



Universidade Federal Rural de Pernambuco
Departamento de Física

Pós-Graduação em Física Aplicada

**Distribuição de Emaranhamento em um
Bilhar de Dirac Caótico**

Izabelly Marya Lucena da Silva

Dissertação de Mestrado

Recife
18 de Dezembro de 2014

Universidade Federal Rural de Pernambuco
Departamento de Física

Izabelly Marya Lucena da Silva

**Distribuição de Emaranhamento em um
Bilhar de Dirac Caótico**

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Física Aplicada do Departamento de Física da Universidade Federal Rural de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Física.

Orientador: *Prof. Dr. Anderson Luiz da Rocha e Barbosa*

Recife
18 de Dezembro de 2014

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Física Aplicada do Departamento de Física da Universidade Federal Rural de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Física.

Prof. Dr. Anderson Luiz da Rocha e Barbosa
Orientador

Distribuição de Emaranhamento em um Bilhar de Dirac Caótico

por
Izabelly Marya Lucena da Silva

Universidade Federal Rural de Pernambuco
Departamento de Física

Recife
18 de Dezembro de 2014

*Ao meu pai Ednilson, a minha mãe Maria do Carmo, ao
meu noivo Francisco e as minhas irmãs Elyzabelly
(Renatta) e Cibelly .*

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus que é o mais constante em minha vida; providenciou e conduziu tudo, para que pudesse acontecer da maneira que aconteceu.

A Nossa Senhora da Conceição que sempre intercede nas minhas orações a Deus.

As pessoas mais especiais, que sempre estiveram, estão e sei que sempre estarão ao meu lado me ajudando no que eu precisar tentando me compreender, incentivar, apoiar, questionar e tolerar. Essas pessoas são meu Pai Ednilson, minha Maria do Carmo e minhas irmãs Elyzabelly, Cibelly.

A meu noivo Francisco um anjo que apareceu em minha vida, enviado por Deus para colaborar, me incentivar, me aconselhar, me animar, trocar ideias ao longo da minha jornada da vida tanto acadêmica quanto pessoal. Agradeço a ele demais por ser essa pessoa incrível que amo demais.

A meu orientador pelo tempo dedicado a mim e a minha dissertação.

Agradeço finalmente a todas as pessoas que passaram na minha vida, mesmo que de forma muito passageira, foram importantes a sua maneira; ao conjunto de todas elas e a tudo o que me aconteceu para forçar uma interação, devo o que sou hoje e as oportunidades que apareceram em minha vida; não existiria papéis suficientes para citá-las, meu obrigada a todas elas, e que Deus sempre esteja com nós todos.

“Acredite nos seus sonhos, estude muito, trabalhe, persista e sempre faça mais do que esperam de você. Esta é a maneira de transformar em realidade aquilo que a maioria pensa ser impossível!!”

—29/03/2006-SOYUZ TMA-8 (Marcos Pontes)

Emaranhamento é o cerne do desenvolvimento atual de processamento quântico da informação [10]. A utilização do emaranhamento na comunicação pode ampliar a capacidade do canal [12] como também sua eficiência [13], na criptografia quântica [14] e na teletransporte quântico [15]. Beeneakker propõe que um bilhar quântico balístico pode ser usado como um orbital emaranhador, ou seja, um formador de emaranhamento para pares de elétrons não interagentes construído a partir do gás de elétrons bidimensional (2DEG) [32]. Os elétrons se movem sem perder a coerência de fase sendo considerado caótico, se o acoplamento é suficiente fraco para que o tempo médio de permanência dos elétrons dentro da cavidade τ_{dwell} , exceda o tempo necessário para o elétron explorar todo o espaço de fase τ_{erg} . Como as partículas dos sistemas tem dinâmicas caóticas a teoria de matrizes aleatórias [33] pode ser aplicada. Esta teoria classifica os sistemas devido a algumas simetrias particulares do mesmo [37] [38] em três grupos de simetrias (ou seja, dez classes de simetria) que são: Wigner-Dyson, Quiral e Altland-Zirnbauer [39] [40] (3 classes de Wigner-Dyson, 3 classes Quiral e 4 classes de Altland-Zirnbauer). Os resultados da distribuição da concorrência e do emaranhamento de formação para o bilhar de Schrodinger, nos casos em que preserva ou há quebra da simetria de reversão temporal ja são bastante conhecidos na literatura [19]. Nesta dissertação faremos contribuições dos estudos analíticos das distribuições da concorrência e do emaranhamento de formação em um bilhar quântico caótico com simetria de sub-rede (SLS) ou simetria quiral [37]. O SLS está presente nas estruturas de rede bipartida com duas sub-redes interconectadas [38]. A SLS descreve sistemas com amplitudes de *hopping* aleatórias (desordem não diagonal), que são descritos pela equação de Dirac dando origem ao nome Bilhar de Dirac Caótico.

Palavras-chave: Emaranhamento, estado de Bell, concorrência, emaranhamento de formação, distribuições de probabilidade, bilhar quântico.

1	Introdução	1
1.1	Emaranhamento	1
1.1.1	Origens históricas	1
1.1.2	Definição e propriedades básicas	3
1.1.3	Aspectos Qualitativos do Emaranhamento	4
1.1.4	Aspectos Quantitativos do emaranhamento	4
1.1.4.1	Emaranhamento de Formação $\mathcal{E}(\mathcal{C})$	5
1.1.4.2	Concorrência \mathcal{C}	5
1.1.5	Utilidades e aplicações do Emaranhamento	6
1.2	Bilhar Quântico	6
1.2.1	Física Mesoscópica	7
1.2.1.1	Regime de Transporte	9
1.2.2	Fenômenos Mesoscópicos	11
1.2.2.1	Quantização da Condutância	11
1.2.2.2	Localização Fraca	13
1.2.2.3	Flutuações Universais da Condutância	13
1.3	Emaranhamento no Bilhar Quântico Caótico	14
1.3.1	Processo de Espalhamento	14
1.3.2	Simetrias da Matriz S	18
1.3.2.1	Conservação de corrente	18
1.3.2.2	Reversão Temporal	18
1.3.3	Teoria de Matrizes Aleatórias	19
1.3.3.1	Ensemble de Wigner-Dyson - Teoria de Matrizes Aleatórias em bilhares de Schrödinger fechados	20
1.3.3.2	Ensemble de Wigner-Dyson - Teoria de Matrizes Aleatórias em bilhares de Schrödinger abertos	21
1.3.3.3	Novas Classes de Simetria	22
1.3.4	Ensemble Quiral	22
1.3.5	Emaranhamento usando processos de Espalhamento	24

1.4	Descrição dos capítulos da dissertação	29
2	Distribuição de autovalores. Distribuição da Concorrência. Aplicação em Bilhar Quânticos.	30
2.1	A distribuição da Condutância	31
2.1.1	Cálculo da distribuição da condutância utilizando o método de Mello e Kumar	32
2.1.1.1	Distribuição da condutância para $\beta = 1$, utilizando o primeiro método	34
2.1.1.2	Distribuição da condutância para $\beta = 2$, utilizando o método de Mello e Kumar.	35
2.1.2	Cálculo da distribuição da condutância utilizando o método da Expansão do Delta de Dirac	36
2.1.2.1	Distribuição da condutância para $\beta = 1$ no método expansão de Delta de Dirac.	37
2.1.2.2	Distribuição da condutância para $\beta = 2$ no método expansão de Delta de Dirac.	38
2.1.3	A média da condutância.	39
2.2	A Localização Fraca da Condutância	39
2.2.1	A variância da condutância.	39
2.3	A distribuição da Concorrência	40
2.3.1	Distribuição da Concorrência para $\beta = 1$	40
2.3.2	Distribuição da Concorrência para $\beta = 2$	42
2.3.3	Média e Variância da distribuição da Concorrência para $\beta = 1$ e 2	45
2.3.3.1	Média da distribuição da Concorrência para $\beta = 1$ e 2	45
2.4	A Localização Fraca da Concorrência	45
2.4.0.2	Variância da distribuição da Concorrência para $\beta = 1$ e 2	46
2.4.1	Distribuição do Emaranhamento de formação $Q_\beta(\mathcal{E})$ para $\beta = 1$ e 2	46
2.4.1.1	Média do Emaranhamento de Formação $Q_\beta(\mathcal{E})$	48
2.4.1.2	Localização Fraca do Emaranhamento de Formação $Q_\beta(\mathcal{E})$	48
2.4.1.3	Variância do Emaranhamento de Formação $Q_\beta(\mathcal{E})$	48
3	Propriedade de Transporte com bilhar quântico de Simetria Quiral	50
3.1	Distribuição da Condutância para sistema com dois modos propagantes	51
3.1.1	Resultados para a condutância com parâmetro de simetria $\beta = 1$	52
3.1.2	Resultados para a condutância com parâmetro de simetria $\beta = 2$	53
3.1.3	Média	54
3.1.4	A Localização Fraca da Condutância	55
3.1.5	A variância da condutância.	55
3.2	Distribuição da Concorrência simetria quiral	55
3.2.1	Concorrência com simetria quiral para $\beta = 1$	57
3.2.2	Concorrência com simetria quiral para $\beta = 2$	58
3.3	Média da distribuição da Concorrência para $\beta = 1$ e 2	60
3.4	A Localização Fraca da Concorrência	61
3.4.0.1	Variância da distribuição da Concorrência para $\beta = 1$ e 2	61

3.5	Emaranhamento de Formação para o bilhar de Dirac	61
3.5.1	Simulação Numérica	62
3.5.1.1	Média do Emaranhamento de Formação $Q_\beta(\mathcal{E})$	63
3.5.1.2	Localização Fraca do Emaranhamento de Formação $Q_\beta(\mathcal{E})$	63
3.5.1.3	Variância do Emaranhamento de Formação $Q_\beta(\mathcal{E})$	63
4	Conclusão e Perspectiva	64
A	Teorema de Bell	65
B	Expansão Delta de Dirac	67

LISTA DE FIGURAS

1.1	O Bilhar quântico. Em (a), (b) e (e) os bilhares são abertos enquanto em (c) e (d) são fechados. Em (c) e (e) a geometria é regular enquanto os demais a geometria é irregular e assimétrica. As figuras (a) e (b) foram retiradas de [21] enquanto a figura (e) foi retirada de [22]	7
1.2	Escalas macroscópicas, mesoscópicas e microscópicas. Retirado [25]	8
1.3	Condutor difusivo e balístico	10
1.4	Estrutura do portões de metal usado para definir uma constrição e observar condutância quantizada. O tamanho da constrição é dado por W . Onde (a) foi retirado de [30] e (b) foi retirado de [26].	12
1.5	A condutância obtida a partir de um típico estrutura de GaAs/AlGaAs referente a variação da largura W da constrição da figura 1.4. Retirado de [26].	12
1.6	Esquerda: Média da Condutância em função do campo magnético. Observe que em $B = 0$, a condutância diminui devido ao interferência construtiva das trajetórias revertidas no tempo. O campo magnético quebra a simetria de reversão temporal eliminando a interferência construtiva e a condutância aumenta para $B \neq 0$. Direita: Diagrama ilustrando as	
	figure1.7 O Bilhar quântico orbital emaranhador. Onde ambos os guias estão conectados a potenciais químicos.	
1.8	O sistema é composto por um guia de ondas de comprimento infinito, largura constante W e muros impenetráveis; o potencial de espalhamento é real e diferente de zero dentro de uma porção do condutor de ondas de comprimento L . Retirada da referência [36]	16
1.9	Ilustração do Bilhar de Dirac caótico com estrutura rede coméia similar a estrutura hexagonal bipartida do grafeno. Figura retirada de [42].	24
1.10	O Bilhar quântico orbital emaranhador com apenas 1 canal aberto e uma partícula.	25
1.11	O Bilhar quântico orbital emaranhador com dois canais abertos.	25
2.1	Modelando a região de integração, partindo do quadrado de lado 1.	33
2.2	Região de integração para descobrir a distribuição $\mathcal{P}(g)$ usando 2.15.	34

2.3	Distribuição da Condutância para $N_1 = N_2 = 2$ e $\beta = 1$ e 2 , respectivamente, referentes as equações 2.39 e 2.40.	37
2.4	Distribuição da Condutância para $N = 2$ e $\beta = 2$, referente as equações 2.43 e 2.44.	38
2.5	Distribuição da Concorrência em presença de TRI, ou seja, $\beta = 1$, referente a equação 2.68	43
2.6	Distribuição da Concorrência quando TRI é quebrada, ou seja, $\beta = 2$ referente a 2.74.	44
2.7	Emaranhamento de formação na presença e ausência de TRI, $\beta = 1$ retirado de [19].	47
2.8	Emaranhamento de formação na presença e ausência de TRI, $\beta = 2$ retirado de [19].	47
3.1	Distribuição da condutância para pontos quirais para o caso $\beta = 1$, obtido da equação 3.19.	53
3.2	Distribuição da condutância para pontos quirais para o caso $\beta = 2$, obtido por meio da equação 3.21.	54
3.3	Distribuição da concorrência para pontos quirais para o caso $\beta = 1$, obtidas da equação 3.46.	58
3.4	Distribuição da concorrência para pontos quirais para o caso $\beta = 2$, obtidas a partir das equações 3.52.	60
3.5	Emaranhamento de Formação para pontos quirais para o caso $\beta = 1$.	61
3.6	Emaranhamento de Formação para pontos quirais para o caso $\beta = 2$.	62
3.7	Simulação numérica feita para comprovar os resultados obtidos [52], com o bilhar de Dirac, na distribuição da concorrência e Emaranhamento de formação, ambos para $\beta = 1$ e $\beta = 2$	63

LISTA DE TABELAS

1.1	Regime de Transporte	10
1.2	Resumo dos três ensembles de Wigner-Dyson. A matriz hamiltoniana \mathcal{H} (e sua matriz de autovetores \mathcal{U}) são classificadas por um índice de $\beta = 1, 2, 4$, dependendo da presença ou ausência de inversão de tempo (SRT) e simetria de rotação de spin semi-inteiro (SRS).	20
1.3	Classificação de Dyson dos Ensembles Circulares.	21
1.4	Tabela de Cartan. As simetrias fundamentais que classificam cada tipo de ensemble são: simetria de reversão temporal (TRS), partícula-buraco (PHS), simetria de rotação de spin (SRS) e subrede (SLS). Na tabela quando há uma quebra de simetrias representamos por 0, e não havendo a quebra da simetria representamos por ± 1 . Representa a decomposição da matriz espalhamento em termos de matriz unitária, ortogonal e simplética. Figura adaptada das [39] e [40]	22

Nesta dissertação, vamos fazer uma revisão de literatura a respeito de um breve histórico, definição, formas de quantificação, caracterização e utilização do emaranhamento. Em seguida estudaremos os bilhares quânticos e o espalhamento de elétrons no mesmo para então considerar determinado bilhar quântico como um emaranhador de elétrons e em seguida faremos uma breve revisão sobre os conteúdos principais da física mesoscópica com destaque no transporte quântico de elétrons através de nanoestruturas. O prefixo "nano" deriva da palavra grega "nanos" que significa anão e sua ordem de grandeza é um bilionésimo (10^{-9}) de uma certa escala. Logo nanoestruturas são pequenos arranjos de átomos ou moléculas, da escala nanométrica, e que estão organizados de forma a desempenhar alguma função. Por exemplo: DNA, glicose, molécula do ozônio [1]. Graças ao avanço e desenvolvimento da mecânica quântica a partir do século *XX*, há um grande interesse em sistemas nessa escala devido a crescente miniaturização de dispositivos eletrônicos e a produção de materiais com capacidade de armazenar informação de altas densidades que na década de 70 só era possível com a utilização de supercomputadores [2], tal área de estudo é conhecida por nanociência e nanotecnologia. Finalizamos este capítulo introdutório com as pretensões desta dissertação para os demais capítulos.

1.1 Emaranhamento

1.1.1 Origens históricas

Durante o século *XX*, a Mecânica Quântica se tornou uma das teorias físicas mais bem sucedidas, possibilitando a descrição precisa de sistemas microscópicos e mesoscópicos. Uma das características mais notáveis da mecânica quântica é que a mesma pode ser descrita de diferentes maneiras, sendo cada uma delas consistente com experimentos quânticos, isso se dá pelo fato de que a mecânica quântica não obtém resultados a partir de uma única medição de forma determinística, gerando com isso uma variedade de paradoxos. O termo alemão "Verschränkung", que depois traduzido para o inglês como "*entanglement*" e para o

português como emaranhamento, foi usado pela primeira por Schrödinger em 1935 motivado pelas idéias de Einstein, Podolsky e Rosen (EPR) exposta na referência [3]. No final de 1920 a maioria dos princípios fundamentais, ou postulados que norteiam a mecânica quântica já estavam bem conhecidos. Porém o paradoxo EPR pretendia mostrar que a teoria quântica era incompleta, evidenciando a falta de algum *elemento de realidade* que ficou conhecido como realismo local.

Em 1935, Albert Einstein, Boris Podolsky e Nathan Rosen apresentaram um trabalho [3], denominado pelas iniciais de seus nomes como EPR, contendo as implicações lógicas do princípio da superposição quando aplicado na descrição de um sistema composto, onde os mesmos demonstraram a incompletude da Mecânica Quântica por meio da hipótese de não-localidade, que mais tarde em 1980 comprovou-se ser verdadeira por Alain Aspect[4,5]. Segundo o EPR se as condições de realismo local for introduzidas na Mecânica Quântica, obteremos uma contradição. Tentando contornar esse indeterminismo intrínseco à Mecânica Quântica Einstein afirmava que existiam um conjunto chamado de variáveis ocultas, que conteriam os ingredientes necessários para explicar este indeterminismo porém estariam fora do escopo da Mecânica Quântica. Um exemplo dessa contradição seria o seguinte [4]: Dois observadores, Alice e Bob, preparam duas partículas sob os vínculos: (i) os momentos são relacionados por $p_1 + p_2 = 0$ e (ii) a posição relativa entre as mesmas sempre será $x_2 - x_1 = L$, onde L é grande. Em seguida, primeiro Alice mede x_1 ou p_1 e depois Bob mede p_2 . Supondo que as partículas não interagem, o resultado da medida de p_2 não pode depender se é medido x_1 ou p_1 . Contudo, se Alice medir p_1 e obter que $p_1 = p$, automaticamente Bob terá que encontrar que $p_2 = -p$ pois $p_1 + p_2 = 0$. Por outro lado, se Alice medir x_1 , não pode medir p_1 e, conseqüentemente, nada pode ser dito sobre p_2 . Porém, como foi suposto que a medida de p_2 não pode depender da escolha de Alice, então Bob terá que encontrar $p_2 = -p$, um resultado pré-determinado independente do resultado da medida feita por Alice! No primeiro caso, a incerteza de Bob sobre o valor do momento de sua partícula antes da medida é subjetiva, ou seja, depende do resultado de Alice. Já no segundo caso, a incerteza de Bob é objetiva, ou seja, depende da relação de incerteza. Se Bob tivesse medido antes de Alice, não seria possível distinguir a incerteza subjetiva da objetiva. Tal contradição fez com Einstein, Podolsky e Rosen propusessem que a Mecânica Quântica seria uma teoria incompleta. Contagiado pela hipótese do EPR, Schrödinger apresentou [5] as consequências do princípio da superposição quando aplicado a um sistema composto de duas partes. Schrödinger imaginou uma situação na qual uma gata se encontre dentro de uma caixa completamente fechada. A gata pode ou estar viva ($|Viva\rangle$) ou morta ($|Morta\rangle$). Dentro dessa caixa há também um átomo instável ($|\text{átomo1}\rangle$) que pode ser decaído para um átomo estável ($|\text{átomo2}\rangle$). Suponha que a energia liberada nessa transição seja suficiente para ativar o mecanismo que libere um gás altamente tóxico, o qual mata rapidamente a gata. A mecânica Quântica nos diz apenas a probabilidade do isótopo decair, proibindo de prever deterministicamente quando isso ocorre. Dessa forma, aceitando a validade do princípio da superposição chegamos a conclusão de que o estado do sistema composto pela gata e pelo átomo é

$$|\psi\rangle = \alpha |\text{átomo1}\rangle |Viva\rangle + \beta |\text{átomo2}\rangle |Morta\rangle \quad (1.1)$$

onde o módulo ao quadrado dos coeficientes α e β como sendo a probabilidade do átomo não

decair e decair, respectivamente.

Mais tarde em 1964, John S. Bell [6], mostrou que o princípio da superposição aplicados a sistemas compostos produz previsões quantitativas que, se confirmadas experimentalmente, provariam aspectos não locais da Mecânica Quântica, utilizando para isso um sistema composto mais simples do que o usado na referência [3], que foi um par de sistema de dois níveis, como por exemplo, spin de dois elétrons ou a polarização de dois fótons. O ponto chave desse experimento é a violação da desigualdade de Bell. Imaginemos o seguinte experimento [4]: Um estado de duas partículas é preparado e cada uma delas é enviada a um observador, Alice e Bob. Alice recebe a partícula A e Bob a partícula B. Cada observador possui dois aparatos experimentais para medir propriedades físicas dessas partículas. A escolha dos aparatos usados para medir será feita independentemente por cada observador e as medidas serão realizadas simultaneamente para garantir que as medidas feitas por Alice não influenciarão as feitas por Bob, e vice-versa. O operador de Bell \mathcal{B} que relaciona todos resultados das medições do sistema total tem como resultado uma desigualdade com $\mathcal{B} \leq 2$, que é conhecida como desigualdade de Clauser-Horne-Shimony-Holt (CHSH) que é a forma da desigualdade de Bell [7] mais estudada na literatura e é equivalente a qualquer outra desigualdade de Bell para dois qubits com dois observáveis dicotômico por observador.

1.1.2 Definição e propriedades básicas

Conforme o que foi dito na subseção anterior, o emaranhamento surge naturalmente ao aplicarmos o princípio de superposição a sistemas físicos compostos. Logo o emaranhamento quântico é uma propriedade da mecânica quântica que permite a dois ou mais objetos estarem de tal forma (cor)relacionados que não é possível descrever completamente um deles sem relacioná-lo aos demais. Estas correlações não podem ser descritas apenas com probabilidades ou quaisquer outros recursos clássicos. Dado um sistema de duas partes emaranhadas, o emaranhamento faz com que medições realizadas em uma parte pareçam estar influenciando a outra parte e sugere que alguma influência se propaga instantaneamente entre os objetos no momento da medição, independente da distância que os separe. Um dos mais importantes princípios [8] é o que diz que a todo estado de um sistema físico podemos associar um vetor pertencente a um espaço de Hilbert. Esse vetor caracteriza completamente o sistema físico em questão. Um espaço de Hilbert é definido matematicamente como um espaço vetorial complexo, completo e provido de uma métrica (distância entre vetores), a qual é obtida por um produto escalar.

Num espaço vetorial \mathcal{H} , qualquer combinação linear entre dois elementos deste espaço, é também um elemento pertencente a este espaço vetorial, este fato é conhecido como princípio da superposição ou da linearidade da Mecânica Quântica, e escrevemos matematicamente como:

$$\text{Se } |\psi_1\rangle \text{ e } |\psi_2\rangle \in \mathcal{H}, \text{ então } |\psi\rangle = \alpha|\psi_1\rangle + \beta|\psi_2\rangle \quad (1.2)$$

onde α, β são números complexos. Sejam \mathcal{H}_A e \mathcal{H}_B ambos pertencentes a \mathcal{H} , diz-se que um estado quântico bipartido descrito pelo operador densidade ρ_{AB} que atua em $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, é separável se existir uma distribuição ρ_i e dois conjuntos de estados descritos por ρ_A^i e ρ_B^i , que atuam em \mathcal{H}_A e \mathcal{H}_B , respectivamente, tais que o estado total do sistema possa ser escrito

como

$$\rho_{AB} = \sum_i \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B \quad (1.3)$$

logo podemos dizer que um estado emaranhado é um estado que não é separável.

Exemplo 1: O estado $|\delta\rangle_2 = |01\rangle$ é um estado separável, uma vez que admite a seguinte decomposição $|0\rangle_1 \otimes |1\rangle_1$.

Exemplo 2: O estado $|\xi\rangle_2 = \frac{1}{2}(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle)$ pode ser reescrito como $|\xi\rangle_2 = \frac{1}{2}[(|0\rangle \otimes |1\rangle) + (|0\rangle \otimes |1\rangle)]$ e, por isso é considerado como um estado separável.

Exemplo 3: O estado $|\psi\rangle_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$ não pode ser reescrito como um produto tensorial de estados puros de 1 qubit, logo é considerado um estado não separável, ou seja, emaranhado.

O conceito de emaranhamento também se aplica a sistemas de mais de dois níveis, e, em especial, a sistemas descritos por variáveis contínuas [30]. No qual não iremos abordar nesta dissertação.

