho^2 d\theta^2 - dz^2 \tag{3.34}$$

A Eq.3.34 é a métrica de uma corda cósmica, que fornece uma descrição do espaço-tempo ao redor de uma corda cósmica reta e infinitamente longa, onde:

- ds^2 é o intervalo de espaço-tempo.
- t é a coordenada temporal.
- ρ e θ são as coordenadas cilíndricas perpendiculares à corda.
- z é a coordenada ao longo da corda (a corda é estendida ao longo do eixo z).
- α é a dimensão angular em torno da corda.
- μ é a densidade linear de massa

No ângulo α é onde ocorre a influência da corda cósmica. Se consideramos um espaço-tempo plano sem cordas, a componente seria simplesmente $r^2 d\theta^2$. Porém, com presença da corda cósmica, o espaço-tempo é alterado pelo fator α, que representa o *déficit angular* [8] causado pela corda, onde varia de: $0 < \alpha \leq 1$. Para descrevermos as cordas cósmicas idealizadas, ou seja, cordas cósmicas estáticas, com distribuição de matéria infinita concentrada ao longo do eixo z e cuja a estrutura interna pode ser desprezível, usaremos o modelo de *Nielsen-Olesen* (Sousa e Lima 2017).

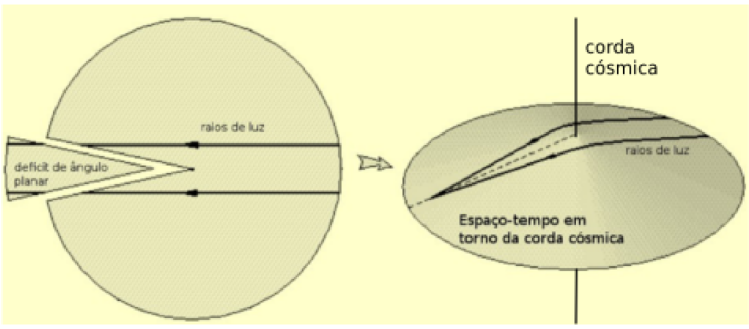

Figura 3.8: déficit de ângulo do espaço-tempo. Fonte: (Santos et al. 2016).

Um outro fato potencialmente importante é que, devido à natureza cônica do espaço ao redor da corda cósmica, podem ser formadas imagens duplas de objetos localizados atrás da corda cósmica. Este fenômeno é conhecido como lentes gravitacionais. Na formação de imagens duplas, podemos notar que o espaço cônico é formado pela retirada de uma região corresponde ao ângulo α do espaço plano e depois identificando as bordas. Devido a isto, o observador verá duas imagens da fonte conforme a Fig.3.8 (Santos et al. 2016) .

Ao considerarmos uma partícula próxima a Corda cósmica com diferentes déficits angulares, temos os seguintes gráficos:

[8] O déficit angular é uma medida de quanto o ângulo ao redor da corda cósmica é reduzido em comparação com um círculo completo.