1.1.3 Aspectos Qualitativos do Emaranhamento

É necessário saber caracterizar se determinados estados quânticos estão ou não emaranhados. Isto é, dada uma matriz de densidade ρ , queremos saber se ela representa um estado quântico emaranhado. Para sistemas bipartites descritos por estados pertencentes ao espaço de Hilbert de baixa dimensionalidade existe procedimentos operacionais para conferir se a matriz densidade que descreve o sistema é separável (não-emaranhado). Para estados puros, existe uma relação íntima entre emaranhamento e violação da desigualdade de Bell (Ver Apêndice A). Não sendo válida para estados mistos, estes podem ser explicados por meio de uma teoria de variável oculta local. Assim, esses estados satisfazem qualquer desigualdade de Bell que venhamos a construir. Surgem vários critérios operacionais de separabilidade em que decidir não aborda-los aqui neste trabalho. Para estados puros ($Tr(\rho^2) = 1$) é fácil ver que se conhecemos uma das matrizes densidade reduzidas do sistema podemos decidir se temos emaranhamento. Caso a matriz reduzida seja pura ($Tr(\rho_1^2) = 1$) o sistema é separável, estando emaranhado quando ρ_1 é não pura ($Tr(\rho_1^2) < 1$). Isto é, se temos alguma informação prévia do sistema em questão (lidamos com estados puros), podemos decidir sobre seu emaranhamento sem conhecermos seu estado global. Conhecendo-se apenas os elementos diagonais da matriz reduzida de um dos subsistemas, podemos decidir se temos ou não emaranhamento.

1.1.4 Aspectos Quantitativos do emaranhamento

Se pode ser identificado a existência de emaranhamento em um sistema quântico é natural querer saber o quanto ele está emaranhado. Existem várias medidas de emaranhamento E atualmente utilizadas, citamos algumas mais conhecidas como: a Entropia de Von Neumann $E(\psi)$, Emaranhamento Destilável E_D , Concorrência \mathcal{C} e o Emaranhamento de Formação $\mathcal{E}(\mathcal{C})$, no qual estes dois últimos iremos abordar nesta dissertação. Os Horodeckis [49] mostraram que para estados mistos bipartite (estado emaranhado formado por dois subsistemas), quaisquer

medidas de emaranhamento E que satisfaçam alguns axiomas específicos, devem ter E_D e $\mathcal{E}(\mathcal{C})$, como limitantes inferior e superior, respectivamente. Ou seja

$$E_D \leq E \leq \mathcal{E}(\mathcal{C}) \quad (1.4)$$

1.1.4.1 Emaranhamento de Formação $\mathcal{E}(\mathcal{C})$

Fisicamente o Emaranhamento de Formação $\mathcal{E}(\mathcal{C})$ de ρ estados mistos é então definido como o número mínimo de singletos (estado bipartite maximamente emaranhado) necessários para produzir um conjunto de pares de partículas descritas pelo estado ρ , usando-se apenas LOCC (Operações Locais e Comunicação Clássica) [14], ou em outras palavras é o emaranhamento médio dos estados puros da decomposição, minimizado ao longo de todas as decomposições. Define-se o $\mathcal{E}(\mathcal{C})$ do seguinte modo:

$$\mathcal{E}(\mathcal{C}) = \min \sum_i p_i E(\psi_i) \quad (1.5)$$

onde $\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|$ e $E(\psi_i)$ é a Entropia de Von Neumann para o estado puro $|\psi_i\rangle$. Temos que encontrar as decomposições de ρ em estados puros para minimizar a equação acima. Wootters [99] conseguiu obter uma expressão analítica para sistemas mistos 2×2 . Porém não vamos refazer aqui tal dedução por ser demasiadamente extensa e foge objetivo deste trabalho.

1.1.4.2 Concorrência \mathcal{C}

A concorrência para o estado puro é definida como [9]

$$\mathcal{C} \equiv \left| \langle \tilde{\psi} | \psi \rangle \right| \quad (1.6)$$

onde $|\tilde{\psi}\rangle = c_1 |10\rangle + c_2 |01\rangle$. Normalizando temos

$$\mathcal{C} = 2c_1 c_2 \quad (1.7)$$

no qual c_1 e c_2 são reais e usando que $c_1 + c_2 = 1$. Para estados bipartite a Concorrência é definida como [9]

$$\mathcal{C} = 2\sqrt{\text{Det}[\gamma\gamma^\dagger]} \quad (1.8)$$

onde γ é o peso do estado normalizado. Ou também definimos como $C(\rho) \equiv \max\{0, \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4\}$ onde os λ_i com $i = 1, 2, 3, 4$ são os autovalores da matriz $\tilde{\rho}$, com ρ sendo a matriz densidade de 4×4 dois-qubits ($\rho = \frac{|1,1\rangle\langle 1,1|}{\langle 1,1|1,1\rangle}$ em nosso caso) e $\tilde{\rho} = (\sigma_y \otimes \sigma_y)\rho^*(\sigma_y \otimes \sigma_y)$, onde σ_y é a segunda matriz de Pauli e ρ^* é a matriz complexo conjugada de ρ . A concorrência varia de 0 a 1. Onde $C = 0$ corresponde a separável estados não emaranhados e $C = 1$ corresponde a estados maximamente emaranhados (estado de Bell).

1.1.5 Utilidades e aplicações do Emaranhamento

Emaranhamento é o cerne do desenvolvimento atual de processamento quântico da informação [10] e computação [11]. A utilização do emaranhamento na comunicação pode ampliar a capacidade do canal [12] como também sua eficiência [13], na criptografia quântica [14] e na teletransporte quântico [15]. Emaranhamento é a chave para uma comunicação segura [16]. Em computação quântica, qubits são maciçamente emaranhados. Muitos sistemas emaranhados podem ser encontrados na natureza, porém so em alguns casos este emaranhamento pode ser estudado e usado em aplicações. Até agora, tem-se voltado muita atenção na preparação e investigação de fótons emaranhados [17] e mais recentemente, de átomos emaranhados [18] e outros estudos usam partículas elementares (kaons) e elétrons.

O Beeneaker propõe um bilhar quântico balístico como um orbital emaranhador, ou seja, um formador de emaranhamento para pares de elétrons não interagentes. Tomando um bilhar quântico caótico como um emaranhador [19] é possível escrever para isso o emaranhamento de formação $\mathcal{E}(\mathcal{C})$ e a concorrência \mathcal{C} em termos dos autovalores de transmissão τ_1 e τ_2 da matriz de espalhamento S no qual veremos mais adiante.

1.2 Bilhar Quântico

Entendemos por bilhar quântico caótico mostrado na figura 1.1 [20], um ponto quântico no qual os elétrons tem uma dinâmica caótica. O ponto quântico é um dispositivo eletrônico no qual se estuda os observáveis físicos como a condutância e o ruído de disparo. Um bilhar quântico é semelhante a um bilhar de sinuca so que com dimensões muito pequenas sendo o mesmo fabricado por elementos condutores delimitados por regiões isolantes e com dimensões espaciais suficientes para que não percam a coerência de fase no transporte de elétrons através de sua estrutura. O bilhar quântico se comporta como um poço de potencial que confina os elétrons em todas as três dimensões espaciais. Devido à sua pequena dimensão, estas estruturas têm propriedades eletrônicas entre as de semicondutores macroscópicos e aqueles de moléculas discretas em uma região com tamanho da ordem do comprimento de onda de Broglie dos elétrons, alguns nanômetros em um semicondutor. Comportam-se como átomos artificiais, onde o potencial do núcleo é substituído pelo potencial de confinamento. O que resulta numa forte quantização dos níveis de energia. Os bilhares quânticos em sua geometria e estrutura podem ser:

- Fechado: Caracterizado por níveis de energia e funções próprias utilizando para isso o Hamiltoniano H , onde o Hamiltoniano H é o observável correspondente a energia total do sistema.
- Aberto: Conectado aos guias de onda é descrito através de sua matriz de espalhamento S .
- Geometria regular: O transporte de elétrons apresentam propriedades específicas e não universais.

- Geometria irregular: O transporte de elétrons podem apresentar características universais passando a ser distinguidos por classes de simetrias universais que dependem de certas simetrias fundamentais como exemplo: simetria de rotação de spin (SRS), simetria de reversão temporal (SRT), simetria de sub-red (SLS), entre outras.

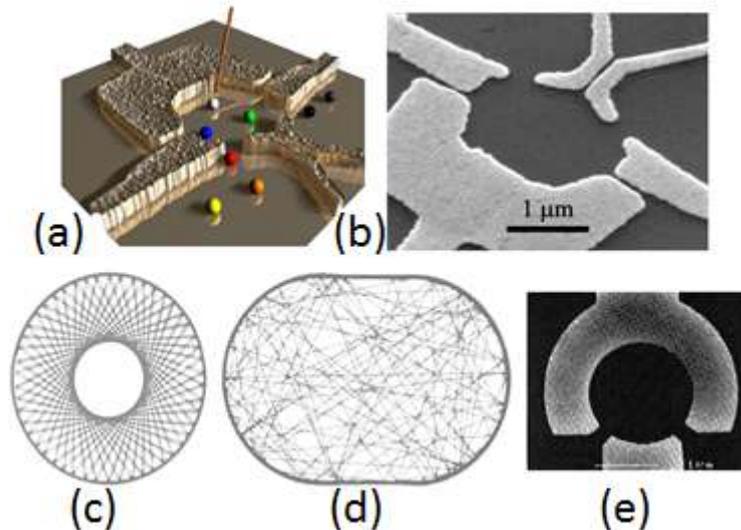


Figura 1.1 O Bilhar quântico. Em (a), (b) e (e) os bilhares são abertos enquanto em (c) e (d) são fechados. Em (c) e (e) a geometria é regular enquanto os demais a geometria é irregular e assimétrica. As figuras (a) e (b) foram retiradas de [21] enquanto a figura (e) foi retirada de [22]

O sistema aberto pode ser considerado caótico, se o acoplamento é suficiente fraco para que o tempo médio de permanência dos elétrons dentro da cavidade τ_{dwell} , exceda o tempo necessário para o elétron explorar todo o espaço de fase τ_{erg} assim, a dinâmica do sistema continua sendo universal. Os bilhares de Schrödinger e Dirac, no qual iremos abordar nesta dissertação, correspondem a bilhares abertos e caóticos, no qual definiremos mais tarde, possuem aproximadamente 10^3 átomos e um número equivalente de elétrons que se encontram fortemente ligados à esses átomos. Assim como acontece nos átomos reais, para remover um elétron do bilhar quântico é necessário adicionar energia finita que se assemelha a energia de ionização de um átomo real. Devido ao confinamento dos elétrons, os níveis são discretizados, sendo necessário em uma energia discreta para excitar o sistema, por essas características podemos defini-los como átomos artificiais [23].

1.2.1 Física Mesoscópica

A Mesoscopia, palavra inventada por Van Kampen em 1981 [2], estuda a fenomenologia da mecânica quântica para entender processos maiores, tendo em vista por exemplo transportes quânticos de elétrons por nanoestruturas e a condutância delas. Mesoscopia é a face intermediária do microcosmo e do macrocosmo figura 1.2. O que se entende por microscópico é a

escala de tamanho da ordem de poucos diâmetros atômicos ou do comprimento de onda de de Broglie (i.e. átomos e moléculas), estes da ordem de poucas dezenas de Angstroms ($10^{-10}m$), notando que o prefixo micro é apenas uma convenção histórica e não se refere a milésima da milésima parte do metro necessariamente. O macroscópico indicando comprimentos na escala cotidiana ou grande número de partículas (número de Avogadro é 10^{23} partículas) que constituem o sistema. Tais escalas permitem que sejam investigadas propriedades quânticas da matéria como os níveis discretos de energia, ou mesmo vários efeitos de spin confinados em pontos quânticos. Tendo em vista que ao conhecer o funcionamento da microscopia, poderemos entender ainda mais a macroscopia, uma vez que esses conhecimentos podem chegar ao desenvolvimento de novos equipamento onde seu tamanho pode consideravelmente reduzido devido à redução dos circuitos e dos condutores, exemplos: Aparelhos de ressonância magnética podem ter seu tamanho drasticamente reduzindo, até supercondutores podem ser aproveitados à temperatura ambiente, entre outras nova descobertas proporcionando então avanços também na área da engenharia e médica [24]. Discutiremos algumas escalas de tempo e de comprimento importantes para a descrição do transporte.

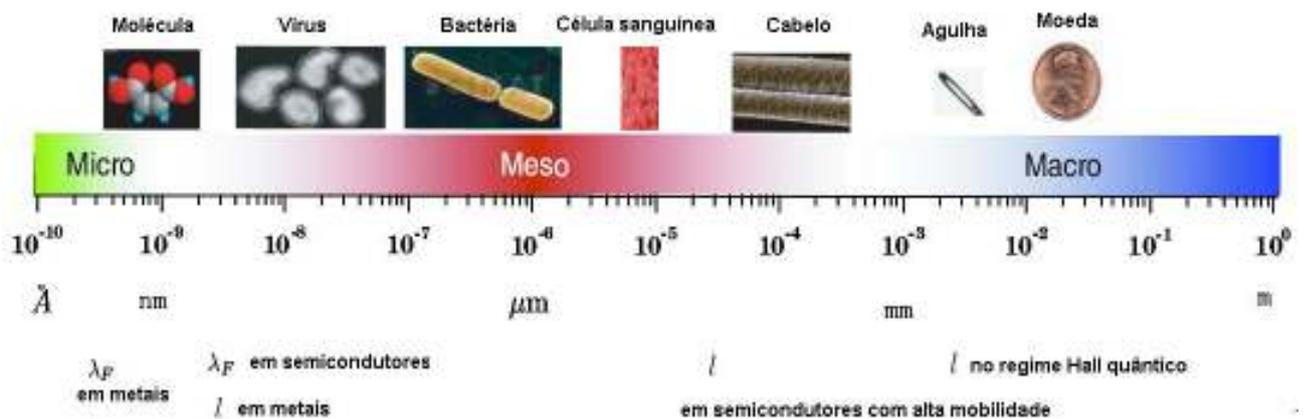


Figura 1.2 Escalas macroscópicas, mesoscópicas e microscópicas. Retirado [25]

Um dos sistemas mesoscópicos mais utilizado é o gás bidimensional de elétrons (2DEG) conhecido como ponto de contato quântico (PCQ). Este sistema é produzido a partir da superposição de camadas de GaAs (arseneto de gálio) e AlGaAs (arseneto de gálio dopado com alumínio), onde é formada uma camada de condução entre estes heterocompostos semicondutores. Ambos os materiais estando no nível de Fermi localizando-se dentro do gap de energia, sendo que o gap é maior no AlGaAs, deixando-o carregado positivamente e fazendo com que elétrons saltem. No entanto os primeiros dispositivos eram realizados em condutores metálicos [26]. Os elétrons são confinados em uma região definida pelo poço de potencial na interface entre GaAs e AlGaAs, onde os elétrons se movem como partículas livres sem sofrer choques e o comprimento de coerência L_ϕ do 2DEG pode chegar a dezenas de microns. Para mais informações olhar em [27].

Classicamente, a equação de Boltzmann [28] rege o transporte eletrônico, a qual descreve a evolução temporal da função distribuição de uma partícula em um fluido, levando em conta os efeitos de colisões. Este formalismo fornece uma boa aproximação em escalas macros-

cópicas da dinâmica quântica subjacente. Algumas propriedades desses sistemas possuem a interessante característica de não dependerem de maneira essencial de suas estruturas atômicas. Propriedades como essas são genericamente chamadas de propriedades universais do transporte quântico. Como exemplo, através da equação de Boltzmann é possível deduzir a lei de Ohm, a qual relaciona a condutância, G , com as dimensões do sistema da seguinte forma: para um condutor retangular de comprimento L e área transversal W

$$G = \frac{\sigma W}{l} \quad (1.9)$$

onde σ é a condutividade, a qual depende da constituição do material. Porém, quando se reduz o tamanho dos condutores surgem efeitos quânticos, os quais a equação de Boltzmann não pode descrever. A física mesoscópica trata, justamente, destes sistemas, onde os efeitos ondulatórios dos elétrons são relevantes. Neste regime, o transporte quântico de unidades de carga é o responsável pela caracterização do sistema, não interessando seu tamanho, seu material, sua composição atômica ou sua estrutura.

1.2.1.1 Regime de Transporte

Algumas escalas de tempo e de comprimento são introduzidas para facilitar a caracterização dos diferentes regimes mesoscópico devido aos efeitos de interferência entre as funções de onda. Considerando uma amostra de metal desordenado L , mantido a uma temperatura muito baixa para que de fato so possam participar do transporte somente elétrons com energias próximas à energia de Fermi, $\epsilon_F = (\hbar k_F)^2/2m$, onde k_F é o vetor de onda de Fermi. Tais escalas são:

- **1. Comprimento de Onda de Fermi, λ_F :** Está relacionado ao nível de Fermi pela relação, $\lambda_F = \frac{\hbar}{\sqrt{2m\epsilon_F}}$. Tipicamente varia de alguns angstroms em metais a centenas de angstroms em heteroestruturas semicondutoras.
- **2. Caminho Livre Médio Elástico, l_e :** É a distância média que o elétron viaja até sofrer uma colisão elástica. Este comprimento varia de alguns angstroms em ligas amorfas a uma dezena de microns em heteroestruturas semicondutoras. Caracteriza a desordem do sistema e se relaciona com o tempo de espalhamento elástico, τ_e , por $l_e = v_F \tau_e$, onde v_F é a velocidade de Fermi.
- **3. Comprimento Livre Médio Inelástico, l_{in} :** Similar ao l_e , mas com colisões inelásticas, $l_{in} = v_F \tau_\phi$, devido ao espalhamento por elétrons, por fônons e com impurezas que sofrem recuo. Nesse limite determinamos τ_ϕ , que é o tempo de defasagem (descoerência), ou de quebra de fase.
- **4. Comprimento de Localização Eletrônica, ξ :** Mede a extensão espacial das funções de onda eletrônicas. Para condutores metálicos, estas funções se estendem sobre toda a amostra, ao passo que em isolantes elas decaem exponencialmente a partir do chamado centro de localização. Esta é outra escala de comprimento importante relacionada a desordem.

REGIME	Balístico	Difusivo	Localizado
Condição	$l_e > L$	$L > l_e$	$\xi < L < L_\phi$
Colisão	Poucas colisões	Algumas colisões elásticas	Múltiplas Colisões

Tabela 1.1 Regime de Transporte

- **5. Comprimento de Coerência de Fase, L_ϕ , ou conhecido também como comprimento de relaxação de fase:** É o comprimento ao longo do qual a fase da função de onda não relaxa. É associado a esse comprimento o tempo de relaxação de fase τ_ϕ . O valor de L_ϕ cresce com a diminuição da temperatura e é a escala mais importante para o surgimento de efeitos mesoscópicos.

Para um condutor mesoscópico típico a baixa temperatura temos $l_e < L_\phi < l_{in}$. Se o comprimento do dispositivo L for muito maior que o comprimento de coerência de fase, este se comporta como um condutor ôhmico. Porém, se for menor, os efeitos de interferência eletrônica tornam-se relevantes. Portanto, podemos definir três regimes, experimentalmente distintos, para o transporte coerente de condutores mesoscópico em termos das escalas de comprimento, como [32]:

- **1. Regime balístico:** Ocorre quando L , que é o comprimento da amostra, é menor que o livre caminho médio elástico ($L < l$). No regime balístico os elétrons viajam através da estrutura tipicamente sem sofrer colisões com espalhadores elásticos. Neste regime o comprimento de coerência de fase é dado por $L_\phi = v_F \tau_\phi$.
- **2. Regime Difusivo:** Para $l < L < \xi$, o sistema está no regime difusivo, pois o elétron sofre diversas colisões elásticas antes de escapar da amostra. Para este regime de transporte $L_\phi = D\tau_\phi$, onde D é a constante de difusão da amostra.
- **3. Regime Localizado:** Quando $\xi < L < L_\phi$, o sistema encontra-se no regime localizado. A amostra neste regime comporta-se como um isolante.

Nos regimes localizado e difusivo, o transporte é dominado por processos de espalhamentos similares ao caso clássico. No regime balístico figura 1.3, todas as dimensões do condutor são menores que os comprimentos característicos dos elétrons de condução, o que torna raro os processos de espalhamento (mesmo que haja, tais colisões serão elásticas e dessa forma há conservação do momento e da energia) e dessa forma os elétrons fluem através do condutor sem alterar seu momento total e a energia total, ou seja, sem perder a coerência de fase.

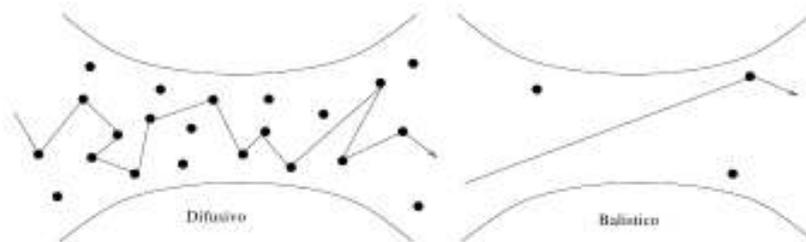


Figura 1.3 Condutor difusivo e balístico

1.2.2 Fenômenos Mesoscópicos

Rolf Landauer, no final da década de 1950 [32], foi talvez o primeiro a defender que em condutores reduzidos ocorria um transporte eletrônico onde a fase da função de onda desses elétrons não era alterada por processos de colisões elásticas, ou seja, durante um evento de colisão elástica o vetor de onda e a energia do elétron antes e depois da colisão eram preservados em magnitude. Logo, os elétrons podem atravessar todo o condutor mesoscópico sem perda de energia, o que permite ao elétron "*recordar*" o seu estado de entrada ao sair do condutor, e assim pode-se estabelecer uma ligação entre os estados de entrada e os estados de saída dos elétrons. No transporte balístico, o processo de transporte deve ser visto como um processo de transmissão, ligados ao conceito de fluxo de partículas, sendo que os processos de transmissão estão intimamente relacionados ao conceito de propagação de ondas. Daí surge o caráter ondulatório do elétron, que não pode-se mais desprezar no estudo das propriedades de transporte de sistemas mesoscópicos. Ao contrário do que é feito em teorias clássicas do transporte eletrônico, como a teoria de Drude e a equação de Boltzmann [32]. Existe três fenômenos importantes que ocorrem nesta ordem de grandeza. São eles: Localização fraca, quantização da condutância e flutuações da condutância.

1.2.2.1 Quantização da Condutância

A condutância é quantizada em múltiplos do quantum de condutância $G_0 = 2e^2/h$. É possível ter uma noção intuitiva de como surge a quantização da condutância, visto que o caráter ondulatório dos elétrons os fazem se comportar, ao atravessar um condutor balístico, como a radiação eletromagnética ao se propagar em guias de onda. O gás de elétrons bidimensional (2DEG) em uma heterojunção de AsGa/AlAsGa como mostra a figura 1.4 tem comprimento de onda de Fermi bem maior que em metais. Podemos, então, usar o 2DEG para estudar constrições com a abertura comparável com o comprimento de onda de Fermi e com o livre caminho médio bem menor. Podemos considerar um contato pontual como uma constrição transversa ao movimento dos elétrons, também chamado como comentamos anteriormente em ponto de contato quântico (PCQ). Utilizando técnicas de split-gate podemos construir contatos pontuais de largura ajustável. A baixas temperaturas, o confinamento transversal produz a quantização da condutância figura 1.5. Ou seja, a onda eletrônica só atravessa o contato pontual se interferir construtivamente, que acontece apenas para um determinado número de modos N como a largura W do contato pontual é ajustável, a medida que W aumenta, também aumenta a condutância. Isto é, a medida que a largura aumenta, mais modos N (ou canais da constrição) contribuem para a condutância figura 1.4. De fato ocorre a formação de degraus que consiste na quantização da condutância [30].

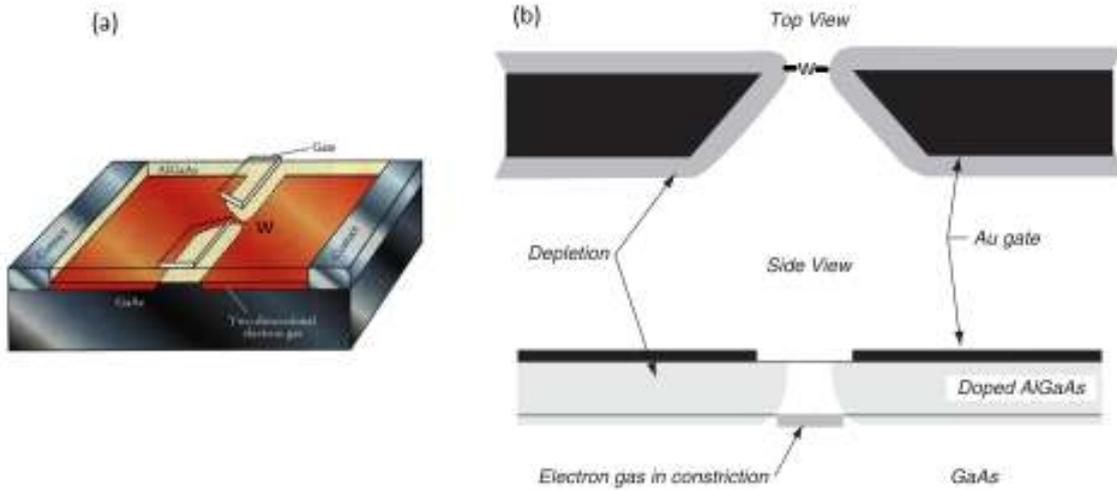


Figura 1.4 Estrutura do portões de metal usado para definir uma constrição e observar condutância quantizada. O tamanho da constrição é dado por W . Onde (a) foi retirado de [30] e (b) foi retirado de [26].