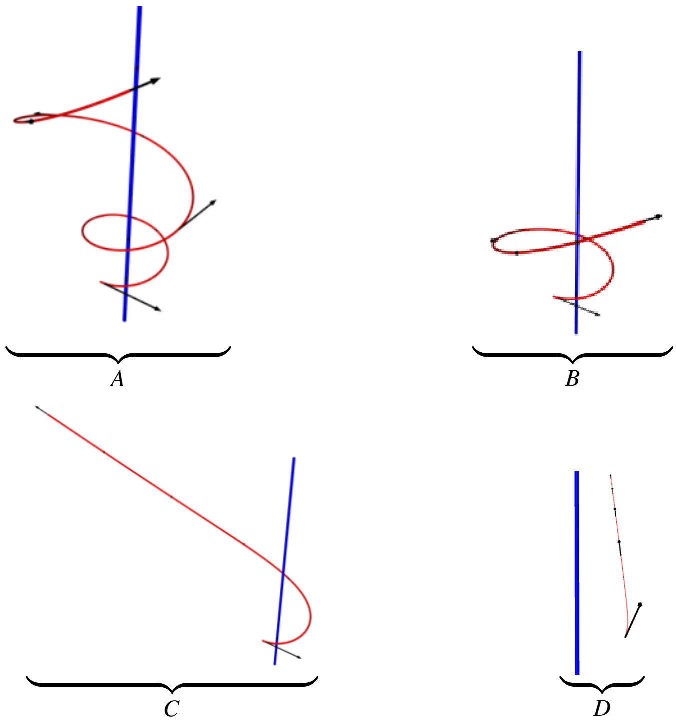

Figura 3.9: Trajetórias da luz em torno de uma Corda cósmica com déficit angular em diferentes valores de α . Fonte: autoria própria.

Através da Eq.3.34 conseguimos obter o comportamento de um partícula próxima a uma Corda cósmica. Onde na Fig 3.9.A, α = 0.10; na Fig 3.9.B, α = 0.20; na Fig 3.9.C, α = 0.30 e na Fig 3.9.D, α = 0.90.

Uma Corda cósmica com déficit angular de 0,1 seria uma estrutura unidimensional que cria um “defeito cônico” no espaço-tempo ao seu redor, fazendo com que o ângulo total ao redor da corda seja menor que 2π em 0,1 radianos. Isso geraria efeitos como distorções visuais (lentes gravitacionais), possível emissão de ondas gravitacionais, e influências sutis em observações cosmológicas, como na radiação cósmica de fundo. Esses efeitos tornam a detecção de cordas cósmicas uma questão empolgante na cosmologia moderna.

Uma Corda cósmica com déficit angular de 0,9 cria uma distorção no espaço-tempo ao seu redor, com um efeito de lente gravitacional forte e uma curvatura significativa do espaço-tempo. A separação angular das imagens de objetos distantes seria significativo, tornando esse efeito mais fácil de observar. A corda também poderia emitir ondas gravitacionais intensas, especialmente durante interações, além de deixar marcas observáveis na radiação cósmica de fundo.

Capítulo 4

Interação entre o Buraco Negro de Schwarzschild e a Corda Cósmica

A relação entre um Buraco Negro de Schwarzschild e uma Corda cósmica pode ser estudada em termos de como esses dois objetos deformam o espaço-tempo e como interagem entre si. Se uma Corda cósmica passar nas proximidades de um Buraco Negro, a interação gravitacional entre eles pode alterar as propriedades observáveis de ambos. Por exemplo, a Corda cósmica pode influenciar a forma do Horizonte de eventos do Buraco Negro.

As equações de campo de Einstein na relatividade geral Eq.2.44 descrevem como a matéria e a energia influenciam a curvatura do espaço-tempo. Para descrever um Buraco Negro de Schwarzschild na presença de uma corda cósmica, podemos considerar soluções das equações de campo de Einstein que combinam os efeitos de ambos. A solução clássica para um Buraco Negro de Schwarzschild em coordenadas esféricas é dado pela Eq.3.1 que é a *Métrica de Schwarzschild*.

No caso de uma Corda cósmica, introduz-se um *déficit angular* no espaço-tempo que é dado pela Eq.3.33. A combinação dessas duas soluções envolve considerar um Buraco Negro de Schwarzschild com uma Corda cósmica passando por ele, o que resulta em uma métrica que pode ser expressa como:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\phi^2$$

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - (1 - 4G\mu)^2 r^2 \sin^2\theta d\phi^2$$

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - \alpha^2 r^2 \sin^2\theta d\phi^2 \tag{4.1}$$

Na Eq.4.1, temos que os termos:

- **Termo Temporal**: $\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2$

Este termo permanece inalterado, representando a dilatação do tempo em torno do buraco negro.

- **Termo Radial**: $-\left(1-\frac{2GM}{c^2r}\right)^{-1}dr^2$

  Este termo também não é alterado pela presença da corda cósmica e descreve a curvatura radial do espaço-tempo.

- **Termo Angular Polar**: $-r^2d\theta^2$

  Este termo representa a parte angular esférica da métrica e também não é alterado pela corda cósmica.

- **Termo Angular Azimutal**: $-\alpha^2r^2\sin^2\theta d\phi^2$

  Este termo é onde o efeito da corda cósmica é incorporado. O fator α^2 representa o déficit angular causado pela corda cósmica.