Temos que o aumento do potencial V implica que a condutância pode assumir valores discretos, que são múltiplos inteiros do quantum de condutância que tem como valor $2e^2/h$ onde h é a constante de Planck e e a carga do elétron

$$G = N \frac{2e^2}{h}; N = \frac{W}{\lambda/2} \quad (1.10)$$

onde λ é o comprimento de onda do elétron.

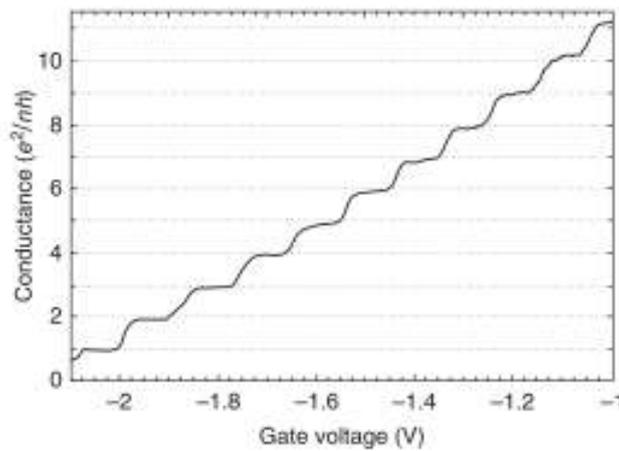


Figura 1.5 A condutância obtida a partir de um típico estrutura de GaAs/AlGaAs referente a variação da largura W da constrição da figura 1.4. Retirado de [26].

1.2.2.2 Localização Fraca

É um efeito de interferência quântica nas trajetórias retroespalhadas ao ponto de origem. Na ausência de campo magnético que quebre a simetria de reversão temporal e considerando que a coerência é mantida, a fase quântica do elétron na trajetória de retorno à origem é a mesma fase que no caso da trajetória revertida no tempo, criando um interferência construtiva e aumentando a probabilidade de retornar a origem da trajetória. Quando ocorre um aumento da amplitude de retroespalhamento diminuindo a condutância. Esse efeito de correção da condutância clássica (dada pela lei de Ohm) é conhecido como localização fraca figura 1.6. Se a simetria de reversão temporal for quebrada com a aplicação de um campo magnético. A interferência construtiva é eliminada, levando ao aumento da condutância. Uma característica importante da localização fraca é sua universalidade, que podem ser usados para medidas de coerência de fase, que é a distância na qual as funções de onda matém sua coerência.

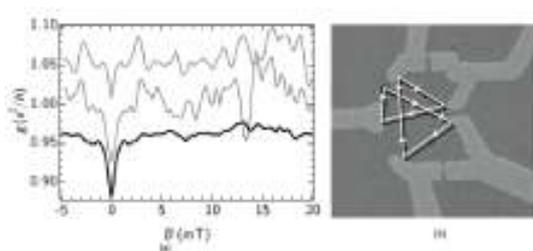


Figura 1.6 Esquerda: Média da Condutância em função do campo magnético. Observe que em $B = 0$, a condutância diminui devido ao interferência construtiva das trajetórias revertidas no tempo. O campo magnético quebra a simetria de reversão temporal eliminando a interferência construtiva e a condutância aumenta para $B \neq 0$. Direita: Diagrama ilustrando as trajetórias dos elétrons em um ponto quântico. Figura retirada de [31].

1.2.2.3 Flutuações Universais da Condutância

Quando variamos o campo magnético ocorre o surgimento de flutuações na condutância, que foram uma das primeiras manifestações do efeito da coerência de fase observadas em problemas de transporte. As flutuações são padrões estocásticos independente do tempo que varia com a mudança de temperatura, desaparecendo com o seu aumento. Os padrões são como "assinaturas digitais" da amostra pois são particularidades que variam de amostra para amostra e também dependem da distribuição de impurezas. A condutância é determinada pela comparação entre probabilidade dos elétrons saírem pelo guia oposto e a probabilidade de retorno. Estas probabilidades são determinadas pela soma coerente em todas as trajetórias. Qualquer que seja a alteração nos parâmetros, tais como campo magnético, energia de Fermi ou configuração de desordem, altera os padrões de interferência levando a alterações na condutância.

1.3 Emaranhamento no Bilhar Quântico Caótico

O bilhar quântico balístico caótico, como orbital emaranhador de pares de elétrons não interagentes, proposto por Beenakker [19] é da seguinte maneira: Nós consideramos um estado separável de duas-partículas entrando no reservatório da esquerda na figura 1.7, em que o vetor de estado de entrada é dado por

$$|\psi_{in}\rangle = a_1^\dagger a_2^\dagger |0\rangle \quad (1.11)$$

onde a_i^\dagger cria um elétron que entra no guia $i = 1$ e 2 , e $|0\rangle$ denota a temperatura zero no mar de Fermi.

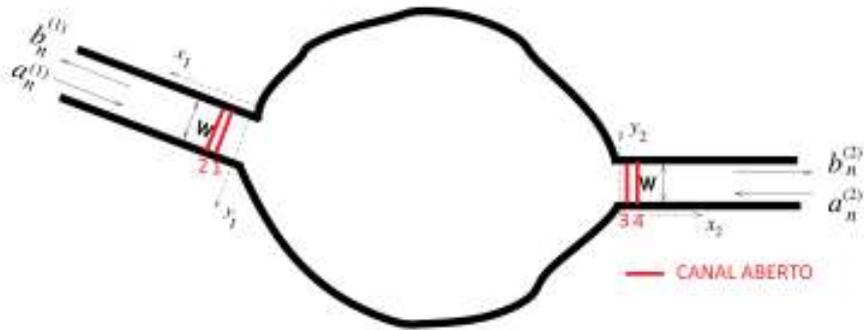


Figura 1.7 O Bilhar quântico orbital emaranhador. Onde ambos os guias estão conectados a potenciais químicos.

No estado de saída temos uma corrente de superposição de canais orbitais determinado pela matriz de espalhamento S de uma única partícula, de forma que

$$|\psi_{out}\rangle = \sum_{mn} S_{m1} S_{n2} b_m^\dagger b_n^\dagger |0\rangle \quad (1.12)$$

onde b_j^\dagger cria na saída um elétron no guia j , enquanto o elemento de matriz S_{ij} descreve o espalhamento de estados incidentes a partir do guia i (1 ou 2) ao guia j (1, 2, 3 ou 4). Se $m = n$ na equação 1.12 os termos desaparecem por causa da estatística fermiônica.

1.3.1 Processo de Espalhamento

Transporte de elétrons num bilhar quântico aberto balístico caótico conectado a guias de onda, sofre espalhamento, podendo ter localização fraca ou anti-localização como vemos anteriormente. Para o estudo desse transporte é necessário introduzirmos o estudo do espalhamento de elétrons. A teoria de transporte de elétrons nessa escala de tamanho da ordem de dezenas de nanômetros, foi desenvolvida por Landauer [10, 11] e posteriormente por Büttiker [12] e passou a ser conhecida com formalismo de Landauer-Büttiker. Desde então, este formalismo tem sido usado para estudar transporte de cargas em sistemas mesoscópicos. Landauer analisou o problema associando a condução em metais

à teoria de espalhamento, isto é, a condutância é expressa em termos da probabilidade do elétron ser transmitido através do condutor. Neste caso, é importante determinar a matriz de espalhamento S que descreve a relação entre as ondas incidentes e espalhadas. A partir da teoria de espalhamento chegaremos a expressão para os observáveis de transporte como condutância, concorrência e emaranhamento de formação em que veremos mais adiante. Uma ferramenta teórica muito usada nesses casos para o estudo de propriedades de sistemas quânticos abertos exibindo espalhamento caótico é a teoria de matrizes aleatórias (TMA)[31, 32, 33]. Originalmente desenvolvida por Wigner e Dyson para descrever flutuações no espectro de ressonância em núcleos pesados, temos que a maioria das universalidades dos fenômenos de interferência quântica, observadas em tais sistemas, esta fortemente associada à universalidades das propriedades estatística dos autovalores e autovetores de matrizes aleatórias. Sendo classificadas de acordo com certas simetrias e indicando para isso valores de um certo β que é chamado de parâmetro de simetria de Dyson.

Consideremos uma cavidade caótica conectada a dois guias ideais e onde o l -ésimo guia ($l = 1, 2$) tem largura W_l , onde um elétron na energia de Fermi $\epsilon_F = \hbar^2 k_F^2 / 2m$ sofre espalhamento [34, 35]. Iniciando pela equação de Schrödinger independent do tempo

$$\left[\frac{1}{2m} (-i\hbar \vec{\nabla} + \frac{e}{c} \vec{A}(\vec{r}))^2 + V(\vec{r}) \right] \psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r}) \quad (1.13)$$

onde $V(\vec{r})$ é o potencial devido às impurezas, $\vec{A}(\vec{r})$ é o potencial vetor do campo magnético externo e as condições de contorno são tais que a função de onda se anula nas paredes da amostra e dos guias. Podemos fazer uma analogia com a figura 1.8 encontrada na referência [36]

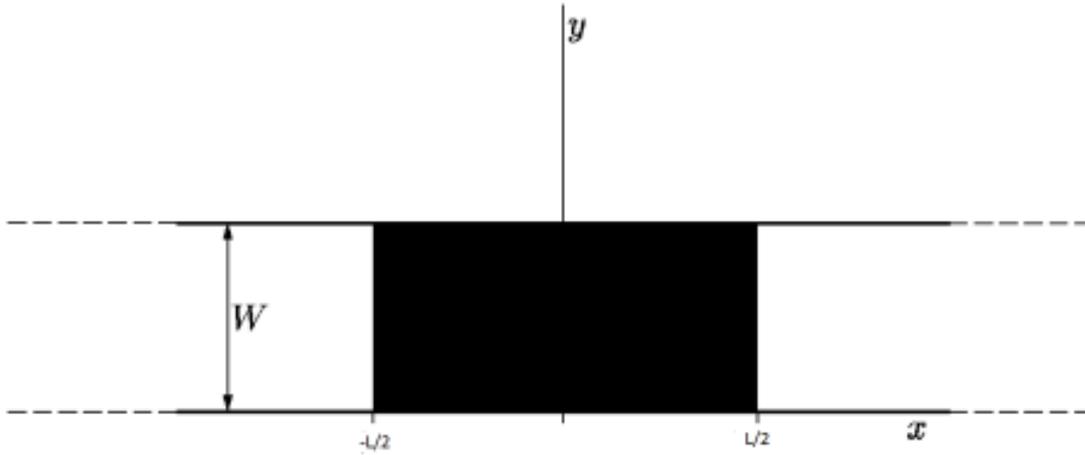


Figura 1.8 O sistema é composto por um guia de ondas de comprimento infinito, largura constante W e muros impenetráveis; o potencial de espalhamento é real e diferente de zero dentro de uma porção do condutor de ondas de comprimento L . Retirada da referência [36]

Dentro dos guias o potencial e o campo magnético são nulos. O vetor posição \vec{r} é dado pelo par ordenado (x, y) como podemos observar na figura 1.8 onde a abscissa x representa a direção longitudinal e está orientada para fora da cavidade, enquanto a ordenada y representa a direção transversal de propagação da onda, ou seja, $\psi(\vec{r}) = \phi(x)\chi(y)$. Como no eixo (x) não há confinamento, a solução em x é uma onda plana onde a parte longitudinal $\phi_s(E_x; x)$ da função de onda é dado pela equação

$$\phi_s(E_x; x) = \frac{e^{isk_x x}}{\sqrt{2\pi\hbar^2 k_x/m}} \quad (1.14)$$

com $s = \pm$ simbolizam ondas incidentes ou refletidas. De acordo com as condições de contorno estudada em mecânica quântica por meio do poço quântico de potencial infinito temos que a função de onda se anula nas paredes do poço, no nosso caso temos que as paredes são os valores $y = 0$ e $y = W$. Ou seja, escrevendo de outra maneira temos

$$\Psi(x, 0) = \Psi(x, W) = 0 \quad (1.15)$$

como

$$\chi(y) = A_n \cos(k_y y) + B_n \sin(k_y y) = 0 \quad (1.16)$$

onde n é o número de modos de propagação.

Para $y = 0$ temos que $\cos(0) = 1$ logo $A_n = 0$ e $\sin(0) = 0$ logo B_n é indiferente. Para $y = W$ temos que $\chi(w) = A_n \cos(k_y w) + B_n \sin(k_y w) = 0$ mas como $A_n = 0$ temos que $B_n \neq 0$ e que $\sin(k_y w) \neq 0$

$$k_y = \frac{n\pi}{W} \quad (1.17)$$

onde depois da normalização achamos a constante $B_n = \sqrt{\frac{2}{W}}$ e reescrevendo a parte transversal da função de onda $\chi(w) = B_n \sin(k_y w)$ temos que esta é dada pela equação

$$\chi_n(y) = \sqrt{\frac{2}{W}} \text{sen}(k_y Y), k_y = \frac{\pm n\pi}{W}, n = 1, 2 \quad (1.18)$$

com a energia transversal $E_y = \hbar^2 k_y^2 / 2m$ e k_y o número de onda transversal. Satisfazendo as condições de contorno formam um conjunto ortonormal, isto é, formam um conjunto completo de funções na variável transversal y

$$(\chi_n, \chi_m) = \int_0^W \chi_n(y) \chi_m(y) dy = \delta_{nm} \quad (1.19)$$

que como consequência a essas condições de contorno temos uma quantização transversal, em modos ou canais denotado por n . A energia e o número de onda do sistema se relacionam respectivamente por:

$$E = E_x + E_y k_F^2 = k_x^2 + k_y^2 \quad (1.20)$$

onde os subscritos x e y significam longitudinal e transversal, respectivamente. Se $k_y < k_F$, então $k_x^2 > 0$, k_x é real, e as exponenciais $e^{\pm i k_x x}$ ocorre na equação 1.14 representam ondas propagantes nos guias: são os modos propagantes ou canais abertos. Por outro lado, quando $k_y > k_F$, então $k_x^2 < 0$, $k_x = i k_x$ é imaginário puro, dando origem a ondas que decaem exponencialmente ao longo dos guias: estes são os modos evanescentes ou canais fechados. Sendo $E_y \leq E$, dizemos que estes canais são abertos se

$$N < \frac{kW}{\pi} < N + 1 \quad (1.21)$$

com N canais abertos. Ao longo do guia de onda, isto é, $x \rightarrow \infty$, apenas os canais aberto contribuem para a função de onda. A forma assintótica da função de onda é uma combinação linear e dada por

$$\psi(\vec{r}) = \sum_{n=1}^N \left[a_n \frac{e^{-i k_x x}}{(\hbar k_x / m)^{1/2}} + b_n \frac{e^{i k_x x}}{(\hbar k_x / m)^{1/2}} \right] \chi_n(y) \quad (1.22)$$

A matriz de espalhamento, ou matriz S , é definida pela relação

$$b = Sa \quad (1.23)$$

onde definimos os vetores N -dimensional que contém N amplitudes de entrada no guia

$$a = (a_1, a_2, \dots, a_N)^T \quad (1.24)$$

e N amplitudes de saída do guia

$$b = (b_1, b_2, \dots, b_N)^T \quad (1.25)$$

e a matriz S é representada na forma de blocos

$$S = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & t' \\ t & r' \end{pmatrix} \quad (1.26)$$

Onde, S_{ll} é uma matriz $N_l \times N_l$ contendo as amplitudes de reflexão dos N_l canais do guia l de volta para ele mesmo; S_{lm} , com $l \neq m$, é uma matriz $N_l \times N_m$ contendo as amplitudes de transmissão dos N_l canais do guia l para os N_m canais do guia m . A matriz S é então uma matriz quadrada $N_T \times N_T$ onde $N_T = N_1 + N_2$.

1.3.2 Simetrias da Matriz S

1.3.2.1 Conservação de corrente

A conservação da corrente implica

$$\sum_{l=1}^L j_l = 0 \quad (1.27)$$

isto é,

$$\sum_l \sum_{n=1}^N |b_n|^2 = \sum_l \sum_{n=1}^N |a_n|^2. \quad (1.28)$$

Usando os vetores a e b definidos anteriormente pode ser escrita em uma forma matricial

$$bb^\dagger = aa^\dagger \quad (1.29)$$

Da definição da matriz de espalhamento, concluimos que

$$SS^\dagger = 1 \quad (1.30)$$

ou seja, a conservação de corrente implica na unitariedade da matriz S . Na ausência de qualquer outra simetria este é o único vínculo.

1.3.2.2 Reversão Temporal

As leis da mecânica clássica são invariantes quando fazemos a transformação $t \mapsto -t$, e pode ser entendida como a visualização de um filme do movimento descrito por $r(t)$ rodado para trás. Na base do espalhamento a reversão temporal inverte o sentido de propagação das ondas planas nos guias. No problema revertido no tempo a matriz de espalhamento fica

$$a^* = S_{rev} b^* \quad (1.31)$$

mas se o sistema é invariante sob reversão temporal, ou seja, $S_{rev} = S$, usando a definição de S , temos

$$SS^* = 1 \quad (1.32)$$

Este vínculo combinado com a condição de conservação de corrente de fluxo, fornece

$$S^T = S \quad (1.33)$$

ou seja, a simetria de reversão temporal implica que a matriz S é simétrica.

1.3.3 Teoria de Matrizes Aleatórias

No transporte de cargas através de bilhares quânticos caóticos, a matriz hamiltoniana aleatória \mathcal{H} , pertencente ao ensemble gaussiano, é que descreve a dinâmica no interior da cavidade e neste caso o bilhar quântico é chamado de bilhar de Schrödinger, na verdade, todo bilhar quântico pertencente a classe de Wigner-Dyson, que veremos mais adiante, é chamado de bilhar de Schrödinger. No regime universal, propriedades estatísticas dos observáveis podem ser acessadas através da Teoria de Matrizes Aleatórias (TMA), que permite o cálculo de médias e variância de observáveis a partir de um ensemble de matrizes de espalhamento. A teoria de TMA para transporte quântico é uma teoria estatística de auto-valores de transmissão para sistemas abertos. Em contraste, a TMA estabelecida por Wigner Dyson é dirigida as estatísticas de níveis de energia de um sistema fechado [31].

A partir da década de 1930, a Física Nuclear teve um desenvolvimento muito rápido. Inicialmente com a descoberta do neutron e posteriormente com a fissão nuclear e a reação em cadeia, os esforços tanto teóricos quanto experimentais para entender o núcleo atômico tornaram-se intensos. Um dos fenômenos estudados era a captura de neutrons por núcleos pesados. Entender este fenômeno era fundamental para desenvolvimento da energia nuclear. No entanto, núcleos pesados têm uma enorme quantidade de graus de liberdade o que torna o estudo dos níveis de energia extremamente complexo. Para tentar resolver esta dificuldade, o físico Eugene Wigner introduziu o conceito de Matrizes Aleatórias com a finalidade de fazer um tratamento estatístico dos níveis de energia.

Wigner descobriu que a estatística de flutuações dos níveis desses átomos pesados, coincidia com a estatística das flutuações na densidade de auto-valores, obtida através da diagonalização de matrizes em que os elementos eram determinados aleatoriamente e sujeitos a distribuições gaussianas. Dyson publicou três artigos formalizando os ensembles de Matrizes Aleatórias de acordo com as propriedades de simetria do sistema físico como simetrias de reversão temporal (SRT) e rotação de spin (SRS). Nesta perspectiva, Dyson introduziu as classes de ortogonal, unitária e simplética indicadas pelos índices $\beta = 1$, $\beta = 2$ e $\beta = 4$ respectivamente que descreve o grau de liberdade dos elementos da matriz \mathcal{H} . Por esse motivo a classe de Wigner-Dyson WD é a mais conhecida dos ensembles.

1.3.3.1 Ensemble de Wigner-Dyson - Teoria de Matrizes Aleatórias em bilhares de Schrödinger fechados

Um bilhar de Schrödinger fechado pode ser caracterizado pelos seus níveis de energia, correspondente aos autovalores do hamiltoniano \mathcal{H} descrito por uma matriz aleatória e as autofunções de onda são os seus respectivos autovetores deste hamiltoniano. O valor exato dos níveis de energia e das funções de onda dependem da configuração das impurezas ou das fronteiras da amostra. Consequentemente, podemos considerar os bilhares de Schrödinger como ensembles estatísticos com diferentes formas, energia de Fermi ou configurações de impurezas. As propriedades estatísticas dos níveis de energia e das funções de onda são universais, portanto não dependem do tamanho ou forma do bilhar ou das concentrações das impurezas. Dependem apenas das simetrias básicas do sistema, isto é da Simetria de Reversão Temporal, Simetria de Rotação de Spin. Além disso, as propriedades estatísticas dos bilhares quânticos caóticos são as mesmas das matrizes hermitianas aleatórias que tenham as mesmas simetrias descritas pelo hamiltoniano \mathcal{H} . Wigner focou inicialmente no estudo de matrizes hamiltonianas \mathcal{H} cujos elementos são variáveis aleatórias independentes com distribuição gaussiana satisfazendo a densidade de probabilidade

$$P(\mathcal{H}) \propto \left(-\frac{\beta N}{4\lambda^2} \text{Tr} \mathcal{H}^2 \right) \quad (1.34)$$

na qual λ é um parâmetro numérico que está relacionado com o espaçamento médio entre os níveis de energia (autovalores de \mathcal{H}) e β é o índice de Dyson. Os ensembles de matrizes aleatórias são invariantes sob o automorfismo

$$\mathcal{H} \rightarrow U\mathcal{H}U^{-1} \quad (1.35)$$

onde U é uma matriz ortogonal para $\beta = 1$, unitária para $\beta = 2$ e simplética para $\beta = 4$. Nestes casos, o ensemble é dito ortogonal, unitário e simplético, respectivamente.

β	SRT	SRS	H	U
1	sim	sim	real	ortogonal
2	não	irrelevante	complexo	unitária

Tabela 1.2 Resumo dos três ensembles de Wigner-Dyson. A matriz hamiltoniana \mathcal{H} (e sua matriz de autovetores U) são classificadas por um índice de $\beta = 1, 2, 4$, dependendo da presença ou ausência de inversão de tempo (SRT) e simetria de rotação de spin semi-inteiro (SRS).

1.3.3.2 Ensemble de Wigner-Dyson - Teoria de Matrizes Aleatórias em bilhares de Schrödinger abertos

Se no caso de bilhares de Schrödinger fechados podemos descrevê-los através das autofunções e dos níveis de energia, o mesmo não ocorre com sistemas abertos. Um bilhar quântico é dito aberto se o mesmo está conectado a guias e neste caso, o sistema é descrito pela matriz de espalhamento S . A matriz S relaciona as ondas espalhadas b com as incidentes a e desempenha um papel central na teoria de Landauer-Büttiker. A estatística dos autovalores de matrizes S foi estudada por Dyson em 1962, que introduziu os três ensembles circulares, similares aos ensembles gaussianos, que são: ortogonal para $\beta = 1$, unitária para $\beta = 2$ e simplética para $\beta = 4$. No Ensemble circular a cavidade caótica é descrita inteiramente pela matriz S , sem se referir a matriz \mathcal{H} , sendo então as propriedades estatísticas de observáveis de transporte obtidas a partir de um ensemble de matrizes de espalhamento com as mesmas propriedades de simetria. Desta forma, a probabilidade de encontrar-mos a matriz de espalhamento numa vizinhança dS de algum valor S é definida por

$$dP_\beta = \mathcal{W}_\beta(S) d_\mu^\beta(S) \quad (1.36)$$

onde d_μ^β é a média de Haar do grupo de simetria apropriado. A situação mais simples ocorre no caso de contatos ideais. Neste caso, a densidade de probabilidade $\mathcal{W}_\beta(S)$ pode ser obtida através da maximização da entropia de informação de Shannon

$$E = - \int d_\mu^\beta(S) \mathcal{W}_\beta(S) \ln \mathcal{W}_\beta(S) \quad (1.37)$$

sujeita apenas ao vínculo de normalização

$$\int d_\mu^\beta(S) \mathcal{W}_\beta(S) = 1 \quad (1.38)$$

além dos vínculos de simetria incorporados na matriz S . Dessa forma, a distribuição de máxima entropia é

$$\mathcal{W}_\beta(S) = \text{constante} \quad (1.39)$$

ou seja, a matriz S está distribuída uniformemente no grupo unitário. Portanto a probabilidade diferencial é completamente definida pela medida de Haar, $dP_\beta(S) \propto d_\mu^\beta(S)$. Esses são os ensembles circulares da TMA introduzidos por Dyson na década de 60.