Ao resolver as equações geodésicas, foi obtida a representação gráfica, da trajetória de partículas de luz nas proximidades de um buraco negro de Schwarzschild, sendo possível observar que em longas distâncias as trajetórias são elípticas semelhante a mecânica newtoniana; porém em curtas distâncias essas órbitas não se fecham, realizando uma trajetória no formato de *roseta*, devido aos efeitos gravitacionais intensos do Buraco Negro. Estas divergências do comportamento newtoniano se deve aos efeitos relacionados à teoria da Relatividade Geral de Einstein, que são mais significativos nas proximidades do Buraco Negro devido a curvatura do espaço-tempo, já em distâncias suficientemente longas, seus efeitos são insignificantes, se aproximando de seus análogos newtonianos (Carneiro 2023).

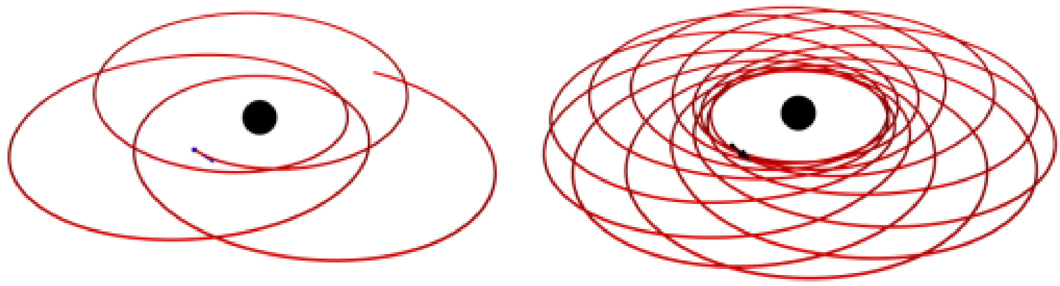

Figura 4.1: Representação gráfica de uma geodésica no espaço-tempo de Schwarzschild. Imagem à esquerda demonstrando detalhes da trajetória de uma partícula e à direita, órbita no formato de *roseta*. Fonte: (Carneiro 2023).

Porém, na presença de uma Corda cósmica as trajetórias da luz podem variar de acordo com o *déficit angular*, onde suas propriedades do espaço-tempo passam a ser descritas pela métrica dada na Eq.4.1.

4.1 *déficit angular* $\alpha \leqslant 1$:

Quando o déficit angular $\alpha \leqslant 1$ isso significa que a Corda cósmica introduz uma pequena modificação na estrutura do espaço-tempo, onde o ângulo completo ao redor da corda cósmica, resulta em uma curvatura cônica.

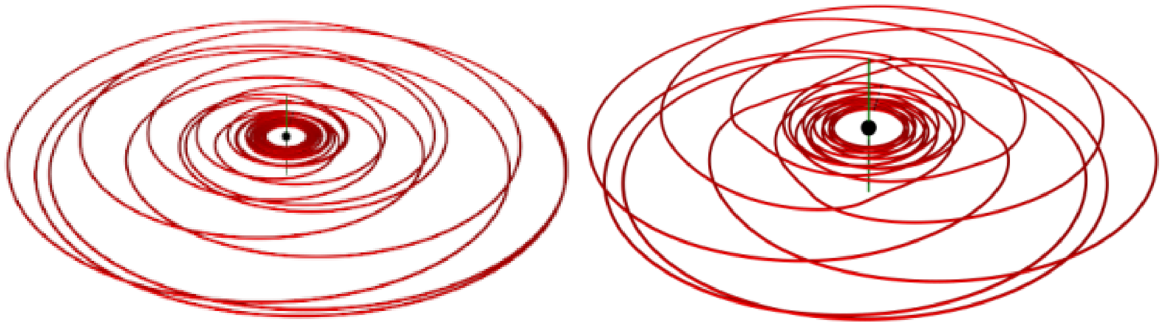

Figura 4.2: Partícula de luz interagindo com um Buraco Negro de Schwarzschild perfurado por uma corda cósmica. Fonte: autoria própria.

Na Fig.4.2 à esquerda, temos uma Corda cósmica com um *déficit angular* de $\alpha = 0.1$ interagindo com um Buraco Negro de Schwarzschild. Tal que, uma partícula é capturada por essa interação e realiza órbitas elipticas ao redor desse Buraco Negro. O mesmo ocorre ao lado direito, onde temos um *déficit angular* de $\alpha = 0.3$. Porém neste situação o movimento orbital eliptico da partícula possuem algumas “curvas sinuosas” . Em ambas as situações podemos perceber que somente no ISCO a partícula mantém uma órbita constante e sem curvas sinuosas.

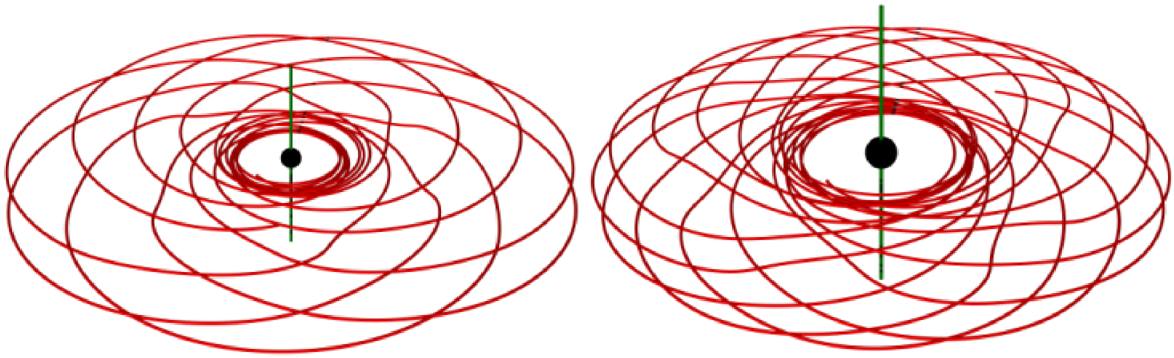

Figura 4.3: Partícula de luz interagindo com um Buraco Negro de Schwarzschild perfurado por uma corda cósmica. Fonte: autoria própria.

Os resultados obtidos na Fig.4.3, temos do lado esquerdo um *déficit angular* de $\alpha = 0.5$ e do lado direito um *déficit angular* de $\alpha = 0.9$, onde ambas possuem curvas sinuosas.

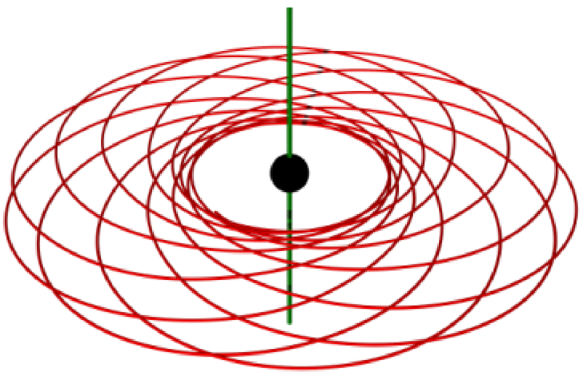

Figura 4.4: Partícula de luz interagindo com um Buraco Negro de Schwarzschild perfurado por uma corda cósmica. Fonte: autoria própria.

Na Fig.4.4 temos um *déficit angular* de $\alpha = 1$. Se o *déficit angular* é igual a 1, isso significa que não há Corda cósmica presente no espaço-tempo, pois implica que o espaço-tempo é usual, sem qualquer déficit. Nesse caso, a métrica 4.1 d retorna à sua forma padrão, ou seja,

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\phi^2$$

Aqui, a ausência do termo α indica que o espaço-tempo não possui nenhum *déficit angular*, e estamos tratando apenas do espaço-tempo ao redor de um corpo esférico não rotativo e sem carga.

Neste caso, na Fig.4.4, pode-se notar que a partícula faz somente trajetórias elipticas, sem curvas sinuosas. Isso ocorre devido aos efeitos da Corda cósmica diminuirem com relação a atração de partículas na órbita próxima ao Buraco Negro de Schwarzschild.