β	SRT	SRS	S	Ensemble
1	sim	sim	unitária	ECO
2	não	irrelevante	unitária e simétrica	ECU

Tabela 1.3 Classificação de Dyson dos Ensembles Circulares.

Por definição a media de Haar deve ser invariante sob um automorfismo de uma dada classe de simetria, ou seja

$$d_\mu^\beta(S) = d_\mu^\beta(USV) \quad (1.40)$$

onde U e V são unitárias, com a restrição adicional de $V = U^T$ para $\beta = 1$ e $V = \bar{U}$ para $\beta = 4$. A forma da medida de Haar depende diretamente da parametrização escolhida da matriz S .

1.3.3.3 Novas Classes de Simetria

Existem sistemas desordenados, nos quais as classes de Wigner-Dyson não se aplicam. Nestes casos, simetrias adicionais tornam-se relevantes e surgem novas classes de universalidades e novos ensembles de matrizes aleatórias em termos das simetrias de sub-rede (SSR) [37], [38] ou quiral, simetria de partícula-buraco (SPB). De acordo com a nova classificação existem dez classes de universalidade na TMA, divididas em três categorias: (i) Wigner-Dyson (3 classes); (ii) Quiral (3 classes); (iii) Altland-Zirnbauer ou também conhecida por Bogoliubov-de Gennes (4 classes); A subdivisão em cada categoria depende da presença ou da ausência de simetria de reversão temporal e de rotação de spin, como também na presença ou ausência de simetria partícula buraco e simetria de sub-rede. As classes Wigner-Dyson compreendem os ensembles clássicos introduzidos na década de 60. Em física mesoscópica elas são apropriadas para cavidades balísticas caóticas e condutores desordenados convencionais.

Classes de Ensembles	Beta	Ensembles	TRS	PHS	SLS	U	S
Wigner-Dyson	2	A(unitário)	0	0	0	$\mathbb{U}(N)$	$S = U$
	1	AI(ortogonal)	+1	0	0	$\mathbb{U}(N)$	$S = U^T U$
	4	AII(simplético)	-1	0	0	$\mathbb{U}(2N)$	$S = J U^T J^{-1} U$
Quiral	2	AIII(unitário)	0	0	1	$\mathbb{U}(2N)$	$S = \Sigma_z U^\dagger \Sigma_z U$
	1	BDI(ortogonal)	+1	+1	1	$\mathbb{SO}(2N)$	$S = \Sigma_z U^T \Sigma_z U$
	4	CII(simplético)	-1	-1	1	$\mathbb{S}_p(4N)$	$S = \Sigma_z U^\dagger \Sigma_z U$
Altland-Zirnbauer	2	D	0	+1	0	$\mathbb{SO}(2N)$	$S = U$
	2	C	0	-1	0	$\mathbb{S}_p(2N)$	$S = U$
	1	DIII	-1	+1	1	$\mathbb{SO}(4N)$	$S = J U^T J^{-1} U$
	4	CI	+1	-1	1	$\mathbb{S}_p(4N)$	$S = \Sigma_z U^\dagger \Sigma_z U$

Tabela 1.4 Tabela de Cartan. As simetrias fundamentais que classificam cada tipo de ensemble são: simetria de reversão temporal (TRS), partícula-buraco (PHS), simetria de rotação de spin (SRS) e subrede (SLS). Na tabela quando há uma quebra de simetrias representamos por 0, e não havendo a quebra da simetria representamos por ± 1 . Representa a decomposição da matriz espalhamento em termos de matriz unitária, ortogonal e simplética. Figura adaptada das [39] e [40]

Ao longo dessa dissertação so abordaremos distribuições, médias e variâncias de observáveis referentes as simetrias Wigner-Dyson(wd) e Quiral(ch).

1.3.4 Ensemble Quiral

Sabe-se que as propriedades de transporte em metais desordenados são universais, desde que a desordem seja suficientemente fraca, as temperaturas baixas e a coerência

quântica seja mantida por distâncias grandes. No caso de transporte eletrônico em sistemas com desordem completamente fora da diagonal, como nos modelos de hopping aleatório em redes bipartidas o ensemble quirral é o mais indicado. A classe de simetria quirral foi introduzida no contexto de propriedades espectrais do operador de Dirac em cromodinâmica quântica (QCD) [41]. Onde o operador de Dirac pode ser descrito por teoria de matrizes aleatórias, dessa maneira, assim como os ensembles de Wigner-Dyson, podemos considerar três casos diferentes: o ensemble circular ortogonal (ECO), o ensemble circular unitário (ECU) e o ensemble circular simplético (ECS). A diferença entre os ensembles Wigner-Dyson e quirral é a validade da simetria de sub-rede (SSR) nos ensembles quirrais.

O bilhar quântico caótico com simetria quirral dá-se o nome de bilhar de Dirac Caótico. O hamiltoniano de Dirac sem massa com simetria de sub-rede (SSR) ou quirral satisfaz a seguinte relação de anti-comutação

$$\mathcal{H} = -\sigma_Z H \sigma_Z \quad (1.41)$$

onde σ_Z é a matriz de Pauli, e

$$\sigma_Z = \begin{pmatrix} 1_M & 0 \\ 0 & -1_M \end{pmatrix} \quad (1.42)$$

onde 1_M é uma matriz identidade $M \times M$ e cada M dos 1's e -1 's em σ_Z como o número de átomos em cada sub-red. Temos um total de $2M$ átomos no bilhar de Dirac. Logo o hamiltoniano 1.41 deve adquirir uma estrutura anti-diagonal:

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} 0 & T \\ T^\dagger & 0 \end{pmatrix} \quad (1.43)$$

onde T é uma matriz de dimensão M . A existência de blocos apenas fora da diagonal no hamiltoniano pode ser entendida por causa da condição

$$\sum_Z \mathcal{H} \sum_Z = -\mathcal{H} \quad (1.44)$$

onde

$$\sum_Z = \begin{pmatrix} 1_{N_B} & 0 \\ 0 & 1_{N_A} \end{pmatrix} \quad (1.45)$$

é uma generalização da matriz de Pauli. Onde A e B são sub-redes correspondentes aos sítios pretos e brancos que se interceptam no ponto de Dirac ($\epsilon = 0$), próximos da Zona de Brillouin, respectivamente da figura 1.9.

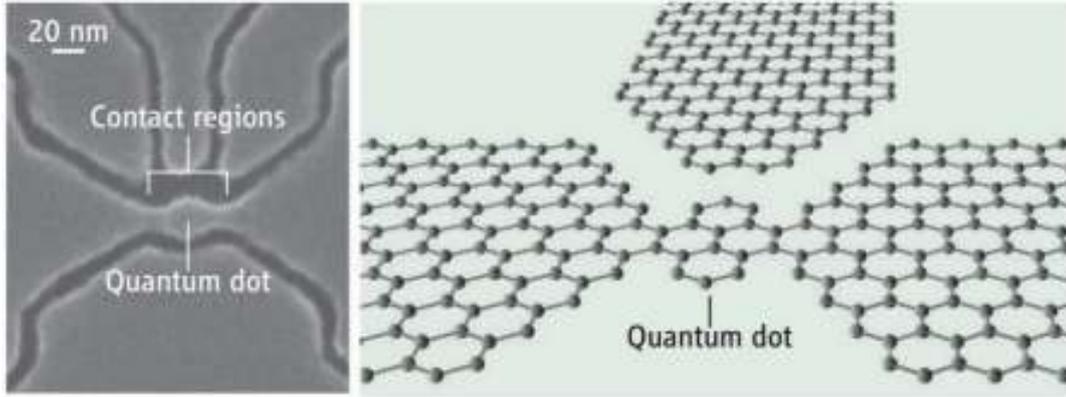


Figura 1.9 Ilustração do Bilhar de Dirac caótico com estrutura rede coméia similar a estrutura hexagonal bipartida do grafeno. Figura retirada de [42].

Caso as amplitudes de hopping conectem apenas sítios de subredes diferentes (A e B), podemos escrever as equações tipo *tight-binding* combinadas numa única equação de Schrödinger $\mathcal{H}\psi = \epsilon\psi$ usando 1.43 temos

$$\begin{pmatrix} 0 & T \\ T^\dagger & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix} = \epsilon \begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix} \quad (1.46)$$

onde ψ_A e ψ_B denotam as funções de onda nos sítios das sub-rede A e B, respectivamente.

1.3.5 Emaranhamento usando processos de Espalhamento

Nós calculamos a completa distribuição estatística do emaranhamento no bilhar quântico caótico usando a teoria de matrizes aleatórias. A medida quantitativa de emaranhamento mais utilizada é a concorrência definida como [19]

$$C = \frac{2\sqrt{\tau_1(1-\tau_1)\tau_2(1-\tau_2)}}{\tau_1 + \tau_2 - 2\tau_1\tau_2} \quad (1.47)$$

Demonstração. Definimos $n_{i\gamma}$ onde i é o guia e γ é o canal correspondentes no bilhar quântico em que o estado da partícula é dado por $|n_{11}, n_{21}\rangle$. Na teoria de espalhamento vimos que a matriz de espalhamento S , conecta tudo que entra no guia A_γ^i com tudo o que sai B_γ^i através da relação

$$B = SA \quad (1.48)$$

$$B_\gamma^i = SA_\gamma^i \quad (1.49)$$

Consideremos primeiramente o caso de 1 canal aberto em cada guia e apenas uma partícula.

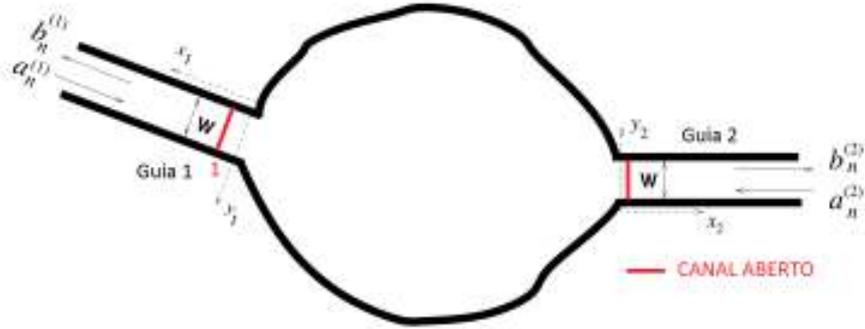


Figura 1.10 O Bilhar quântico orbital emaranhador com apenas 1 canal aberto e uma partícula.

▪ Primeiro Caso

O estado inicial com uma única partícula do guia 1 é conhecido e dado por

$$|\psi_{in}\rangle = a_{11}^\dagger |0,0\rangle = |1,0\rangle \quad (1.50)$$

reescrevendo 1.49 para este caso temos

$$\begin{pmatrix} B_1^1 \\ B_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.51)$$

concluimos que

$$B_1^1 = S_{11} = r \quad (1.52)$$

$$B_1^2 = S_{21} = t \quad (1.53)$$

onde r é a matriz de reflexão e t de transmissão, logo o estado final é

$$|\Psi_{out}\rangle = \sum_{i=1}^2 B_1^i b_{i1}^\dagger |0,0\rangle = B_1^1 b_{11}^\dagger |0,0\rangle + B_1^2 b_{21}^\dagger |0,0\rangle = B_1^1 |1,0\rangle + B_1^2 |0,1\rangle = r |1,0\rangle + t |0,1\rangle. \quad (1.54)$$

• Segundo Caso

No caso de 2 canais e uma única partícula

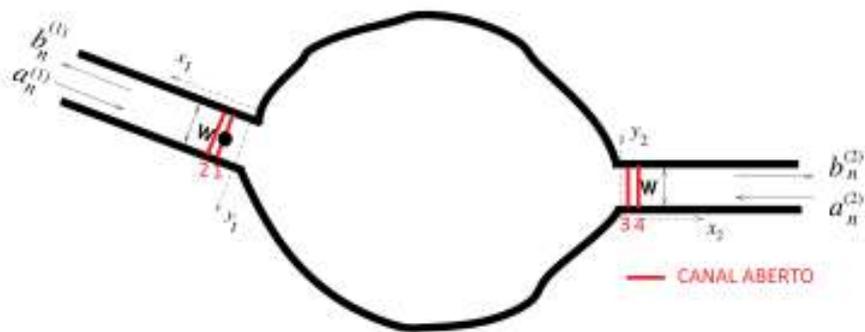


Figura 1.11 O Bilhar quântico orbital emaranhador com dois canais abertos.

O estado desta partícula é dada por

$$|n_{11}, n_{12}, n_{21}, n_{22}\rangle \quad (1.55)$$

onde o estado inicial é novamente conhecido e a partícula se encontra no canal e guia 1, escrevendo na forma 1.55, temos

$$\psi_{in} = a_{11}^\dagger |0, 0, 0, 0\rangle = |1, 0, 0, 0\rangle \quad (1.56)$$

reescrevendo as amplitudes de saída em função da matriz de espalhamento e amplitudes de entrada temos

$$\begin{pmatrix} B_1^1 \\ B_2^1 \\ B_1^2 \\ B_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.57)$$

onde podemos concluir que

$$B_1^1 = S_{11} \quad (1.58)$$

$$B_2^1 = S_{21} \quad (1.59)$$

$$B_3^2 = S_{31} \quad (1.60)$$

$$B_4^2 = S_{41} \quad (1.61)$$

Logo o estado de saída é dado por

$$\begin{aligned} |\psi_{out}\rangle &= \sum_{i=1}^4 S_{i1} b_i^\dagger |0, 0, 0, 0\rangle = S_{11} b_1^\dagger |0, 0, 0, 0\rangle + S_{21} b_2^\dagger |0, 0, 0, 0\rangle + S_{31} b_3^\dagger |0, 0, 0, 0\rangle \\ &+ S_{41} b_4^\dagger |0, 0, 0, 0\rangle = S_{11} |1, 0, 0, 0\rangle + S_{21} |0, 1, 0, 0\rangle + S_{31} |0, 0, 1, 0\rangle + S_{41} |0, 0, 0, 1\rangle \end{aligned} \quad (1.62)$$

igualando os resultados com 1.58, 1.59, 1.60 e 1.61, temos que o estado de saída é

$$|\psi_{out}\rangle = B_1^1 |1, 0, 0, 0\rangle + B_2^1 |0, 1, 0, 0\rangle + B_3^2 |0, 0, 1, 0\rangle + B_4^2 |0, 0, 0, 1\rangle. \quad (1.63)$$

• Terceiro Caso

Caso de 2 canais e duas partículas. O estado de saída é uma posição coerente dos canais orbitais determinada pela matrix espalhamento de uma única partícula. O estado inicial das partículas é conhecida e dado por

$$|\psi_{in}\rangle = a_1^\dagger a_2^\dagger |0, 0, 0, 0\rangle = |1, 1, 0, 0\rangle \quad (1.64)$$

reescrevendo as amplitudes de saída em função da matriz de espalhamento e amplitudes de entrada temos

$$\begin{pmatrix} B_1^1 \\ B_2^1 \\ B_1^2 \\ B_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.65)$$

onde podemos concluir que

$$B_1^1 = S_{11} + S_{12} \quad (1.66)$$

$$B_2^1 = S_{21} + S_{22} \quad (1.67)$$

$$B_3^1 = S_{31} + S_{32} \quad (1.68)$$

$$B_4^1 = S_{41} + S_{42} \quad (1.69)$$

igualando os resultados acima temos que o estado de saída é

$$|\psi_{out}\rangle = \sum_{i,j=1}^4 S_{i1} S_{j2} b_{1i}^\dagger b_{2j}^\dagger |0,0,0,0\rangle \quad (1.70)$$

ou usando a fórmula reduzida abaixo para facilitar os cálculos considerando o fato $\{b_i^\dagger, b_j^\dagger\} = 0$, na qual as chaves indicam a anticomutação, temos

$$|\psi_{out}\rangle = \sum_{i,j=1}^4 (S_{p1} S_{q2} - S_{q1} S_{p2}) b_p^\dagger b_q^\dagger |0,0,0,0\rangle \quad (1.71)$$

com $p = 1, 2$ e $q = 3, 4$, logo temos

$$|\psi_{out}\rangle = (S_{11} S_{32} - S_{31} S_{11}) b_p^\dagger b_q^\dagger |1,0,1,0\rangle \quad (1.72)$$

$$(S_{11} S_{42} - S_{41} S_{12}) b_p^\dagger b_q^\dagger |1,0,0,1\rangle \quad (1.73)$$

$$(S_{21} S_{32} - S_{31} S_{22}) b_p^\dagger b_q^\dagger |0,1,1,0\rangle \quad (1.74)$$

$$(S_{21} S_{42} - S_{41} S_{22}) b_p^\dagger b_q^\dagger |0,1,0,1\rangle \quad (1.75)$$

$$(S_{11} S_{22} - S_{21} S_{12}) b_p^\dagger b_q^\dagger |1,1,0,0\rangle \quad (1.76)$$

$$(S_{31} S_{42} - S_{41} S_{32}) b_p^\dagger b_q^\dagger |0,0,1,1\rangle \quad (1.77)$$

Logo temos que

$$|n_{11}, n_{12}, n_{21}, n_{22}\rangle = |n_1, n_2\rangle \quad (1.78)$$

com $n_1 = n_{11} + n_{12}$ e $n_2 = n_{21} + n_{22}$, logo temos

$$|\psi_{out}\rangle = |0,2\rangle + |2,0\rangle + |1,1\rangle \quad (1.79)$$

onde

$$|0,2\rangle = (S_{31} S_{42} - S_{41} S_{32}) |0,0,1,1\rangle \quad (1.80)$$

$$|2,0\rangle = (S_{11} S_{22} - S_{21} S_{12}) |1,1,0,0\rangle \quad (1.81)$$

são conhecidos como estados separáveis, e

$$|1,1\rangle = \sum_{p=1}^2 \sum_{q=3}^4 (S_{p1} S_{q2} - S_{q1} S_{p2}) b_p^\dagger b_q^\dagger |0,0,0,0\rangle = \quad (1.82)$$

$$= (S_{11} S_{32} - S_{31} S_{12}) |1,0,1,0\rangle \quad (1.83)$$

$$+ (S_{11} S_{42} - S_{41} S_{12}) |1,0,0,1\rangle \quad (1.84)$$

$$+ (S_{21} S_{32} - S_{31} S_{22}) |0,1,1,0\rangle \quad (1.85)$$

$$+ (S_{21} S_{42} - S_{41} S_{22}) |0,1,0,1\rangle \quad (1.86)$$

são conhecidos como estados emaranhados de dois qubits.

Dado que a matriz de espalhamento pode ser reescrita como

$$S = \begin{pmatrix} r & t' \\ t & r' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} \end{pmatrix} \quad (1.87)$$

usando a matriz de pauli σ_y e os vetores de saída da esquerda \widehat{b}_E^\dagger e direita \widehat{b}_D^\dagger são respectivamente

$$\sigma_y = i \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.88)$$

$$\widehat{b}_E^\dagger = \begin{pmatrix} b_1^\dagger \\ b_2^\dagger \end{pmatrix} \quad (1.89)$$

$$\widehat{b}_D^\dagger = \begin{pmatrix} b_3^\dagger \\ b_4^\dagger \end{pmatrix} \quad (1.90)$$

temos então que usando os resultados acima podemos re-escrever os estados separáveis e os emaranhados como

$$\begin{aligned} |0, 2\rangle &= (S_{31}S_{42} - S_{41}S_{32}) |0, 0, 1, 1\rangle = \det(t) |0, 0, 1, 1\rangle = (tt')^2 |0, 0, 1, 1\rangle = i[t\sigma_y t']_{12} |0, 0, 1, 1\rangle \\ |2, 0\rangle &= (S_{11}S_{22} - S_{21}S_{12}) |1, 1, 0, 0\rangle = \det(r) |1, 1, 0, 0\rangle = (rr')^2 |1, 1, 0, 0\rangle = i[r\sigma_y r']_{12} |1, 1, 0, 0\rangle \\ |1, 1\rangle &= b_E^\dagger r \sigma_y t' b_D^\dagger |0, 2\rangle \end{aligned}$$

usando a definição de concorrência [43]

$$C = \frac{2\sqrt{\det(\lambda\lambda^\dagger)}}{\text{Tr}(\lambda\lambda^\dagger)} \quad (1.91)$$

no qual $\lambda = \sigma_y r \sigma_y t'$ é o peso do estado normalizado e usando também o teorema de Binet que diz: Se temos duas matrizes quadradas de mesma ordem, então a seguinte igualdade é verdadeira $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ onde substituindo em 1.91e usando a unitariedade da matriz espalhamento que $t^\dagger t^* = 1$, temos

$$C = \frac{2\sqrt{\det((\sigma_y r \sigma_y t^\dagger)(\sigma_y r \sigma_y t^\dagger)^\dagger)}}{\text{Tr}((\sigma_y r \sigma_y t^\dagger)(\sigma_y r \sigma_y t^\dagger)^\dagger)} = \frac{2\sqrt{\det(r \sigma_y t^\dagger t^* \sigma_y r^\dagger)}}{\text{Tr}(r \sigma_y t^\dagger t^* \sigma_y r^\dagger)}$$

$$= \frac{2\sqrt{\det(\sigma_y) \det(r) \det(\sigma_y) \det(r^\dagger)}}{\text{Tr}(\sigma_y r \sigma_y r^\dagger)} \quad (1.92)$$

$$= \frac{2\sqrt{\tau_1(1-\tau_1)\tau_2(1-\tau_2)}}{\tau_1 + \tau_2 - 2\tau_1\tau_2} \quad (1.93)$$

se $\tau_1 = \tau_2$ temos

$$C = \frac{2\sqrt{\tau_1^2(1-\tau_1)^2}}{2\tau_1(1-\tau_1)} = 1 \quad (1.94)$$

logo o emaranhamento é máximo (estado de Bell). Já quando $\tau_1 = 1$ ou $\tau_2 = 1$ temos que

$$C = 0 \quad (1.95)$$

não existe emaranhamento e os estados são ditos separáveis, como é o caso dos estados $|0,2\rangle$ e $|2,0\rangle$.

■

1.4 Descrição dos capítulos da dissertação

No capítulo 1 fizemos uma breve revisão de literatura a certa da história, utilidade e medição do emaranhamento como também aspectos a certa da escala mesoscópica e a aplicação disso tudo no bilhar quântico, estudando para isso a teoria de espalhamento, teoria de matrizes aleatórias, ensemble de Wigner-Dyson e ensemble Quiral. No capítulo 2 reproduzimos os resultados já conhecidos na literatura com relação a distribuição da condutância, como média, localização fraca e variância da condutância como também a distribuição da concorrência, média, localização fraca e variância da concorrência e também média, localização fraca e variância do emaranhamento de formação para o bilhar de Schrödinger, ou seja, bilhar quântico com simetria Wigner-Dyson. No capítulo 3 reproduzimos os resultados já conhecidos na literatura com relação a distribuição da condutância, como média, localização fraca e variância da condutância para o bilhar de Dirac, ou seja, para o bilhar quântico com simetria Quiral. E obtemos a distribuição da concorrência, média, localização fraca e variância da concorrência e também média, localização fraca e variância do emaranhamento de formação para o bilhar de Dirac. E concluímos que o bilhar de Dirac se mostra mais promissor como orbital emaranhados do que o bilhar de Schrödinger pois a probabilidade maior é no estado maximamente emaranhado.

CAPÍTULO 2

DISTRIBUIÇÃO DE AUTOVALORES. DISTRIBUIÇÃO DA CONCORRÊNCIA. APLICAÇÃO EM BILHAR QUÂNTICOS.

Neste capítulo iremos fazer uma revisão de conteúdos conhecidos na literatura, que foram os mais importantes e essenciais para o entendimento e desenvolvimento deste trabalho. Nos bilhares quânticos, podemos investigar experimentalmente as propriedades de transporte eletrônico e comparar dentro dos resultados teóricos. O formalismo de Landauer-Büttiker fornece uma maneira poderosa de investigar as propriedades de transporte quântico nesses sistemas. O formalismo é abordado com base na matriz de espalhamento que permite-nos trabalhar com quantidades importantes como a condutância e a concorrência por meio do conhecimento dos autovalores de transmissão. Onde a matriz espalhamento é modelada usando uma matriz unitária pertencente a matrizes aleatórias de Ensembles Circulares.

O foco deste trabalho são os estados emaranhados, logo vemos no capítulo 1 que o nosso bilhar quântico caótico de estudo da física mesoscópica, conectado a dois guias simétricos(ou seja, $N_1 = N_2 = N$ sendo que N_i é a quantidade de canais abertos no guia i) entre si, pode ser utilizado como sendo um orbital emaranhador de elétrons. Porém observamos que quando $N_1 = N_2 = 1$ não é possível obter o estado de Bell e os estados consistem em estados separáveis, isto é, estados não emaranhados, então não é possível analisar a distribuição da concorrência e nem do emaranhamento de formação para este caso e só apenas para o caso $N_1 = N_2 = 2$. A distribuição da concorrência sugere que a quebra de SRT não tem efeito significativo sobre a produção de emaranhamento, assim como outras propriedades quânticas ligadas ao transporte como a condutância isto é notável.

Neste capítulo iremos apresentar resultados explícitos de distribuição dos Ensembles Circulares de Wigner-Dyson para as classes de simetria $\beta = 1$ e $\beta = 2$, que consistem no ensemble circular ortogonal e ensemble circular unitário, respectivamente. Primeiramente obtemos para condutância e em seguida para a concorrência. Iremos nos importar apenas com o sistema de dois modos propagantes, ou seja, $N = 2$ que é o único válido para o caso do estado de Bell [6].

2.1 A distribuição da Condutância

Utilizando a seguinte decomposição da matriz S , conhecida como decomposição polar [44, 36]

$$S = \begin{pmatrix} u_1 & 0 \\ 0 & u_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{1-\tau} & \sqrt{\tau} \\ \sqrt{\tau} & \sqrt{1-\tau} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_3 & 0 \\ 0 & u_4 \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

onde, τ é a matriz diagonal construída a partir dos autovalores τ_i da matriz Hermitiana tt^\dagger , ou seja, $\tau = \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N$, u_1 e u_3 (u_2 e u_4) são matrizes unitárias para $\beta = 2$, com restrições que $u_3 = (u_1)^T$ e $u_4 = (u_2)^T$, para $\beta = 1$ e $N_1 \times N_1$ ($N_2 \times N_2$), $N = \min(N_1, N_2)$ e $m = |N_1 - N_2|$ a medida de Haar (elemento de volume) fatora a matriz espalhamento S em uma parte radial e outra angular e pode ser escrita da seguinte forma

$$d_\mu^{(\beta)}(S) \propto \prod_{i < j} |\tau_i - \tau_j|^\beta \prod_{i=1}^N \tau_i^{\beta(m+1)/2-1} \prod_j d\mu(u_j) \quad (2.2)$$

Integrando sobre as variáveis angulares, obtemos a função distribuição conjunta $P_\beta(\tau_n)$ de autovalores de transmissão τ_n , a mesma já é bastante conhecida na literatura [45], e que a variação dos autovalores de transmissão para o caso de sistema de dois modos propagantes é de $0 \leq \tau_1 + \tau_2 \leq 2 \implies 0 \leq \tau \leq 2$, que é dada por

$$P_\beta(\tau_1, \tau_2) = C_\beta |\tau_1 - \tau_2|^\beta (\tau_1 \tau_2)^{\frac{\beta}{2}-1} \quad (2.3)$$

onde C_β é o fator de normalização obtida através da integral de Selberg [45] e $P_\beta(\tau_1, \tau_2)$ esta relacionada ao ensemble de Jacobi da TMA [46]:

$$C_\beta = \frac{(2\beta)\Gamma\left(1 + 3\frac{\beta}{2}\right)}{2\Gamma(1 + \beta)\Gamma\left(\frac{\beta}{2}\right)} \quad (2.4)$$

A condutância é dada por

$$g = \tau_1 + \tau_2 \quad (2.5)$$

Logo substituindo $\beta = 1$ e 2 na equação 2.4 as constantes ficam

$$C_1 = \frac{3}{4} \quad (2.6)$$

$$C_2 = 6 \quad (2.7)$$

Substituindo 2.6 e 2.7 em 2.3 a função distribuição conjunta para $\beta = 1$ e 2 ficam respectivamente

$$P_1(\tau_1, \tau_2) = \frac{3}{4} \frac{|\tau_1 - \tau_2|}{\sqrt{(\tau_1 \tau_2)}} \quad (2.8)$$

$$P_2(\tau_1, \tau_2) = 6(\tau_1 - \tau_2)^2 \quad (2.9)$$

A distribuição da condutância, é dada por [36]:

$$\mathcal{P}^\beta(g) = \langle \delta(g - \tau_1 - \tau_2) \rangle \quad (2.10)$$

ou usando a função de distribuição conjunta 2.3 temos que a distribuição da condutância pode ser obtida como

$$\mathcal{P}^\beta(g) = \int_0^1 \int_0^1 \delta(g - \tau_1 - \tau_2) P_\beta(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \quad (2.11)$$

Iremos, para o cálculo da distribuição da condutância para os $\beta = 1$ e 2 , utilizar primeiramente o método sugerido por Mello e Kumar [36] em seguida o método da expansão do delta de Dirac ver apêndice B, este ultimo é mais direto e rápido e o utilizaremos nos demais cálculos que surjam a função delta de Dirac ao longo dessa dissertação.

2.1.1 Cálculo da distribuição da condutância utilizando o método de Mello e Kumar

Para o cálculo de 2.11 temos que realizar esta integral bidimensional τ_1, τ_2 dentro do quadrado $0 < \tau_1 < 1$ e $0 < \tau_2 < 1$ indicado na figura abaixo.

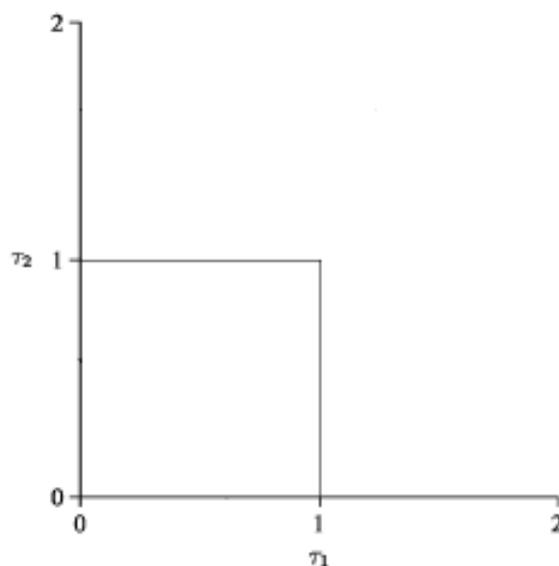


Figura 2.1 Modelando a região de integração, partindo do quadrado de lado 1.

A mudança de variável é a seguinte [36]

$$\begin{cases} x = \tau_1 + \tau_2 \\ y = \tau_1 - \tau_2 \end{cases} \quad (2.12)$$

onde a partir das somas e subtrações das equações 2.12 obtemos as expressões abaixo

$$y = 2\tau_1 - x \quad (2.13)$$

$$y = x - 2\tau_1 \quad (2.14)$$

Analisando as equações 2.13 e 2.14 podemos contruir a figura abaixo que irá ser útil para determinarmos o novo domínio:

$$\begin{cases} \text{Para } \tau_1 = 0 \text{ temos } y = -x \\ \text{Para } \tau_2 = 0 \text{ temos } y = x \\ \text{Para } \tau_1 = 1 \text{ temos } y = 2 - x \\ \text{Para } \tau_2 = 1 \text{ temos } y = x - 2 \end{cases} \quad (2.15)$$

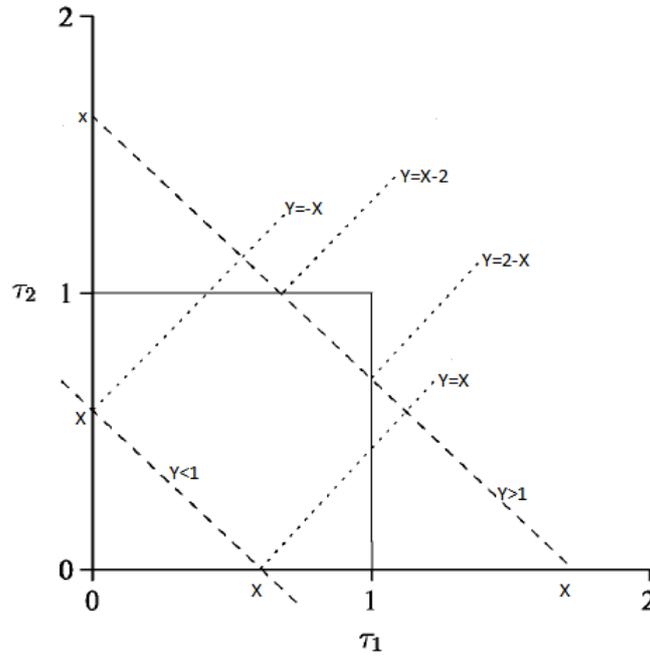


Figura 2.2 Região de integração para descobrir a distribuição $\mathcal{P}(g)$ usando 2.15.

Analisando então o novo domínio, observando para isso figura 2.2, temos logo que o novo domínio será:

- $0 \leq x \leq 1$ temos que $-x \leq y \leq x$
- $1 \leq x \leq 2$ temos que $x - 2 \leq y \leq 2 - x$

O Jacobiano da mudança de variável é

$$J = \left| \begin{bmatrix} \frac{\partial \tau_1}{\partial x} & \frac{\partial \tau_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \tau_2}{\partial x} & \frac{\partial \tau_2}{\partial y} \end{bmatrix} \right| = \frac{1}{2} \quad (2.16)$$

2.1.1.1 Distribuição da condutância para $\beta = 1$, utilizando o primeiro método

Temos que a função distribuição conjunta 2.8 e da condutância sem spin 2.11 fica respectivamente

$$P_1(\tau_1, \tau_2) = \frac{3}{4} \frac{2|y|}{\sqrt{x^2 - y^2}} \quad (2.17)$$

$$\mathcal{P}^1(g) = \frac{3}{8} \left[\int_0^1 dx \delta(g-x) \int_{-x}^x dy \frac{2|y|}{\sqrt{x^2 - y^2}} + \int_1^2 dx \delta(g-x) \int_{x-2}^{2-x} dy \frac{2|y|}{\sqrt{x^2 - y^2}} \right] \quad (2.18)$$

Para $0 \leq x \leq 1$ temos que 2.38 se torna

$$\mathcal{P}^1(g) = \frac{3}{8} \left[\int_0^1 dx \delta(g-x) \int_{-x}^x dy \frac{2|y|}{\sqrt{x^2-y^2}} + 0 \right] \quad (2.19)$$

$$\mathcal{P}^1(g) = \frac{3}{2}g \quad (2.20)$$

Para $1 \leq x \leq 2$ temos que 2.38 se torna

$$\mathcal{P}^1(g) = \frac{3}{8} \left[0 + \int_1^2 dx \delta(g-x) \int_{x-2}^{2-x} dy \frac{2|y|}{\sqrt{x^2-y^2}} \right] \quad (2.21)$$

$$\mathcal{P}^1(g) = \frac{3}{2}(g - 2\sqrt{g-1}) \quad (2.22)$$

Concluindo, temos que 2.39 e 2.40

$$\mathcal{P}^1(g) = \begin{cases} \frac{3}{2}g, & 0 \leq g \leq 1 \\ \frac{3}{2}(g - 2\sqrt{g-1}), & 1 < g \leq 2 \end{cases} \quad (2.23)$$

que esta de acordo aos resultados encontrados na literatura [36].

2.1.1.2 Distribuição da condutância para $\beta = 2$, utilizando o método de Mello e Kumar.

Então usando 2.12 a função distribuição conjunta 2.3 e a da condutância sem spin 2.11 fica respectivamente

$$P_2(\tau_1, \tau_2) = 6y^2 \quad (2.24)$$

$$\mathcal{P}^2(g) = 3 \left[\int_0^1 dx \delta(g-x) \int_{-x}^x dy y^2 + \int_1^2 dx \delta(g-x) \int_{x-2}^{2-x} dy y^2 \right] \quad (2.25)$$

Para $0 \leq x \leq 1$ temos que 2.42

$$\mathcal{P}^2(g) = 3 \left[\int_0^1 dx \delta(g-x) \int_{-x}^x dy y^2 + 0 \right] \quad (2.26)$$

$$\mathcal{P}^2(g) = 2g^3 \quad (2.27)$$

Para $1 \leq x \leq 2$ temos que 2.42

$$\mathcal{P}^2(g) = 3 \left[0 + \int_1^2 dx \delta(g-x) \int_{x-2}^{2-x} dy y^2 \right] \quad (2.28)$$

$$\mathcal{P}^2(g) = 2(2-g)^3 \quad (2.29)$$

Concluindo, temos que 2.43 e 2.44 podem ser sintetizadas como

$$\mathcal{P}^2(g) = 2(1 - |1 - g|)^3 \quad (2.30)$$

que também esta de acordo aos resultados encontrados na literatura [36].

2.1.2 Cálculo da distribuição da condutância utilizando o método da Expansão do Delta de Dirac

Para resolver a integral 2.11 iremos seguir o seguinte procedimento: primeiramente iremos expandir a função delta usando a fórmula 2.31 e a propriedade 2.1.2 do delta de dirac conhecida na literatura [47]

$$\delta(g(x)) = \sum_n \frac{\delta(x - x_n)}{|g'(x_n)|} \quad (2.31)$$

onde $g(x_n) = 0$ e $g'(x_n) \neq 0$.

$$\int_a^b dx \delta(x - x_0) \text{ com } a < b = \begin{cases} 1 & \text{se } a < x_0 < b; \\ 0 & \text{se } x_0 < a \text{ e } x_0 > b. \end{cases} \quad (2.32)$$

em seguida a partir de tal expansão iremos eliminar uma das variáveis restando apenas uma variável e por consequência uma única integral, facilitando dessa forma demasiadamente os nossos calculos. O nosso delta em questão é o da equação 2.11 que substituindo da equação 2.31 e usando 2.1.2, temos a expansão abaixo:

$$\delta(g - \tau_1 - \tau_2) = \delta(\tau_1 - (g - \tau_2)) \quad (2.33)$$

Logo substituindo a expansão 2.33 na integral 2.11 e usando 2.1.2, temos que a integral sobre o δ será igual a 1 se $0 < g - \tau_2 < 1$ porém como $0 < \tau_2 < 1$ então temos que quando $\tau_2 = 0$ temos que a condutância varia de $0 < g < 1$ e quando $\tau_2 = 1$ temos que $1 < g < 2$ logo teremos duas integrais

$$\mathcal{P}^\beta(g) = \int_0^1 \int_0^1 \delta(g - \tau_1 - \tau_2) P_\beta(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 = \quad (2.34)$$

$$\int_0^1 \int_0^1 \delta(\tau_1 - (g - \tau_2)) P_\beta(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 = \quad (2.35)$$

$$\int_{g-1}^g P_\beta(g - \tau_2, \tau_2) d\tau_2 = \quad (2.36)$$

$$\int_0^1 P_\beta(g, 0) dg + \int_1^2 P_\beta(g - 1, 1) dg \quad (2.37)$$

2.1.2.1 Distribuição da condutância para $\beta = 1$ no método expansão de Delta de Dirac.

Usando 2.36 e substituindo a função distribuição conjunta 2.8 a da condutância fica

$$\mathcal{P}^1(g) = \frac{3}{4} \frac{|g - 2\tau_2|}{\sqrt{(g - \tau_2)\tau_2}} \quad (2.38)$$

Onde utilizando para o calculo o software MAPLE13, obtemos como resultado somente a parte real que para

$g < 1$ temos que 2.38 se torna

$$\mathcal{P}^1(g) = \frac{3}{2}g \quad (2.39)$$

Para $1 \leq x \leq 2$ temos que 2.38 se torna

$$\mathcal{P}^1(g) = \frac{3}{2}(g - 2\sqrt{g-1}) \quad (2.40)$$

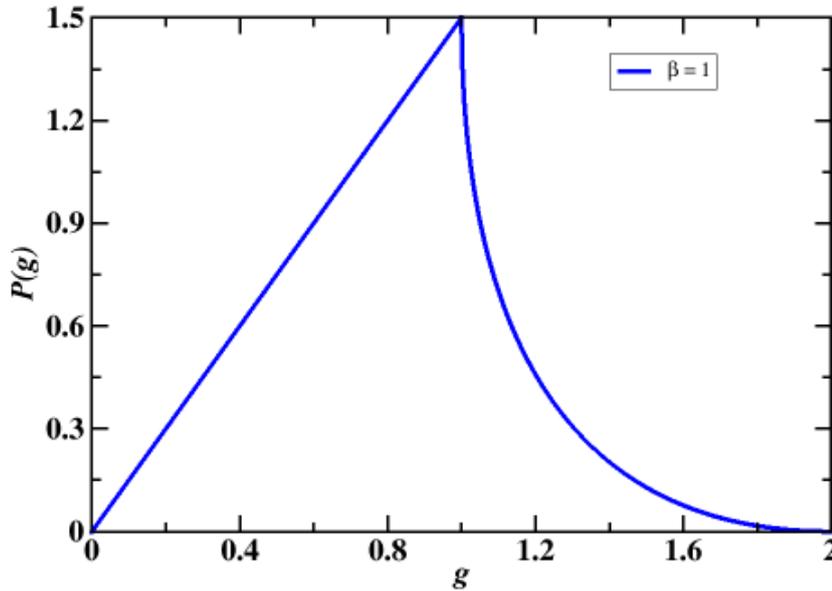


Figura 2.3 Distribuição da Condutância para $N_1 = N_2 = 2$ e $\beta = 1$ e 2, respectivamente, referentes as equações 2.39 e 2.40.

Concluindo, temos que 2.39 e 2.40

$$\mathcal{P}^1(g) = \begin{cases} \frac{3}{2}g, & g < 1 \\ \frac{3}{2}(g - 2\sqrt{g-1}), & 1 \leq g \leq 2 \end{cases} \quad (2.41)$$

que esta de acordo aos resultados encontrados na literatura [36], porém com a resolução mais direta do que o documento original [36].

2.1.2.2 Distribuição da condutância para $\beta = 2$ no método expansão de Delta de Dirac.

Então usando 2.37 e substituindo a função distribuição conjunta 2.9 a da condutância sem spin fica

$$\mathcal{P}^2(g) = 6 \left[\int_0^1 dg g^2 + 6 \int_1^2 dg (g-2)^2 \right] \quad (2.42)$$

Para $0 \leq g \leq 1$ temos que 2.42

$$\mathcal{P}^2(g) = 2g^3 \quad (2.43)$$

Para $1 \leq g \leq 2$ temos que 2.42

$$\mathcal{P}^2(g) = 2(g-2)^3 \quad (2.44)$$

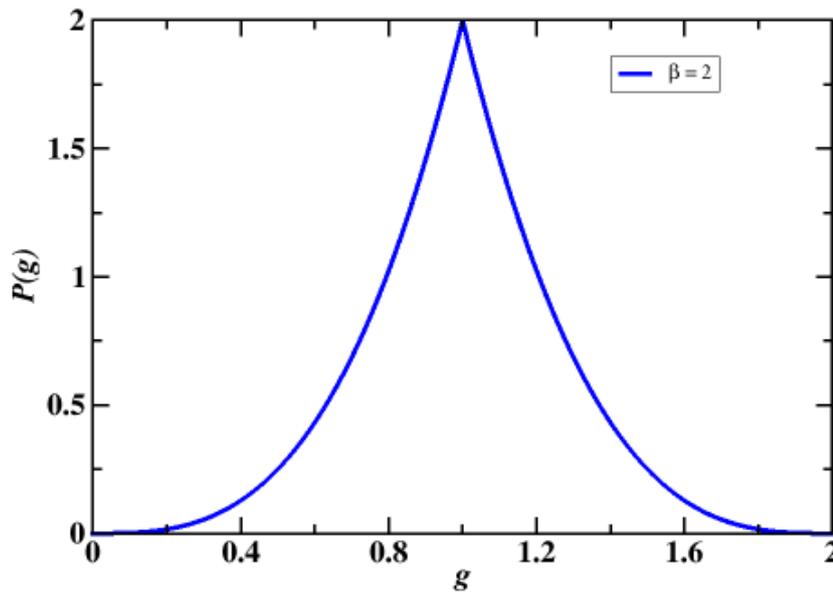


Figura 2.4 Distribuição da Condutância para $N = 2$ e $\beta = 2$, referente as equações 2.43 e 2.44.

Concluindo, temos que 2.43 e 2.44 podem ser sintetizadas como

$$\mathcal{P}^2(g) = 2(1 - |1 - g|)^3 \quad (2.45)$$

que esta de acordo aos resultados encontrados na literatura [36], porém com a resolução mais direta do que o documento original [36].

O método da expansão do delta de Dirac se mostrou muito mais eficiente no cálculo das distribuições da condutância pois conseguiu obter o resultado muito mais rapidamente e direto do que o método exposto por Mello e Kumar [36], por esse motivo as distribuições que aparecerem ao longo dessa dissertação, iremos utilizar o método da expansão do delta.

2.1.3 A média da condutância.

A média da condutância adimensional é dada pela equação

$$\frac{\langle g \rangle_{(wd)}}{g_0} = \frac{4}{3 + 2/3} \quad (2.46)$$

onde $N_1 = N_2 = 2$ e $N = N_1 + N_2 = 4$ [48].

Substituindo os valores de β na equação 2.46 temos,

$$\langle g \rangle_{(wd)} = \begin{cases} \frac{4}{5} \approx 0,800 & \text{se } \beta = 1 \\ 1 & \text{se } \beta = 2 \end{cases} \quad (2.47)$$

que esta de acordo com os resultados encontrados na literatura [48].

2.2 A Localização Fraca da Condutância

A localização fraca é dada pela equação [20]

$$\langle g \rangle_{LF(wd)} = \langle g \rangle_1 - \langle g \rangle_2 \quad (2.48)$$

então temos

$$\langle g \rangle_{LF(wd)} = -0,2 \quad (2.49)$$

que esta de acordo com os resultados encontrados na literatura [48].

2.2.1 A variância da condutância.

A variância da condutância adimensional é dada pela equação

$$\frac{\text{var}(g)_{(wd)}}{g_0^2} = \frac{8 \left(1 + \frac{2}{\beta}\right)^2}{\beta \left(2 + \frac{2}{\beta}\right) \left(3 + \frac{2}{\beta}\right)^2 \left(3 + \frac{4}{\beta}\right)} \quad (2.50)$$

onde $N_1 = N_2 = 2$ e $N = N_1 + N_2 = 4$ [48].

Substituindo os valores de β na equação 2.50 temos,

$$var(g)_{(wd)} = \begin{cases} \frac{18}{175} \approx 0,103... & \text{se } \beta = 1 \\ \frac{1}{15} \approx 0,067... & \text{se } \beta = 2 \end{cases} \quad (2.51)$$

que esta de acordo com os resultados encontrados na literatura [48].

2.3 A distribuição da Concorrência

A concorrência é definida como [19]:

$$\mathcal{P}_\beta(C) = \left\langle \delta \left[C - \frac{2\sqrt{\tau_1(1-\tau_1)\tau_2(1-\tau_2)}}{\tau_1 + \tau_2 - 2\tau_1\tau_2} \right] \right\rangle \quad (2.52)$$

onde $\langle \dots \rangle$ representa a média do Ensemble dentro da Distribuição de Probabilidade.

Assim, a produção de estados maximamente ou minimamente emaranhados, eventualmente, é determinado pelas relações de emaranhamento de formação $\epsilon(C)$ e a concorrência C .