4.2 *déficit angular* $\alpha > 1$:

Ao colocarmos uma partícula próxima a um Buraco Negro de Schwarzschild com uma corda cósmica que tenha um "excesso" angular (ou seja, um fator $\alpha > 1$), o comportamento da partícula será influenciado tanto pelo campo gravitacional do buraco negro quanto pela modificação angular introduzida pela corda cósmica. No contexto usual de Cordas cósmicas, esse *déficit angular* não é fisicamente significativo. Portanto, a Métrica de Schwarzschild 4.1 com um *déficit angular* maior que 1 não tem uma interpretação física direta no contexto de Cordas cósmicas e não corresponde a uma situação que ocorre naturalmente. A exploração dessa situação necessita de uma extensão ou uma modificação significativa das teorias da Relatividade Geral e dos Defeitos Topológicos.

No entanto, ao considerarmos $\alpha > 1$ de forma hipotética, trabalhamos essencialmente com um tipo diferente de modificação do espaço-tempo que não corresponde à Física convencional das Cordas cósmicas. Onde nesta situação, a partícula se afasta do Buraco Negro de Schwarzschild como mostra a Fig.4.5.

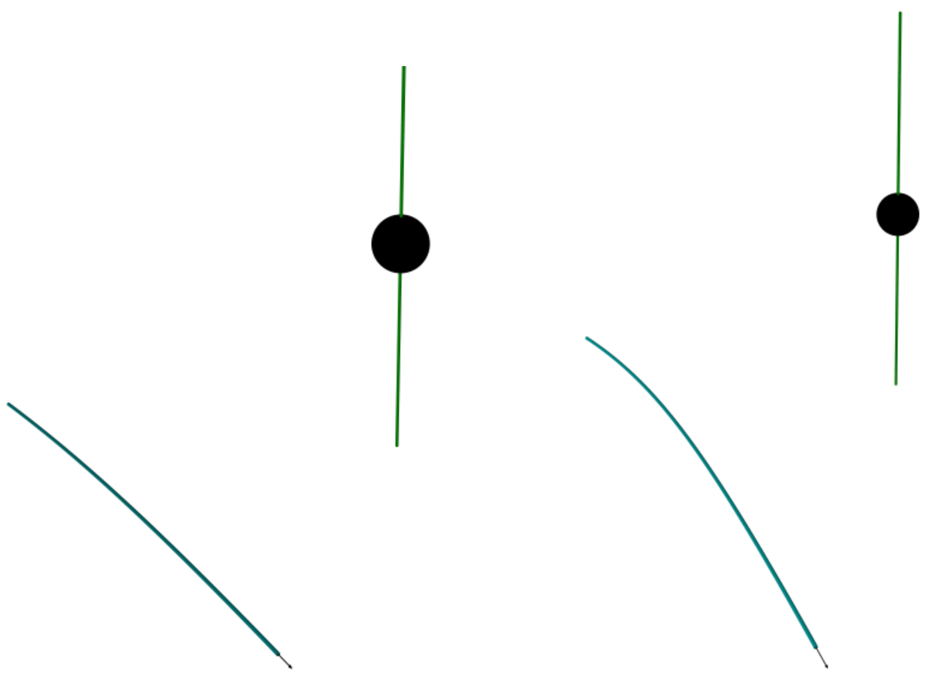

Figura 4.5: Fonte: autoria própria.

Na Fig.4.5, ao lado esquerdo temos um *déficit angular* $\alpha = 1.2$ e ao lado direito um *déficit angular* $\alpha = 1.4$. Tal que esse afastamento da partícula ocorre devido a modificação na geometria do espaço-tempo causada pelo *déficit angular*.

Capítulo 5

Conclusões

Portanto, de acordo a pesquisa publicada no "*The Astrophysical Journal Letters*" pelos Físicos *Mark R. Morris*, *Jun-Hui Zhao* e *W. M. Goss*, onde conseguiram identificar um filamento de rádio próximo ao Buraco Negro *Sagittarius A** 1.1, na qual segundo o resultado dessa pesquisa, esse filamento pode ser uma manifestação de uma Corda cósmica. Assim, apresentamos o estudo da interação entre um Buraco Negro de Schwarzschild com uma Corda cósmica. Podemos demonstrar como seria essa interação para diferentes *déficits angulares*.

Inicialmente tivemos que fazer um estudo sobre a Teoria da Relatividade Geral até chegarmos na *Equação de Campo de Einstein* Eq.2.44.Onde a partir desta que o Físico *Karl Schwarzschild* conseguiu deduzir a primeira solução dessas equações, que é a Métrica de Schwarzschild 3.1, na qual descreve um Buraco Negro esfericamente simétrico e sem rotação, conhecido como *Buraco Negro de Schwarzschild*.

Após uma análise de como é um *Buraco Negro de Schwarzschild*, discutimos as *Órbitas Circulares Estáveis mais Internas (ISCO)* que é o limite onde uma partícula pode circular um Buraco Negro sem que ela seja "sugada" para o disco de acreção, e logo após, para o Raio de Schwarzschild (Horizonte de Eventos), como mostra a Fig.3.6. Tal que, no nosso trabalho, quando o Buraco Negro interage com a Corda cósmica, a partícula sente os efeitos dessa interação somente até o ISCO, e não colapsa no Buraco Negro. No entanto, a partícula não fica orbitando somente no ISCO, ela também orbita nas Proximidades do Buraco Negro de Schwarzschild, onde devido a curvatura do espaço-tempo, essa órbita não é perfeitamente esférica e sim eliptica na forma de roseta, como mostra a Fig.3.7.

Ao relacionarmos equação da Corda cósmica Eq.3.34 com a Métrica de Schwarzschild 3.1, chegamos na Eq.4.1, onde o *déficit angular* α determinou como é o comportamento de uma partícula na interação entre o Buraco Negro de Schwarzschild com uma Corda cósmica. Tal que os resultados obtidos nas Fig's.4.2 e 4.3, para um *déficit angular* $\alpha < 1$, mostram curvas sinuosas com essa interação. Onde esses resultados são similares aos que foram publicados por *Mark R. Morris*, *Jun-Hui Zhao* e *W. M. Goss*.

As perspectivas sobre o estudo da interação entre Buracos Negros e Cordas cósmicas são bastante promissoras, tanto em termos de teoria quanto de observação. No entanto, esses avanços dependem de como a ciência e a tecnologia progridem nos próximos anos. Atualmente, ainda não temos provas concretas da existência de Cordas cósmicas, mas elas podem deixar marcas relevantes no universo.

Um dos maiores desafios da Física é unir a Mecânica quântica com a Relatividade geral. Cordas cósmicas, que estão previstas em várias teorias de unificação, como a teoria das cordas e Buracos Negros, podem oferecer um terreno fértil para investigar a gravidade em um regime quântico.

Para efeitos de pesquisa, realizamos o comportamento da partícula para um *déficit angular* $\alpha > 1$, que de acordo com os resultados obtidos na Fig. 4.5 a partícula tende a se afastar do Buraco Negro de Schwarzschild devido a modificação na geometria do espaço-tempo.

Referências Bibliográficas

ACEVEDO, O. A.; MORAIS, E. M. de. *The Equivalence Principle*. [S.l.]: Sociedade Brasileira de Fisica, 2019.

AFRANCHI, L. Aplicación de los símbolos de christoffel en la teoría relativista. 2022.

ALMEIDA, C. R. Buracos negros: mais de 100 anos de história. *Cadernos de Astronomia*, Universidade Federal do Espirito Santo, v. 2, p. 93, 1 2021.

BERGLIAFFA, S. E. P. Introdução à física dos buracos negros. *Cadernos de Astronomia*, v. 4, n. 1, p. 49–66, 2023.

BRODERICK, A. E.; LOEB, A. The event horizon of sagittarius a. *Astrophysical Journal*, Institute of Physics Publishing, v. 701, p. 1357–1366, 2009. ISSN 15384357.

CARNEIRO, M. de F. *UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO*. 2023.

CAVALCANTE, D.; GNIPPER, P. Cordas cósmicas: fissuras no universo podem ter sido detectadas - canaltech. 2023.