Temos que a distribuição da Concorrência equação 2.52 pode ser escrita como

$$\mathcal{P}_\beta(C) = \int_0^1 \int_0^1 \left\langle \delta \left[C - \frac{2\sqrt{\tau_1(1-\tau_1)\tau_2(1-\tau_2)}}{\tau_1 + \tau_2 - 2\tau_1\tau_2} \right] \right\rangle P_\beta(\tau_1\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \quad (2.53)$$

Sabemos que a concorrência faz parte do mesmo ensemble da condutância, logo que a função distribuição conjunta $P_\beta(\tau_1, \tau_2)$ é a mesma utilizada na condutância de equação 2.3

2.3.1 Distribuição da Concorrência para $\beta = 1$

Para $\beta = 1$, logo temos que 2.53

$$\mathcal{P}_1(C) = \int_0^1 \int_0^1 \left\langle \delta \left[C - \frac{2\sqrt{\tau_1(1-\tau_1)\tau_2(1-\tau_2)}}{\tau_1 + \tau_2 - 2\tau_1\tau_2} \right] \right\rangle P_1(\tau_1\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \quad (2.54)$$

$$\mathcal{P}_1(C) = \int_0^1 \int_0^1 \left\langle \delta \left[C - \frac{2\sqrt{\tau_1(1-\tau_1)\tau_2(1-\tau_2)}}{\tau_1 + \tau_2 - 2\tau_1\tau_2} \right] \right\rangle \frac{3|\tau_1 - \tau_2|}{4\sqrt{\tau_1\tau_2}} d\tau_1 d\tau_2 \quad (2.55)$$

Fazendo uma mudança de variável sugerida por [49], para facilitar o cálculo das integrais

$$x = \frac{\tau_1}{1 - \tau_1} \implies \tau_1 = \frac{x}{1 + x} \quad (2.56)$$

$$y = \frac{\tau_2}{1 - \tau_2} \implies \tau_2 = \frac{y}{1 + y} \quad (2.57)$$

Depois de algumas manipulações algébricas simples, temos que a concorrência C e o fator de repulsão da função conjunta 2.3 em termos das novas variáveis se tornam

$$C = \sqrt{\frac{4xy}{(x+y)^2}} \quad (2.58)$$

e

$$|\tau_1 - \tau_2| = \left| \frac{x - y}{(1 + x)(1 + y)} \right| \quad (2.59)$$

por fim o jacobiano da mudança de variável acima é

$$\mathcal{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \tau_1}{\partial x} & \frac{\partial \tau_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \tau_2}{\partial x} & \frac{\partial \tau_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{(1 + x)^2 (1 + y)^2} \quad (2.60)$$

Logo reescrevendo a integral de distribuição da concorrência 2.55 em termos da nova variável fica

$$\mathcal{P}_1(C) = \int_0^1 \int_0^1 \delta\left(C - \frac{2\sqrt{xy}}{x+y}\right) \frac{3}{4} \left| \frac{x-y}{(1+x)(1+y)} \right| \frac{1}{\sqrt{xy}} \frac{1}{(1+x)^{3/2} (1+y)^{3/2}} dx dy \quad (2.61)$$

Para calcular esta integral, usamos primeiramente a expansão da função delta de dirac obtida em [49]

$$\delta\left(C - \frac{2\sqrt{xy}}{x+y}\right) = \frac{(K(C)+1)^2 \sqrt{K(C)}}{K(C)-1} y \delta(x - K(C)y) + \frac{(J(C)+1)^2 \sqrt{J(C)}}{1-J(C)} y \delta(x - J(C)y) \quad (2.62)$$

Sendo $K(C)$ e $J(C)$ de 2.62

$$K(C) = \frac{2 - C^2 + 2\sqrt{1 - C^2}}{C^2} \quad (2.63)$$

$$J(C) = \frac{2 - C^2 - 2\sqrt{1 - C^2}}{C^2} \quad (2.64)$$

Reescrevendo novamente a função distribuição da concorrência 2.61, para simplificar o cálculo da integral, temos que nossa função fica

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_1(C) = & \frac{3}{4} \frac{(K(C) + 1)^2}{K(C) - 1} \int_0^\infty \left| \frac{K(C)y - y}{(1 + K(C)y)(1 + y)} \right| \frac{1}{\sqrt{K(C)y^2}} \frac{1}{(1 + K(C)y)^{3/2} (1 + y)^{3/2}} dy + \\ & \frac{3}{4} \frac{(J(C) + 1)^2}{1 - J(C)} \int_0^\infty \left| \frac{J(C)y - y}{(1 + J(C)y)(1 + y)} \right| \frac{1}{\sqrt{J(C)y^2}} \frac{1}{(1 + J(C)y)^{3/2} (1 + y)^{3/2}} dy \end{aligned} \quad (2.65)$$

Vemos que as integrais são similares, calculando no software MAPLE 13, temos

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \left| \frac{K(C)y - y}{(1 + K(C)y)(1 + y)} \right| \frac{1}{\sqrt{K(C)y^2}} \frac{1}{(1 + K(C)y)^{3/2} (1 + y)^{3/2}} dy \\ & = -\frac{4}{3} \frac{\text{signum}(K(C) - 1) \left(-6K(C) - K(C)^2 - 1 + 4K(C)^{\frac{3}{2} + \sqrt{K(C)}} \right)}{K(C)^3 - 3K(C)^2 + 3K(C) - 1} \end{aligned} \quad (2.66)$$

Onde $\text{signum}(\text{sgn})$ é a função sinal que é definida da seguinte forma

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & \text{se } x < 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \\ 1, & \text{se } x > 0 \end{cases} \quad (2.67)$$

Juntando as duas integrais, estudando a função sgn para K e para J , substituindo na equação 2.65 e usando o comando `simplify` no software MAPLE 13 seguida de uma simples e longa manipulação algébrica, temos

$$\mathcal{P}_1(C) = \frac{2}{(1 + C)^2} \quad (2.68)$$

que esta de acordo com os resultados encontrados na literatura [19].

Analisando o gráfico temos que

2.3.2 Distribuição da Concorrência para $\beta = 2$

Fazendo o mesmo para $\beta = 2$ temos

$$\mathcal{P}_2(C) = \int_0^1 \int_0^1 \left\langle \delta \left[C - \frac{2\sqrt{\tau_1(1 - \tau_1)\tau_2(1 - \tau_2)}}{\tau_1 + \tau_2 - 2\tau_1\tau_2} \right] \right\rangle P_2(\tau_1\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \quad (2.69)$$

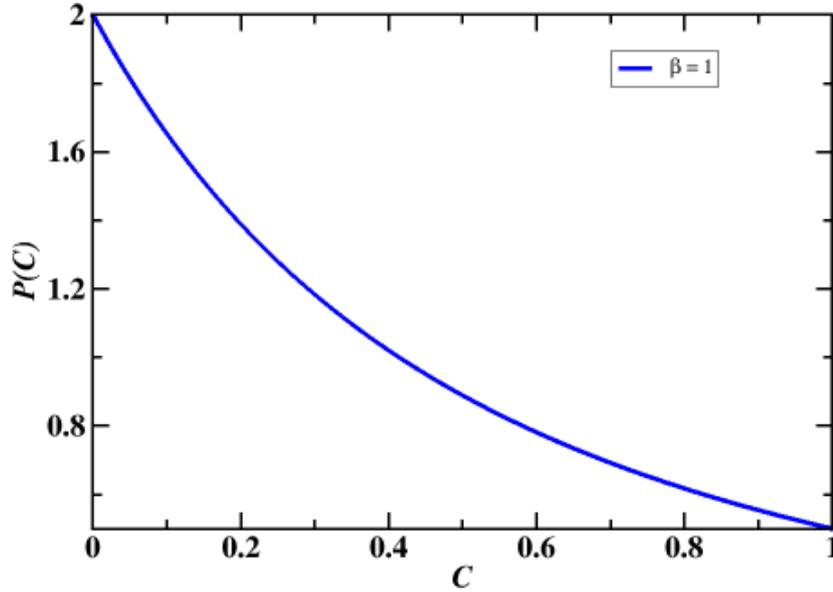


Figura 2.5 Distribuição da Concorrência em presença de TRI, ou seja, $\beta = 1$, referente a equação 2.68

$$\mathcal{P}_2(C) = \int_0^1 \int_0^1 \left\langle \delta \left[C - \frac{2\sqrt{\tau_1(1-\tau_1)\tau_2(1-\tau_2)}}{\tau_1 + \tau_2 - 2\tau_1\tau_2} \right] \right\rangle 6(\tau_1 - \tau_2)^2 d\tau_1 d\tau_2 \quad (2.70)$$

Procedendo com a mesma mudança de variável 2.56 e 2.57, temos que a integral fica

$$\mathcal{P}_2(C) = \int_0^1 \int_0^1 \delta \left(C - \frac{2\sqrt{xy}}{x+y} \right) 6 \frac{(x-y)^2}{(1+x)^4(1+y)^4} dx dy \quad (2.71)$$

Usando a mesma expansão da função delta [49] usada para o caso anterior, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_2(C) = & 6(K(C)+1)^2 \sqrt{K(C)}(K(C)-1) \int_0^\infty \frac{y^3}{(1+K(C)y)^4(1+y)^4} dy - \\ & 6(J(C)+1)^2 \sqrt{J(C)}(1-J(C)) \int_0^\infty \frac{y^3}{(1+J(C)y)^4(1+y)^4} dy \end{aligned} \quad (2.72)$$

onde observamos novamente, que as integrais que aparecem nas parcelas 2.72, são parecidas, calculando no software MAPLE 13, temos que

$$\int_0^{\infty} \frac{y^3}{(1+K(C)y)^4(1+y)^4} dy = \frac{1}{3} \frac{1}{(K(C)-1)^7} \left((11+27K(C)^2)(-1+\log K(C)+3\log K(C)+27\log K(C)(1+\log K(C))+K(C)^3(-11+3\log K(C))) \right) \quad (2.73)$$

Substituindo o valor da integral 2.73 para os casos de $K(C)$ e $J(C)$, de 2.63 e 2.64 respectivamente na equação 2.72 e simplificando no software MAPLE 13 e seguida de algumas manipulações algébricas, temos que

$$\mathcal{P}_2(C) = \frac{2C}{(1-C^2)^3} \left[3(2+3C^2) \operatorname{arctanh} \sqrt{1-C^2} - (11+4C^2) \sqrt{1-C^2} \right] \quad (2.74)$$

que esta de acordo com os resultados encontrados na literatura [19].

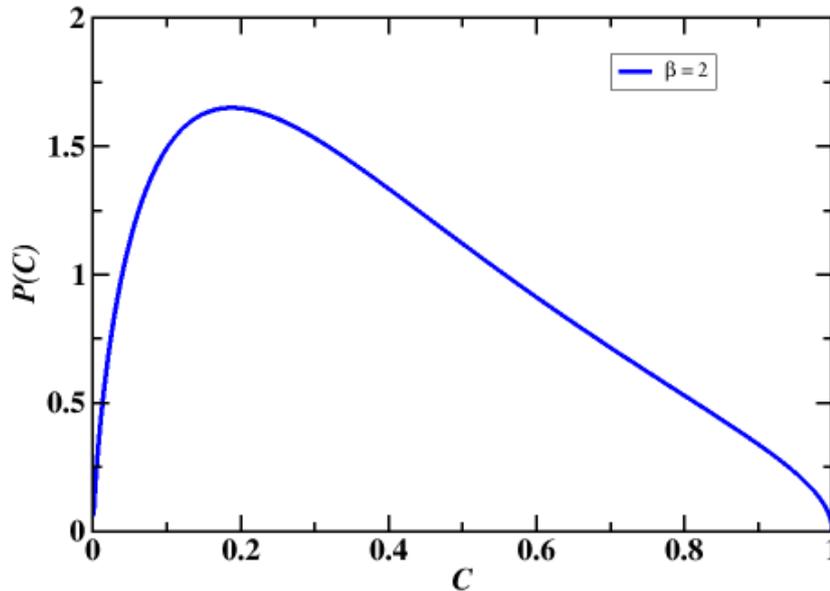


Figura 2.6 Distribuição da Concorrência quando TRI é quebrada, ou seja, $\beta = 2$ referente a 2.74.

Analisando ambos os gráficos, observamos, que as curvas $\beta = 1$ e $\beta = 2$ foram bem diferentes. A probabilidade de produzir estados maximamente emaranhados para $\beta = 1$ é finito, enquanto que tal probabilidade desaparece para $\beta = 2$. Os estados separáveis $C = 0$ são produzidos com máxima probabilidade para $\beta = 1$, considerando que para $\beta = 2$ a distribuição vai a zero para tais estados.

Sintentizando, temos que

$$\mathcal{P}^\beta(C) = \begin{cases} \frac{2}{(1+C)^2} & \text{se } \beta = 1 \\ \frac{2C}{(1-C^2)^3} \left[3(2+3C^2) \operatorname{arctanh}\sqrt{1-C^2} - (11+4C^2)\sqrt{1-C^2} \right] & \text{se } \beta = 2 \end{cases} \quad (2.75)$$

O máximo emaranhamento ($C = 1$) requer que $\tau_1 = \tau_2$. Pode-se esperar que $P_\beta(C = 1) = 0$ para ambos $\beta = 1$ e 2 devido ao fator de repulsão $|\tau_1 - \tau_2|^\beta$ presente na função distribuição conjunta $P_\beta(\tau_1, \tau_2)$. No entanto isso não é o caso para $\beta = 1$ devido a um cancelamento exato do fator de repulsão quando performado as integrais sobre τ_1 e τ_2 em $P_\beta(C)$.

2.3.3 Média e Variância da distribuição da Concorrência para $\beta = 1$ e 2

A partir das distribuições obtidas podemos calcular todos os momentos de $\mathcal{P}_\beta(C)$.

2.3.3.1 Média da distribuição da Concorrência para $\beta = 1$ e 2

A Média da distribuição da concorrência $\langle \langle C^2 \rangle - \langle C \rangle^2 \rangle$ é calculada resolvendo a seguinte integral

$$\langle C \rangle = \int_0^1 C \mathcal{P}_\beta(C) dC \quad (2.76)$$

Que resolvendo em um software de cálculo numérico como o *MAPLE13*, temos que as médias para a distribuição da concorrência

$$\langle C \rangle_{(wd)} = \begin{cases} \ln 4 - 1 \approx 0,3863 & \text{se } \beta = 1 \\ 4\pi \left[\frac{21\pi}{64} - 1 \right] \approx 0,3875 & \text{se } \beta = 2 \end{cases} \quad (2.77)$$

que esta de acordo com os resultados encontrados na literatura [19]. Observemos que os valores das médias para ambos os β não diferem muito, e so apenas a partir do quarto dígito. Isso mostra que a média é independente do fato de TRI é preservada ($\beta = 1$) ou não ($\beta = 2$).

2.4 A Localização Fraca da Concorrência

A localização fraca é

$$\langle C \rangle_{LF(wd)} = -0,0012 \approx 0 \quad (2.78)$$

2.4.0.2 Variância da distribuição da Concorrência para $\beta = 1$ e 2

A Variância da distribuição da Concorrência $var(C) = \langle \langle C^2 \rangle - \langle C \rangle^2 \rangle$ é calculada resolvendo a seguinte integral

$$\langle C^2 \rangle - \langle C \rangle^2 = \int_0^1 C^2 P_\beta(C) dC - \left(\int_0^1 C P_\beta(C) dC \right)^2 \quad (2.79)$$

Que resolvendo em um software de cálculo numérico temos que a variância para ambos os betas se resume assim

$$var(C)_{(wd)} = \begin{cases} 2[1 - 4 \ln 2] \approx 0,0782 & \text{se } \beta = 1 \\ \approx 0,0565 & \text{se } \beta = 2 \end{cases} \quad (2.80)$$

que esta de acordo com os resultados encontrados na literatura [19]. Observemos que da mesma forma como nas médias para ambos os β os valores da variância da concorrência não difere bruscamente, só a partir do terceiro dígito os números são diferentes. Isso mostra que a variância também é independente do fato de TRI é preservada ($\beta = 1$) ou não ($\beta = 2$).

2.4.1 Distribuição do Emaranhamento de formação $Q_\beta(\mathcal{E})$ para $\beta = 1$ e 2

Por [19] temos que o emaranhamento em termos da concorrência C pode ser escrito utilizando a entropia binária de Shannon

$$\mathcal{E}(C) = h(x) = -x \log_2(x) - (1-x) \log_2(1-x) \quad (2.81)$$

com $x = \frac{1 + \sqrt{1 - C^2}}{2}$

Para achar a concorrência em função do emaranhamento temos que achar a função inversa de $\mathcal{E}(C)$. Porém temos um entrave, a entropia de Shannon é uma função transcendental, logo não podemos obter expressões analíticas para $Q_\beta(\mathcal{E})$ e devemos então proceder numericamente para obter sua média e variância, para facilitar o cálculo reescrevemos a entropia de Shannon de forma a excluir os \log_2 e obtemos a seguinte expressão

$$2^{-\mathcal{E}} = x^x + (1-x)^{1-x} \quad (2.82)$$

Utilizando novamente um software de cálculo numérico podemos encontrar o valor dessa inversa. Calculando o jacobiano da transformação obtemos a relação de $Q_\beta(\mathcal{E})$ com $P_\beta C(\mathcal{E})$ através da expressão

$$Q_\beta(\mathcal{E}) = \frac{1}{C(\mathcal{E})} \frac{\ln 2 \sqrt{1 - C(\mathcal{E})^2}}{\operatorname{arctanh}[1 - C(\mathcal{E})^2]} P_\beta C(\mathcal{E}) \quad (2.83)$$

Neste caso, não podemos obter expressões analíticas para $Q_\beta(\mathcal{E})$ pois a função na entropia de Shannon é transcendental, então plotamos os gráficos correspondentes ao emaranhamento de formação para os dois parâmetros de simetria, como segue

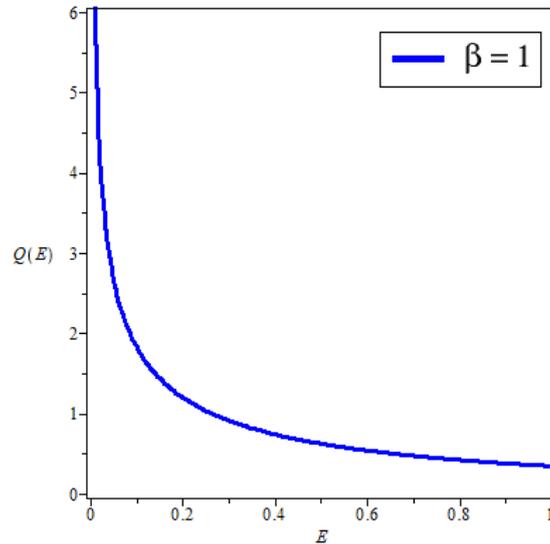


Figura 2.7 Emaranhamento de formação na presença e ausência de TRI, $\beta = 1$ retirado de [19].

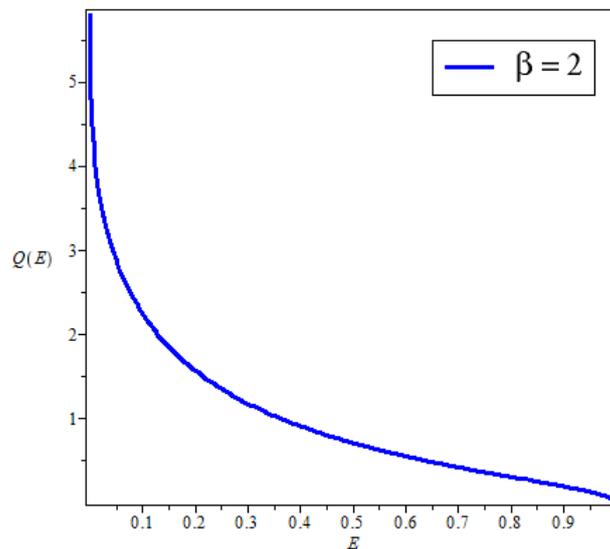


Figura 2.8 Emaranhamento de formação na presença e ausência de TRI, $\beta = 2$ retirado de [19].

que esta de acordo com os resultados encontrados na literatura [19]. A partir da equação 2.83, podemos calcular de forma numérica a média e a variância para o emaranhamento de formação para os parâmetros de simetria $\beta = 1$ e 2, respectivamente temos,

2.4.1.1 Média do Emaranhamento de Formação $Q_\beta(\mathcal{E})$

$$\langle \mathcal{E} \rangle_{(wd)} = \begin{cases} 0,285 & \text{se } \beta = 1 \\ 0,273 & \text{se } \beta = 2 \end{cases} \quad (2.84)$$

que esta de acordo com os resultados encontrados na literatura [19].

2.4.1.2 Localização Fraca do Emaranhamento de Formação $Q_\beta(\mathcal{E})$

$$\langle \mathcal{E} \rangle_{LF(wd)} = 0,012 \quad (2.85)$$

2.4.1.3 Variância do Emaranhamento de Formação $Q_\beta(\mathcal{E})$

$$var(\mathcal{E})_{(wd)} = \begin{cases} 0,078 & \text{se } \beta = 1 \\ 0,056 & \text{se } \beta = 2 \end{cases} \quad (2.86)$$

que esta de acordo com os resultados encontrados na literatura [19].

CAPÍTULO 3

PROPRIEDADE DE TRANSPORTE COM BILHAR QUÂNTICO DE SIMETRIA QUIRAL

O ensemble quiral de sistema consiste de uma cavidade com simetria de sub-rede acoplados a reservatórios de elétrons por dois guias ideais. A propagação nos guias é genérica, sem simetria de sub-rede. O capítulo está dividido da seguinte maneira: na seção 3.1 recuperamos os resultados analíticos, para o caso de dois modos propagantes apenas, das expressões para a distribuição da condutância, como também as médias e as variâncias para os parâmetro de simetria β na subseção 3.1.1 para o sistema sem quebra de simetria de reversão temporal, ou seja, $\beta = 1$ e na subseção 3.1.2 para o sistema com simetria de reversão temporal quebrada, ou seja, $\beta = 2$, e na subseção 3.1.3 os resultados da média e variância da condutância para o parâmetros de simetria igual a $\beta = 1$ e 2. Na seção 3.2 obtemos os resultados analíticos, das expressões da distribuição da concorrência, como também as médias e variância para os parâmetro de simetria $\beta = 1$, na subseção 3.2.1, e 2 na 3.2.2 e os resultados das médias e variância para os mesmos parâmetros de simetria em questão na subseção 3.2.3. Neste capítulo usamos a função densidade conjunta de probabilidade para o cálculo de observáveis de transporte em pontos quânticos com simetria quiral, tanto para a condutância quanto para a concorrência, que é obtida através do princípio de máxima entropia da distribuição de autovalores de transmissão. O procedimento é análogo ao que fizemos no capítulo 2, ou seja, utilizando a representação da matriz espalhamento S na forma polar 2.1, porém para o ensemble quiral os nossos autovalores de transmissão será $\tau_i = \text{sen}^2(2\phi_i, i = 1, \dots, N)$, como $0 \leq \tau_i \leq 1$ então temos que $0 \leq \phi_i \leq \pi/2$, temos que a representação polar de S para o ensemble quiral é dada por

$$S = \begin{pmatrix} u_1 & 0 \\ 0 & u_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\cos(2\phi) & \text{sen}(2\phi) \\ \text{sen}(2\phi) & \cos(2\phi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_3 & 0 \\ 0 & u_4 \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

como estamos interessados num ensemble de sistemas representado apenas pela matriz de espalhamento S , logo para definir uma probabilidade $P(S)$, a medida de Haar que é a medida de volume invariante para o espaço das matrizes, é dado por [50]

$$d_{\mu}^{(\beta)}(S) \propto \prod_{i < j} \prod_{\sigma = \pm} |\text{sen}(\phi_i + \sigma \phi_j)|^{\beta} \prod_{i=1}^N \text{sen}^{\alpha}(2\phi_i) \prod_{i=1}^N d\phi_i d\mu(u) d\mu(v) \quad (3.2)$$

onde β é o mesmo parâmetro de simetria de Dyson e $\alpha = \beta - 1$. Usando o princípio de máxima entropia (para mais informações ver [50]), temos que a função distribuição conjunta de probabilidade para contatos simétricos com dois canais abertos ($N_1 = N_2 = 2$) é dada por [51]

$$P_{\beta}(\phi_1, \phi_2) = C_{\beta} |\text{sen}(\phi_1 + \phi_2) \text{sen}(\phi_1 - \phi_2)|^{\beta} \text{sen}^{\beta-1}(2\phi_1) \text{sen}^{\beta-1}(2\phi_2) \quad (3.3)$$

onde a constante de normalização C_{β} dependente de β , assume os seguintes valores $C_1 = 1$ e $C_2 = 6$ que esta de acordo com [51] e $\beta = 1, 2$ são as classes de simetria. Podemos reescrever a função 3.3 utilizando a relação trigonométrica

$$\text{sen}[a+b] \text{sen}[a-b] = \frac{1}{2} (\cos(2b) - \cos(2a)) \quad (3.4)$$

onde obtemos a seguinte função mais simples para trabalharmos ao longo do capítulo

$$P_{\beta}(\phi_1, \phi_2) = C_{\beta} \left| \frac{1}{2} (\cos(2\phi_2) - \cos(2\phi_1)) \right|^{\beta} \text{sen}^{\beta-1}(2\phi_1) \text{sen}^{\beta-1}(2\phi_2) \quad (3.5)$$

3.1 Distribuição da Condutância para sistema com dois modos propagantes

Em termos da variável ϕ , a condutância para sistema com dois modos propagantes, com $0 \leq g \leq 2$ é dada por

$$g = \text{sen}^2 2\phi_1 + \text{sen}^2 2\phi_2 \quad (3.6)$$

Então temos que $0 \leq \phi_i \leq \frac{\pi}{2}$. O cálculo de distribuições é mais complexo e envolve a integral

$$\mathcal{P}^{\beta}(g) = \int_0^{\pi/2} d\phi_1 \int_0^{\pi/2} d\phi_2 \delta(g - \text{sen}^2 2\phi_1 - \text{sen}^2 2\phi_2) P_{\beta}(\phi_1, \phi_2) \quad (3.7)$$