COLLABORATION, E. H. T. et al. First sagittarius a* event horizon telescope results. i. the shadow of the supermassive black hole in the center of the milky way. *The Astrophysical Journal Letters*, American Astronomical Society, v. 930, p. L12, 5 2022. ISSN 2041-8205.

CROWELL, B. *GENERAL RELATIVITY*. [s.n.], 2024. Disponível em: <https://LibreTexts.org>.

ESPINOSA, L. C. L. Linhas de emissao de discos de acreçao ao redor de buracos negros. 2022.

FATELO by J. P.; ESTG, N. M. ferreira. *Curvas Geodésicas em Superfícies*. 2014. Disponível em: <http://cdrsp.ipleiria.pt>.

GORODETSKAYA, Y. Estudo de noção de transporte paralelo sobre uma superfície dinâmica com aplicações na relatividade geral. 2015.

GROSSMANN, C. Ciclo de vida estelar - o ciclo de vida das estrelas. *Hypescience*, 2012.

HOSTI, B. P. Cygnus x-1 - o primeiro buraco negro descoberto. *Espaço-Tempo*, 2021.

LAMBOURNE, R. J. *Lambourne Relativity, Gravitation and Cosmology*. [S.l.: s.n.], 2010.

LOBO, M. P. *No interior do horizonte de um buraco negro de Schwarzschild*. 2006.

MACHADO, R. R. *Uma dedução heurística da métrica de Schwarzschild*. Tese (Doutorado) — Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2016.

MACHADO, R. R.; TORT, A. C. Michell, laplace e as estrelas negras: uma abordagem para professores do ensino médio. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, FapUNIFESP (SciELO), v. 38, 6 2016.

MANFIO, F. Geometria riemanniana. *Notas de Aula, ICMC-USP*.

MEDEIROS, L. et al. The image of the m87 black hole reconstructed with primo. *The Astrophysical Journal Letters*, The American Astronomical Society, v. 947, n. 1, p. L7, apr 2023. Disponível em: <https://dx.doi.org/10.3847/2041-8213/acc32d>.

MORRIS, M.; ZHAO, J.-H. A nonthermal radio filament connected to the galactic black hole? *The Astrophysical Journal Letters*, v. 850, n. 2, p. L23, 2017.

NASCIMENTO, L. *Derivação dos Símbolos de Christoffel via Formalismo Lagrangeano*. 2019. 3-8 p.

RIBEIRO, M. B.; VIDEIRA, A. A. P. *Cosmologia: uma Ciência Especial? Algumas Considerações sobre as Relações entre a Cosmologia Moderna, Filosofia e Teologia*. [S.l.: s.n.], 2011. 45 p. ISBN 9788535627688.

ROCHA, W. J. d. Configurações de corda cósmica em uma teoria alternativa da gravitação. 2009.

SANTOS, A. d. P. et al. Influência das cordas cósmicas não-abelianas na geometria do espaço-tempo. Universidade Federal da Paraíba, 2016.

SCARPIN, J. de A. Estudo das propriedades de buracos negros de schwarzschild e de kerr. 2022.

SILVA, A. L. B. B. G. d. Desvio do periélio de mercúrio na relatividade geral. Universidade Estadual Paulista (Unesp), 2018.

SOARES, D. *Os fundamentos físico-matemáticos da cosmologia relativista (Physico-mathematical foundations of relativistic cosmology)*. 2013.

SOUSA, G. M. A. Dedução das equações de campo de einstein. 2008. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/282151922>.

SOUSA, M.; LIMA, A. Uma discussão sistemática sobre as cordas cósmicas e o modelo de vórtices abelianos proposto por nielsen e olesen. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, SciELO Brasil, v. 40, 2017.

SOUZA, R. E. D. *Introdução à cosmologia*. [S.l.]: Edusp, 2004.

TUTIDA, H. Y. L. *Dedução das Equações de Einstein pelo Formalismo Lagrangiano*. 2021.

WüRZ, G. *Buracos negros de Schwarzschild e de Kerr: uma abordagem usando o Python*. 2022.