Para resolver a integral acima 3.7 primeiramente procedemos com uma mudança de variável, em seguida expandimos o delta de Dirac obtido da mudança de variável e por fim utilizamos esta expansão para eliminarmos uma variável da integral, simplificando dessa forma a mesma para facilitar os cálculos. A mudança de variável escolhida é a seguinte

$$x = \text{sen}^2 2\phi_1 \quad (3.8)$$

$$y = \text{sen}^2 2\phi_2 \quad (3.9)$$

logo temos que

$$\phi_1 = \frac{\arcsen(\pm\sqrt{x})}{2} \quad (3.10)$$

$$\phi_2 = \frac{\arcsen(\pm\sqrt{y})}{2} \quad (3.11)$$

Então calculando o jacobiano da mudança de variável, temos

$$J = \left| \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} & \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial x} & \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \end{bmatrix} \right| = \frac{1}{16} \frac{1}{\sqrt{xy}} \frac{1}{\sqrt{(1-x)(1-y)}} \quad (3.12)$$

Logo temos que a distribuição da condutância 3.7, fica em termos da nova variável

$$\mathcal{P}^\beta(g) = C_\beta \int_0^1 dy \int_0^1 dx \delta(g-x-y) \left| \frac{1}{2}(\sqrt{1-y} - \sqrt{1-x}) \right| \frac{1}{16} \frac{\sqrt{xy}^{\beta-2}}{\sqrt{(1-x)(1-y)}} \quad (3.13)$$

Calculando a expansão do delta que aparece na expressão acima (ver apêndice B), obtemos

$$\delta(g-x-y) = \delta(x-(g-y)) \quad (3.14)$$

temos por 2.1.2 que a integral sobre o δ será igual a 1 se $0 < g-y < 1$ porém como $0 < y < 2$ então temos que quando $y=0$ temos que a condutância varia de $0 < g < 1$ e quando $y=1$ temos que $1 < g < 2$ logo teremos que 3.13 fica

$$\mathcal{P}^\beta(g) = \int_0^1 dy \int_0^1 dx \delta(x-(g-y)) \left| \frac{1}{2}(\sqrt{1-y} - \sqrt{1-x}) \right| \frac{C_\beta}{16} \frac{\sqrt{xy}^\beta}{\sqrt{(1-x)(1-y)}} \quad (3.15)$$

$$= \frac{C_\beta}{16} \int_{g-1}^g dy \left| \frac{1}{2}(\sqrt{1-y} - \sqrt{1-g+y}) \right|^\beta \frac{\sqrt{(g-y)y}^{\beta-2}}{\sqrt{(1-(g-y))(1-y)}} \quad (3.16)$$

$$= \frac{C_\beta}{16} \left[\int_0^1 dg \left| \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1-g}) \right|^\beta \frac{\sqrt{0}^{\beta-2}}{\sqrt{(1-g)}} + \int_1^2 dg \left| \frac{1}{2}(\sqrt{2-g}) \right|^\beta \frac{\sqrt{(g-1)}^{\beta-2}}{\sqrt{(2-g)(0)}} \right] \quad (3.17)$$

3.1.1 Resultados para a condutância com parâmetro de simetria $\beta = 1$

Substituindo $\beta = 1$ na equação 3.16 e tomando o valor da contante dada em [51] e mencionada anteriormente como $C_1 = 1$, temos que a distribuição da condutância é dada por

$$\mathcal{P}^1(g) = \frac{1}{16} \int_{g-1}^g dy \left| \frac{1}{2}(\sqrt{1-y} - \sqrt{1-g+y}) \right| \frac{1}{\sqrt{((g-y)y)(1-(g-y))(1-y)}} \quad (3.18)$$

Onde utilizando para o calculo da integral 3.18 o software MAPLE13, obtemos como resultado somente a parte real

$$\mathcal{P}^1(g) = \begin{cases} \frac{1}{4\sqrt{g}} \left[\sqrt{g}F\left(\frac{1}{\sqrt{g}}, \sqrt{g}\right) - 2iK\left(\frac{\sqrt{g-1}}{g}\right) - \sqrt{g}F\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{g}\right) + iF\left(\frac{\sqrt{2g}}{2\sqrt{g-1}}, \frac{\sqrt{g-1}}{\sqrt{(g-1)g}}\right) \right] & 0 \leq g \leq 1 \\ -\frac{1}{4\sqrt{g}} \left[\sqrt{g}F\left(\frac{1}{\sqrt{g}}, \sqrt{g}\right) + 2iK\left(\frac{\sqrt{g-1}}{\sqrt{g}}\right) - \sqrt{g}F\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{g}\right) - 2iF\left(\frac{\sqrt{2g}}{2\sqrt{g-1}}, \frac{1\sqrt{g-1}}{\sqrt{(g-1)g}}\right) - iF\left(\frac{\sqrt{2g}}{2\sqrt{1-g}}, \frac{\sqrt{g-1}}{\sqrt{g}}\right) \right] & 1 < g \leq 2 \end{cases} \quad (3.19)$$

onde $K(K)$ é a integral elíptica completa do primeiro tipo definida como $K(K) = F(1, K)$ que por sua vez é a integral elíptica incompleta do primeiro tipo definida como $F(x, K) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{(1-t^2)(1-K^2t^2)}} dt$. Este resultado está de acordo com o encontrado na literatura [51].

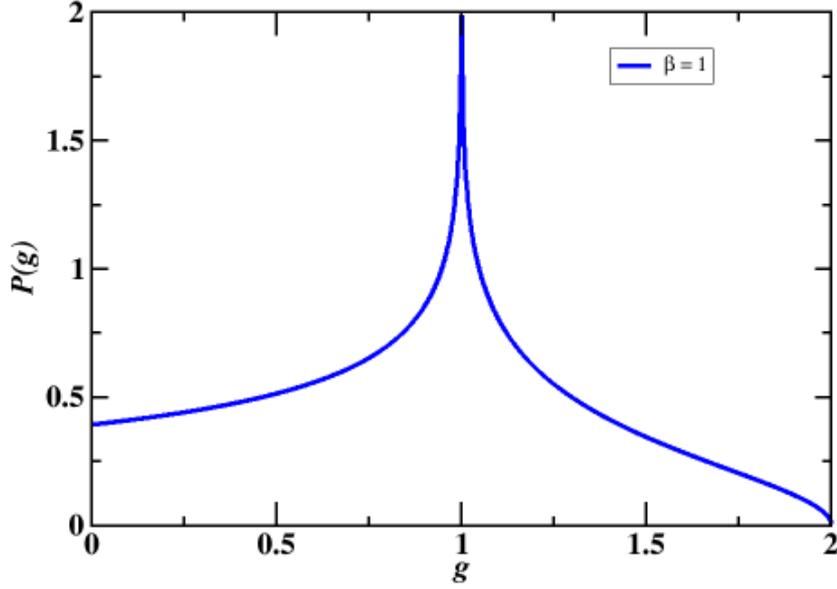


Figura 3.1 Distribuição da condutância para pontos quirais para o caso $\beta = 1$, obtido da equação 3.19.

3.1.2 Resultados para a condutância com parâmetro de simetria $\beta = 2$

Substituindo $\beta = 2$ na equação 3.16 e tomando o valor da contante dada em [51] e mencionada anteriormente como $C_1 = 6$, temos que a distribuição da condutância é dada por

$$\mathcal{P}^2(g) = \frac{3}{8} \int_{g-1}^g dy \left| \frac{1}{2}(\sqrt{1-y} - \sqrt{1-g+y}) \right|^2 \frac{1}{\sqrt{(1-(g-y))(1-y)}} \quad (3.20)$$

Onde utilizando para o calculo da integral 3.20 o software MAPLE13, obtemos como resultado somente a parte real

$$\mathcal{P}^2(g) = \begin{cases} \frac{3}{4}(g-2)ArcSin(\frac{g}{g-2}) & 0 \leq g \leq 1 \\ \frac{3\pi}{2}(2-g) & 1 < g \leq 2 \end{cases} \quad (3.21)$$

Este resultado está de acordo com o encontrado na literatura [51].

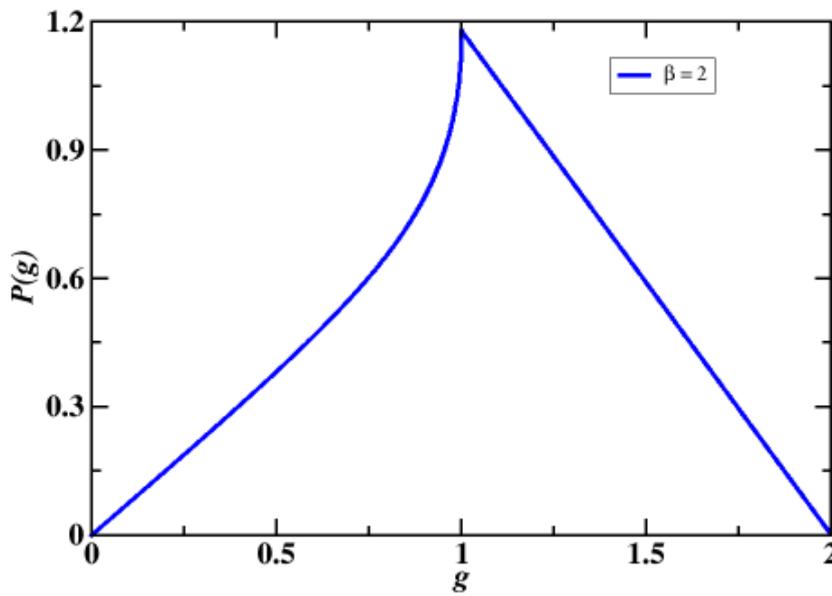


Figura 3.2 Distribuição da condutância para pontos quirais para o caso $\beta = 2$, obtido por meio da equação 3.21.

3.1.3 Média

A partir da equação da média da condutância para o ensemble quiral [51]

$$\langle g \rangle_{(ch)} = \frac{8\beta}{3+6\beta} \quad (3.22)$$

obtemos que a média para os dois parâmetros de simetria de Dyson trabalhados ao longo desse trabalho, $\beta = 1$ e 2 , são respectivamente

$$\langle g \rangle_{(ch)} = \begin{cases} \frac{8}{9} \approx 0,889 & \text{se } \beta = 1 \\ \frac{16}{15} \approx 1,067 & \text{se } \beta = 2 \end{cases} \quad (3.23)$$

Este resultado está de acordo com o encontrado na literatura [51].

3.1.4 A Localização Fraca da Condutância

A localização fraca é

$$\langle g \rangle_{LF(ch)} = -0,178 \quad (3.24)$$

3.1.5 A variância da condutância.

A variância da condutância adimensional é

$$\text{var}(g)_{(ch)} = \begin{cases} \frac{416}{1233} \approx 0,337... & \text{se } \beta = 1 \\ \frac{248}{1575} \approx 0,157... & \text{se } \beta = 2 \end{cases} \quad (3.25)$$

3.2 Distribuição da Concorrência simetria quiral

Usaremos a mesma definição de concorrência do capítulo anterior da equação 2.52, so que considerando dessa vez a simetria quiral, isto é, os autovalores de transmissão τ_1 e τ_2 tomarão os seguintes valores de $\tau_i = \sin^2(2\phi_i)$ com $0 \leq \phi_i \leq \frac{\pi}{2}$ e $i = 1, 2$

Logo temos que a distribuição da concorrência com simetria quiral é dada por

$$\mathcal{P}^\beta(C) = \int_0^1 \int_0^1 \delta\left(C - \frac{2\sqrt{\tan^2(2\phi_1)\tan^2(2\phi_2)}}{\tan^2(2\phi_1) + \tan^2(2\phi_2)}\right) P(\phi_1, \phi_2) d\phi_1 d\phi_2 \quad (3.26)$$

A função distribuição é dada pela equação 3.5 que reescrevemos como segue

$$P_\beta(\phi_1, \phi_2) = C_\beta \frac{1}{4} |\cos(2\phi_2) - \cos(2\phi_1)|^\beta \sin^{\beta-1}(2\phi_1) \sin^{\beta-1}(2\phi_2) \quad (3.27)$$

Usaremos aqui a mesma mudança de variável sugerida em [49] que é 2.56 e 2.57 com a alteração de τ_1 e τ_2 para $\sin^2(2\phi_1)$ e $\sin^2(2\phi_2)$ respectivamente como segue

$$x = \frac{\tau_1}{1 - \tau_1} \quad (3.28)$$

$$x = \frac{\sin^2(2\phi_1)}{1 - \sin^2(2\phi_1)} \quad (3.29)$$

$$x = \frac{\sin^2(2\phi_1)}{\cos^2(2\phi_1)} = \tan^2(2\phi_1) \quad (3.30)$$

Analogamente

$$y = \tan^2(2\phi_2) \quad (3.31)$$

Agora calculando em termos da nova variável isolamos os ϕ e concluímos que

$$\phi_1 = \frac{\sqrt{x}}{2} \quad (3.32)$$

$$\phi_2 = \frac{\sqrt{y}}{2} \quad (3.33)$$

então

$$\sin(2\phi_1) = \pm \sqrt{\frac{x}{1+x}} \quad (3.34)$$

$$\sin(2\phi_2) = \pm \sqrt{\frac{y}{1+y}} \quad (3.35)$$

$$\cos(2\phi_1) = \pm \frac{1}{\sqrt{1+x}} \quad (3.36)$$

$$\cos(2\phi_2) = \pm \frac{1}{\sqrt{1+y}} \quad (3.37)$$

Dessa forma a função distribuição 3.27 em termos da variável x e y , fica escrita

$$P_\beta(x, y) = C_\beta \left| \frac{1}{2} \left(\pm \frac{1}{\sqrt{1+y}} \mp \frac{1}{\sqrt{1+x}} \right) \right|^\beta (\pm \sqrt{\frac{x}{1+x}})^{\beta-1} (\pm \sqrt{\frac{y}{1+y}})^{\beta-1} \quad (3.38)$$

Calculando o jacobiano da mudança de variável

$$J = \left| \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} & \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial x} & \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \end{bmatrix} \right| = \frac{1}{16} \frac{1}{\sqrt{xy}} \frac{1}{1+x} \frac{1}{1+y} \quad (3.39)$$

Logo temos que a distribuição da concorrência com simetria quiral 3.26 em termos da nova variável x e y fica escrita como

$$\mathcal{P}^\beta(C) = C_\beta \int_0^\infty \int_0^\infty \delta(C - \frac{2\sqrt{xy}}{x+y}) P_\beta(x, y) \frac{1}{16} \frac{1}{\sqrt{xy}} \frac{1}{1+x} \frac{1}{1+y} dx dy \quad (3.40)$$

3.2.1 Concorrência com simetria quiral para $\beta = 1$

Temos que a constante de normalização para $\beta = 1$ é $C_1 = 1$, dessa forma a função distribuição 3.38 fica

$$P_1(x, y) = \frac{1}{2} \left| \pm \frac{1}{\sqrt{(1+y)}} \mp \frac{1}{\sqrt{(1+x)}} \right| \quad (3.41)$$

Então a distribuição da concorrência 3.40 é

$$\mathcal{P}_1(C) = \int_0^\infty \int_0^\infty \delta\left(C - \frac{2\sqrt{xy}}{x+y}\right) \frac{1}{32} \left(\pm \frac{1}{\sqrt{(1+y)}} \mp \frac{1}{\sqrt{(1+x)}} \right)^2 \frac{1}{\sqrt{xy}} \frac{1}{(1+x)} \frac{1}{(1+y)} dx dy \quad (3.42)$$

onde usamos semelhantemente ao do capítulo 2 a expansão delta de dirac descrita em [49] e temos então que 3.42 fica mais simplificada como

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_1(C) = & \frac{(K(C)+1)^2}{K-1} \frac{1}{32} \int_0^\infty \left| \frac{1}{\sqrt{(1+y)}} \pm \frac{1}{\sqrt{(1+K(C)y)}} \right| \frac{1}{(1+K(C)y)} \frac{1}{(1+y)} dy \\ & + \frac{(J(C)+1)^2}{1-J(C)} \frac{1}{32} \int_0^\infty \left| \frac{1}{\sqrt{(1+y)}} \pm \frac{1}{\sqrt{(1+J(C)y)}} \right| \frac{1}{(1+J(C)y)} \frac{1}{(1+y)} dy \end{aligned} \quad (3.43)$$

Observamos que nossa integral se transformou em duas integrais similares sendo uma em termos de $K(C)$ e outra em termos de $J(C)$ se tornaram muito mais simples, basta apenas resolver uma delas utilizando o software *MAPLE13* para calcular a integral acima, obtemos como resultado

$$\int_0^\infty \left| \frac{1}{\sqrt{(1+y)}} \pm \frac{1}{\sqrt{(1+K(C)y)}} \right| \frac{1}{(1+K(C)y)} \frac{1}{(1+y)} dy = \quad (3.44)$$

$$= \frac{4 \left(2K(C) \left[\frac{\sqrt{K(C)}}{\sqrt{K(C)-1}} \right] - 2\sqrt{K(C)}\sqrt{K(C)-1} + (C) \left[\frac{1}{\sqrt{K(C)-1}} \pi \right] \right)}{(K(C)-1)^{3/2}\sqrt{K(C)}} \quad (3.45)$$

que substituindo na 3.43 para o caso de $K(C)$ e substituindo este mesmo resultado no lugar de $K(C)$ por $J(C)$, e os valores de $K(C)$ e $J(C)$ da expansão da função delta dada

pelos 2.63 e 2.64, e utilizando o mesmo software anterior para simplificar, seguida de uma breve manipulação algébrica usando para eliminar a parte imaginária da fórmula fechada a relação trigonométrica $\operatorname{arctanh}(x) = -\frac{i\pi}{2} + \operatorname{arccotanh}(\frac{1}{x})$ e $\operatorname{arctanh}(x) = \operatorname{arccotan}(\frac{1}{x})$, temos que a função distribuição da concorrência 3.43 fica

$$\mathcal{P}_1(C) = \frac{1}{2} \frac{1}{1-C^2} \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 + \frac{\sqrt{1-C^2}}{1-C^2} \operatorname{arccoth} \left[\sqrt{1 + \frac{C^2}{2(1-C^2)(1 + \frac{\sqrt{1-C^2}}{1-C^2})}} \right]} - 1 \right\} \quad (3.46)$$

que esta de acordo com a simulação numérica realizada e descritas em [52] e baseadas em [53]. A representação gráfica da distribuição é a seguinte

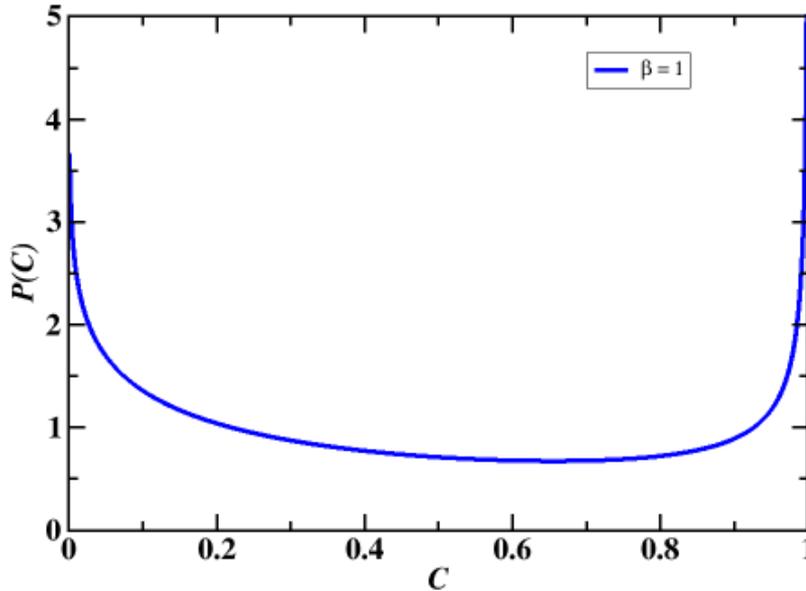


Figura 3.3 Distribuição da concorrência para pontos quirais para o caso $\beta = 1$, obtidas da equação 3.46.

3.2.2 Concorrência com simetria quiral para $\beta = 2$

Temos que a constante de normalização para $\beta = 2$ é $C_2 = 6$, dessa forma a função distribuição 3.38 fica

$$P_2(x, y) = \frac{1}{4} \left(\pm \frac{1}{\sqrt{(1+y)}} \mp \frac{1}{\sqrt{(1+x)}} \right)^2 \left(\pm \sqrt{\frac{x}{(1+x)}} \right) \left(\pm \sqrt{\frac{y}{(1+y)}} \right) \quad (3.47)$$

Então a distribuição da concorrência de equação 3.40 para este parâmetro de simetria $\beta = 2$ é

$$\mathcal{P}_2(C) = \int_0^\infty \int_0^\infty \delta\left(C - \frac{2\sqrt{xy}}{x+y}\right) \frac{3}{32} \left(\pm \frac{1}{\sqrt{(1+y)}} \mp \frac{1}{\sqrt{(1+x)}} \right)^2 \times \frac{y}{(1+x)^{3/2}} \frac{1}{(1+y)^{3/2}} dx dy \quad (3.48)$$

onde usamos novamente a expansão delta de dirac descrita em [49] para eliminarmos a integral em termos de x, temos então que 3.48 fica mais simplificadamente escrita como

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_2(C) = & \frac{(K(C)+1)^2}{K(C)-1} \sqrt{K(C)} \frac{3}{32} \int_0^\infty \left(\frac{1}{\sqrt{(1+y)}} \pm \frac{1}{\sqrt{(1+K(C)y)}} \right)^2 \\ & \times \frac{1}{(1+K(C)y)^{3/2}} \frac{1}{(1+y)^{3/2}} dy + \\ & + \frac{(J(C)+1)^2}{1-J(C)} \sqrt{J(C)} \frac{3}{32} \int_0^\infty \left(\frac{1}{\sqrt{(1+y)}} \pm \frac{1}{\sqrt{(1+J(C)y)}} \right)^2 \\ & \times \frac{1}{(1+J(C)y)^{3/2}} \frac{1}{(1+y)^{3/2}} dy \end{aligned} \quad (3.49)$$

Observamos que nossa integral se transformou em duas integrais similares sendo uma em termos de $K(C)$ e outra em termos de $J(C)$ se tornaram muito mais simples, basta apenas resolver uma delas Utilizando o software *MAPLE13* para calcular a integral acima, obtemos como resultado

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{\sqrt{(1+y)}} \pm \frac{1}{\sqrt{(1+K(C)y)}} \right)^2 \frac{1}{(1+K(C)y)^{3/2}} \frac{1}{(1+y)^{3/2}} dy = \quad (3.50)$$

$$= -\frac{16}{3} \frac{-K(C) + 2\sqrt{K(C)} - 1}{\sqrt{K(C)}(1 - 2K(C) + K(C)^2)} \quad (3.51)$$

que substituindo na 3.49 para o caso de $K(C)$ e substituindo este mesmo resultado no lugar de $K(C)$ por $J(C)$, e os valores de $K(C)$ e $J(C)$ da expansão da função delta dada pelas 2.63 e 2.64, e utilizando o mesmo software anterior para simplificar, seguida de uma breve manipulação algébrica, temos que a função distribuição da concorrência 3.49 fica

$$\mathcal{P}_2(C) = \frac{\sqrt{1-C^2}}{(1+C)(1-C^2)} \quad (3.52)$$

que esta de acordo com a simulação numérica realizada pelo meu orientador. A representação gráfica da distribuição é a seguinte

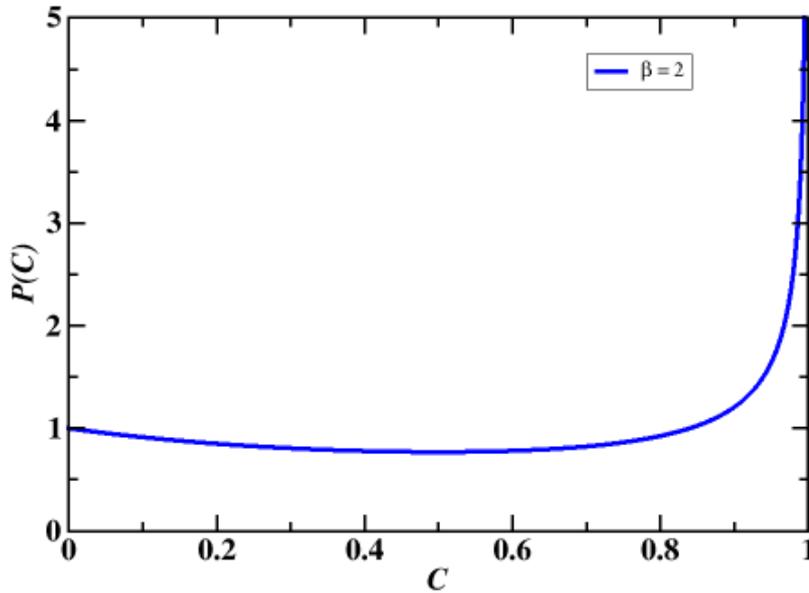


Figura 3.4 Distribuição da concorrência para pontos quirais para o caso $\beta = 2$, obtidas a partir das equações 3.52.

Observamos nos gráficos da distribuição da concorrência para $\beta = 1$ e 2, que a maior característica para a simetria quiral é que existe mais probabilidade de encontrar o sistema nos estados maximamente emaranhados $C = 1$ do que na simetria de Wigner-Dyson. No entanto, quando o sistema preservar TRS, a probabilidade de encontrar o sistema nos estados separáveis $C = 0$ aumenta significativamente, como pode visto na fig 3.3.

3.3 Média da distribuição da Concorrência para $\beta = 1$ e 2

Utilizando as distribuições 3.46 e 3.52 podemos calcular a média para ambos os parâmetros de simetria, e obtemos respectivamente

$$\langle C \rangle_{(ch)} = \begin{cases} 0,4675 & \text{se } \beta = 1 \\ 0,5708 & \text{se } \beta = 2 \end{cases} \quad (3.53)$$

3.4 A Localização Fraca da Concorrência

A localização fraca é

$$\langle C \rangle_{LF(ch)} = -0,1033 \quad (3.54)$$

3.4.0.1 Variância da distribuição da Concorrência para $\beta = 1$ e 2

Utilizando as distribuições 3.46 e 3.52 podemos calcular a variância para ambos os parâmetros de simetria, e obtemos respectivamente

$$\text{var}(C)_{(ch)} = \begin{cases} 0,1117 & \text{se } \beta = 1 \\ 0,1034 & \text{se } \beta = 2 \end{cases} \quad (3.55)$$

3.5 Emaranhamento de Formação para o bilhar de Dirac

Análogo ao que fizemos no capítulo anterior utilizando novamente as distribuições 3.46 e 3.52 podemos obter o emaranhamento de formação $Q_\beta(\mathcal{E})$, primeiramente calculando a expressão inversa da entropia de Shannon do capítulo 1, em seguida calculando o jacobiano da mudança de variável para $C(\mathcal{E})$, temos que o emaranhamento de formação é dado por

$$Q_\beta(\mathcal{E}) = \frac{1}{C(\mathcal{E})} \frac{\ln 2 \sqrt{1 - C(\mathcal{E})^2}}{\text{arctanh}[1 - C(\mathcal{E})^2]} P_\beta C(\mathcal{E}) \quad (3.56)$$

Neste caso, novamente como no caso da simetria Wigner Dyson, não podemos obter expressões analíticas para $Q_\beta(\mathcal{E})$ pois a função na entropia de Shannon é transcendental, então plotamos os gráficos correspondentes ao emaranhamento de formação para os dois parâmetros de simetria, como segue

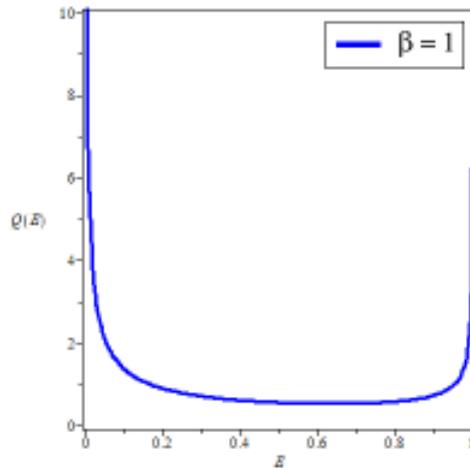


Figura 3.5 Emaranhamento de Formação para pontos quirais para o caso $\beta = 1$.

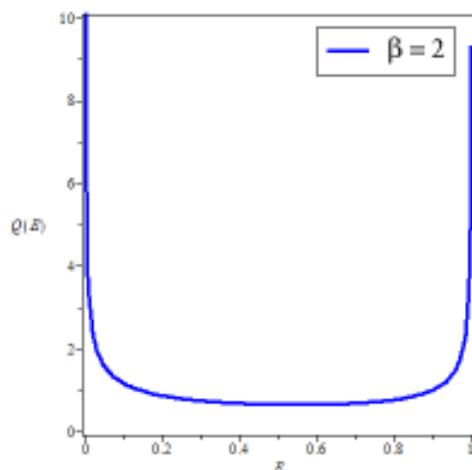


Figura 3.6 Emaranhamento de Formação para pontos quirais para o caso $\beta = 2$.

3.5.1 Simulação Numérica

Os resultados obtidos, com o bilhar de Dirac, na distribuição da concorrência $\mathcal{P}_\beta(C)$ em 3.46 e 3.52 e Emaranhamento de formação $Q_\beta(\mathcal{E})$ em 3.56, ambos para $\beta = 1$ e $\beta = 2$, foram comprovadas através de simulação numérica feita em [52], com o método descrito em [53]. Podemos observá-las a seguir

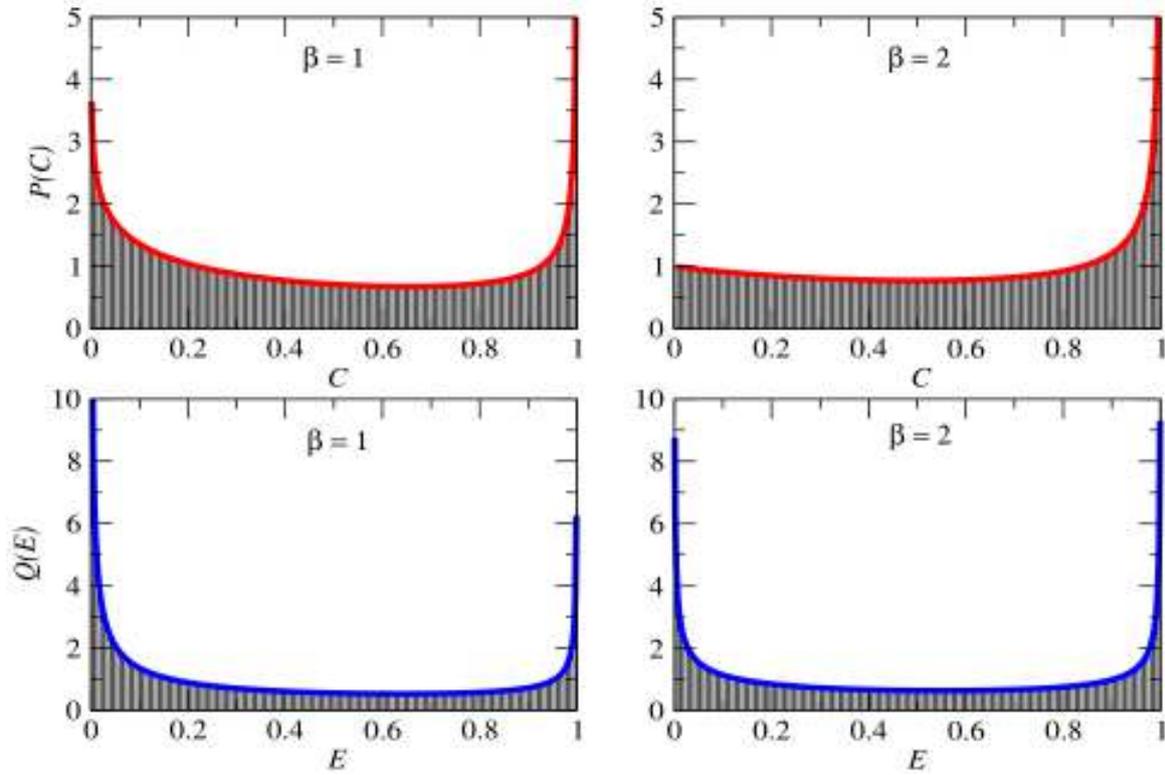


Figura 3.7 Simulação numérica feita para comprovar os resultados obtidos [52], com o bilhar de Dirac, na distribuição da concorrência e Emaranhamento de formação, ambos para $\beta = 1$ e $\beta = 2$

A partir da equação 3.56, podemos calcular de forma numérica a média e a variância para o emaranhamento de formação para os parâmetros de simetria $\beta = 1$ e 2 , respectivamente temos,

3.5.1.1 Média do Emaranhamento de Formação $Q_\beta(\mathcal{E})$

$$\langle \mathcal{E} \rangle_{(ch)} = \begin{cases} 0,382 & \text{se } \beta = 1 \\ 0,485 & \text{se } \beta = 2 \end{cases} \quad (3.57)$$

3.5.1.2 Localização Fraca do Emaranhamento de Formação $Q_\beta(\mathcal{E})$

$$\langle \mathcal{E} \rangle_{LF(ch)} = -0,103 \quad (3.58)$$

3.5.1.3 Variância do Emaranhamento de Formação $Q_\beta(\mathcal{E})$

$$var(\mathcal{E})_{(ch)} = \begin{cases} 0,121 & \text{se } \beta = 1 \\ 0,122 & \text{se } \beta = 2 \end{cases} \quad (3.59)$$

Neste trabalho obtemos resultados analíticos para as distribuições da concorrência e do emaranhamento de formação no bilhar de Dirac caótico para os parâmetros de simetria considerando a presença ($\beta = 1$) e a ausência ($\beta = 2$) de simetria de reversão temporal (SRT). Ambos somente para o caso de dois canais abertos ($N = 2$). Obtemos as médias, localizações fracas e variâncias de ambas as distribuições citadas anteriormente. Ao compararmos os valores das medidas das médias, localizações fracas e variâncias no caso do bilhar de Dirac com as medidas obtidas no bilhar de Schrödinger, vemos que o mesmo tem uma probabilidade maior de estados separáveis enquanto para o bilhar de Dirac esse resultado difere, tendo situações em que a probabilidade é maior para o estado de Bell, ou seja, maximamente emaranhados. A localização fraca em ambos os casos é praticamente zero, diferente da localização fraca de outro observável como a condutância em que tem um valor considerável.

Com base no trabalho desenvolvido, diversas vertentes de trabalhos futuros podem ocasionar novas pesquisas como o estudo tanto das distribuições da concorrência quanto do emaranhamento de formação para o bilhar quântico com simetria Altland-Zinbauer, a quebra de coerência de fase no emaranhamento (tempo de relaxação) ou até mesmo poderíamos utilizar barreira de tunelamento nos guias de onda.

Demonstração. Tomemos um sistema composto particionado em dois subsistemas, os quais se encontram com Alice e Bob. Ambos possuem aparatos capazes de medir as variáveis A e B . Estas variáveis podem assumir apenas dois valores: ± 1 .

Alice e Bob podem ajustar da maneira que lhe convier as configurações de seus instrumentos de medida. Para spin $-\frac{1}{2}$ estas configurações correspondem a possíveis orientações de um campo magnético não homogêneo. Para medidas de polarização de fótons, estas correspondem às orientações dos polarizadores. Chamemos de a a orientação do aparato de medida com Alice e de b a orientação do aparato de Bob.

Vamos supor que o resultado de qualquer medida depende das possíveis orientações (parâmetros controláveis) e de um número qualquer de parâmetros incontroláveis, seja porque não desenvolvemos técnicas experimentais para controlá-los ou seja porque a natureza proíbe seu controle. Representemos o conjunto desses parâmetros por λ . Dessa forma, podemos especificar os resultados das medidas feitas por Alice e por Bob pelas funções abaixo, as quais podem assumir apenas valores ± 1 :

$$A(a, b, \lambda) = \pm 1 \tag{A.1}$$

$$B(a, b, \lambda) = \pm 1 \tag{A.2}$$

Agora, lançando mão da hipótese de *localidade*, o resultado da medida feita por Alice não pode depender da orientação escolhida por Bob. Analogamente o resultado da medida feita por Bob não pode depender da orientação escolhida por Alice. Assim sendo,

$$A(a, b, \lambda) \rightarrow A(a, \lambda) \tag{A.3}$$

$$B(a, b, \lambda) \rightarrow B(b, \lambda) \tag{A.4}$$

Para obtermos previsões quantitativas deste hipótese de localidade, precisamos estudar as correlações entre os resultados das medidas de Alice e de Bob. Para cada par de partículas produzido, λ pode assumir qualquer valor. Definimos, pois, a função correlação abaixo,

$$P(a, b) = \int A(a, \lambda)B(b, \lambda)\rho(\lambda)d\lambda \tag{A.5}$$

onde $\rho(\lambda)$ é uma distribuição de probabilidade que representa os possíveis valores para o parâmetro incontrolável ρ . Por ser uma distribuição de probabilidade, $\rho(\lambda) \geq 0$ e $\int \rho(\lambda) d\rho = 1$.

Consideremos um cenário onde Alice e Bob realiza suas medidas em duas possíveis orientações, a e a' , escolhendo aleatoriamente para cada medida uma dessas duas orientações. Bob também procede da mesma forma, orientando seu aparelho de medida ora na direção de b e ora na direção de b' . Dessa forma, temos quatro funções de correlação, as quais devem satisfazer a desigualdade abaixo

$$\begin{aligned}
P(a, b) - P(a, b') &= \int A(a, \lambda)B(b, \lambda)\rho(\lambda)d\lambda - \int A(a, \lambda)B(b', \lambda)\rho(\lambda)d\lambda \\
&= \int A(a, \lambda)B(b, \lambda)\rho(\lambda)d\lambda - \int A(a, \lambda)B(b', \lambda)\rho(\lambda)d\lambda \\
&\quad - \int A(a, \lambda)B(b, \lambda)A(a', \lambda)B(b', \lambda)\rho(\lambda)d\lambda \\
&\quad + \int A(a, \lambda)B(b, \lambda)A(a', \lambda)B(b', \lambda)\rho(\lambda)d\lambda \\
&= \int A(a, \lambda)B(b, \lambda)[1 - A(a', \lambda)B(b', \lambda)]\rho(\lambda)d\lambda \\
&\quad - \int A(a, \lambda)B(b', \lambda)[1 - A(a', \lambda)B(b, \lambda)]\rho(\lambda)d\lambda \tag{A.6}
\end{aligned}$$

Agora, como as funções A e B são no máximo iguais a unidade, quaisquer produtos dessas funções também atingem no máximo a unidade. Dessa forma, um limitante superior para o módulo do lado esquerdo da equação anterior é

$$\begin{aligned}
|P(a, b) - P(a, b')| &\leq \int [1 - A(a', \lambda)B(b', \lambda)]\rho(\lambda)d\lambda \\
&\quad + \int [1 - A(a', \lambda)B(b, \lambda)]\rho(\lambda)d\lambda \\
&\leq 2 - P(a', b') - P(a', b) \tag{A.7}
\end{aligned}$$

Rearranjando a expressão anterior,

$$S = |P(a, b) - P(a, b')| + P(a', b') - P(a', b) \leq 2 \tag{A.8}$$

Assim, se um sistema composto viola a desigualdade acima, $S > 2$, dizemos que ele não satisfaz a hipótese de localidade de Bell.

■

EXPANSÃO DELTA DE DIRAC

Vimos que ao longo dos capítulos 2 e 3 quando analisamos a concorrência, utilizamos uma expansão delta de Dirac encontrada em [49] que foi muito útil para o cálculo de integrais de delta de Dirac que surgem no cálculo da função distribuição. Aqui iremos fazer a demonstração de como foi obtida tal expansão.

Utilizaremos para isso, a expansão de delta de Dirac já conhecida na literatura [47], que é definida como

$$\delta(g(x)) = \sum_n \frac{\delta(x - x_n)}{|g'(x_n)|} \quad (\text{B.1})$$

onde $g(x_n) = 0$ e $g'(x_n) \neq 0$.

Partindo de B.1 iremos moldando com a concorrência, que é definida em 2.52 e a sua função distribuição é 2.53, depois das mudanças de variáveis 2.56 e 2.57, obtemos a concorrência 2.58 e a distribuição da concorrência é dada por

$$\mathcal{P}^\beta(C) = \left\langle \delta \left(C - \sqrt{\frac{4xy}{(x+y)^2}} \right) \right\rangle \quad (\text{B.2})$$

que é o delta que expandimos nos capítulos 2 e 3 e que iremos demonstrar.

Demonstração. Seja o delta definido como

$$\delta \left(C - \sqrt{\frac{4xy}{(x+y)^2}} \right) \quad (\text{B.3})$$

Temos dentro do delta a função:

$$f(x, y) = C - \sqrt{\frac{4xy}{(x+y)^2}} \quad (\text{B.4})$$

Igualando a zero para acharmos as raízes da função B.4 , temos

$$C - \sqrt{\frac{4xy}{(x+y)^2}} = 0 \quad (\text{B.5})$$

$$xC + yC - 2\sqrt{xy} = 0 \quad (\text{B.6})$$

Utilizando um software calculamos as raízes em termos de x e obtemos

$$\begin{cases} x' = \frac{2y - c^2y + 2\sqrt{y^2 - c^2y^2}}{c^2} \\ x'' = \frac{2y - c^2y - 2\sqrt{y^2 - c^2y^2}}{c^2} \end{cases} \quad (\text{B.7})$$

onde podemos reescrever isolando o y de tal forma

$$\begin{cases} x' = K(C)y \\ x'' = J(C)y \end{cases} \quad (\text{B.8})$$

com $K(C) = \frac{2 - c^2 + 2\sqrt{1 - c^2}}{c^2}$ e $J(C) = \frac{2 - c^2 - 2\sqrt{1 - c^2}}{c^2}$

Moldando os resultados B.7 com a equação B.1 e calculando para isso a primeira derivada da função B.6 em relação as raízes B.7 encontradas, obtemos em relação a x' e x'' respectivamente

$$\begin{cases} \frac{y(x' - y)}{\sqrt{x'y(x'+y)^2}} \\ \frac{y(y - x'')}{\sqrt{x''y(x''+y)^2}} \end{cases} \quad (\text{B.9})$$

Usando os valores de x isolando o y de B.8, obtemos para x' e x'' , respectivamente

$$\begin{cases} \frac{K(C) - 1}{(1 + K(C))^2 \sqrt{K(C)}y} \\ \frac{1 - J(C)}{(1 + J(C))^2 \sqrt{J(C)}y} \end{cases} \quad (\text{B.10})$$

Logo substituindo B.10 na equação B.1 temos que a função delta de dirac B.3 pode ser re-escrita na sua forma expandida como

$$\delta\left(C - \sqrt{\frac{4xy}{(x+y)^2}}\right) = \frac{(1 + K(C))^2 \sqrt{K(C)}}{K(C) - 1} y \delta(x - K(C)y) + \frac{(1 + J(C))^2 \sqrt{J(C)}}{1 - J(C)} y \delta(x - J(C)y) \quad (\text{B.11})$$

Que a expansão que utilizamos nos capítulos 1 e 2 e que está em [49].

■

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Dicionário de Português online - <http://www.dicionarioinformal.com.br/nanoestrutura/>, acesso em 12/07/2014.
- [2] Y. Imry. - *Introduction to mesoscopic physics* , Oxford University Press Inc., 2nd edition, (2002).
- [3] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen-*Phys. Rev* , 47, 777 (1935)
- [4] Diogo de Oliveira Soares Pinto-Emaranhamento Térmico e Simulações Quânticas de Sistemas Magnéticos por Ressonância Magnética Nuclear, Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas Rio de Janeiro, Abril de 2009
- [5] E.Schrödinger-*Proc. Camb. Phil. Soc*, 31, 555 (1935)
- [6] J.S.Bell-*Physica*, 1, 195(1964)
- [7] J.S. Bell, Physics Long Island City, (NY) 1, 195 (1965); J.S. Bell, Rev. Mod. Phys. 38, 447 (1966); J.F. Clauser et al., Phys. Rev. Lett. 23, 880 (1969)
- [8] C.Cohen-Tannoudji, B.Diu, and F. Laloë-*Quantum Mechanics Vols1 and 2*, (Hermann and Jonh Wiley Sons, Paris, 1977)
- [9] BRUNO FERREIRA DE CAMARGO YABU-UTI - *Emaranhamento Quântico entre átomos localizados em cavidades distintas*. Dissertação de Mestrado, UNICAMP (2007).
- [10] C. H. Bennett and D. P. DiVincenzo - *Nature London!*, 404, 247(2000).
- [11] M.A. Nielsen and I.L. Chuang-*Quantum Computation and Quantum Information*, (Cambridge University Press, Cambridge, England, 2000).
- [12] C. H. Bennett, G. Brassard, C. Crepeau, R. Jozsa,A. Peres, and W. K. Wootters - *Phys. Rev. Lett.* , 70, 1895 (1993).
- [13] C. H. Bennett and S. J. Wiesner-*Phys. Rev. Lett.* , 69, 2881 (1992)

- [14] A.K. Ekert- *Phys. Rev. Lett.*, 67, 661 (1991).
- [15] C.H. Bennett et al.-*Phys. Rev. Lett.*, 70, 1895 (1993).
- [16] A. K. Ekert, *Phys. Rev. Lett.* 67, 661 (1991); W. Tittel, J. Brendel, H. Zbinden, and N. Gisin, *ibid.* 81, 3563 (1998).
- [17] A. Aspect, J. Dalibard, and G. Roger, *Phys. Rev. Lett.* 49, 1804 (1982); Z.Y. Ou and L. Mandel, *ibid.* 61, 50 (1988); Y.H. Shih and C.O. Alley, *ibid.* 61, 2921 (1988!); G. Weihs et al., *ibid.* 81, 5039 1998!; A. Aspect, *Nature London* 398, 189 (1999).
- [18] J. Cirac-*Nature London* , 413, 375 (2001).
- [19] GOPAR, VITOR A; FRUSTAGLIA, DIEGO - *Statistics og orbital entanglement production in quantum-cgaotic dots*. *Physical Review B*,77,153403 (2008).
- [20] S. M. Nishigaki, D. M. Gangardt, and A. Kamenev. Correlation functions of the BC Calogero-Sutherland model. -*Journal of Physics A: Mathematical and General*, 36(12):3137, 2003. 4
- [21] <http://pages.unibas.ch/phys-meso/Pictures/pictures.html>. Acesso em 23 de setembro de 2009.
- [22] M.J.Berry, J.A.Katine, R.M.Westervelt, and A.C.Gossard. Influence of shape on eletron transport in ballistic quantum dots. - *Physical Review B*, 50(23):17721, 1994.
- [23] G. Schedelbeck, W. Wegscheider, M. Bichler, and G. Abstreiter - *Coupled quantum dots fabricated by cleaved edge overgrowth: From artificial atoms to molecules.*, *Science*, 278:1792,1997 .
- [24] Física Medica UFS - <http://fisicamedicaufs.blogspot.com.br/2011/05/o-que-e-fisica-mesoscopica.html>, Acesso em 12/07/2014.
- [25] Clóvis Corrêa Júnior - *Ruído no Transporte Eletrônico em Sistemas Mesoscópicos*, Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Física "Gleb Wataghin", Campinas - SP, 2009 .
- [26] D. K. Ferry and S. M. Goodnick - *Transport in Nanostructures* , Cambridge University Press, 1997 .
- [27] Antonio Pádua - *Espalhamento elastico pp a altas energias*, Instituto de Física "Gleb Wataghin"UNICAMP-Teses, 1986.
- [28] Neil W. Ashcrof, N. David Mermim - *Solid State Physics, Saunders College Publishing, United States of America* ,1976.
- [29] S. Datta - *Electronic Transport in Mesoscopic Systems, New Edition, Cambridge University Press*,(1997) .

- [30] Carlo Beenakker-*Quantum Point Contacts*, disponível <http://www.lorentz.leidenuniv.nl/beenakker/>.
- [31] C. W. J. Beenakker, M. Kindermann, C. M. Marcus, and A. Yacoby, - *in Fundamental Problems of Mesoscopic Physics*, NATO Science Series II Vol. 154, edited by I. V. Lerner, B. L. Altshuler, and Y. Gefen (Kluwer, Dordrecht, 2004). .
- [32] S. Datta - *Electronic Transport in Mesoscopic Systems, New Edition, Cambridge University Press*,(1997) .
- [33] M. L. Mehta, *Random Matrices* (Academic, New York, 1991)
- [34] J.J. SAKURAI - *Modern Quantum Mechanics (Addison-Wesley Publishing Company, 2013)*.
- [35] L. E. Ballentine - *Quantum Mechanics*, (World Scientific, Singapore, 1998), p.234-238.
- [36] MELLO, PIER A.; KUMAR, NARENDRA - *Quantum Transport in Mesoscopic Systems., Complexity and Statistical Fluctuations*. Oxford University Press Inc, edição 2004.
- [37] P. Jacquod, R. S. Whitney, J. Meair and M. Büttiker, *Phys. Rev. B.* **86**, 155118 (2012).
- [38] S. N. Evangelou and D. E. Katsanos, *Journal of Physics A: Mathematical and General*, **36(12)**, 3237 (2003).
- [39] Jonathan Meair Philippe Jacquod, Robert S. Whitney and Markus Büttiker. Onsager relations in coupled electric, thermoelectric, and spin transport: The tenfold way. - *Phys. Rev. B.*,86, 155118, (2012).
- [40] A Kamenev; S. M. Nishigaki; D M Gangardt. Correlation functions of the bc calogero- sutherland model. J. - *Phys. A: Math. Gen.* ,36, (2003) .
- [41] J. Verbaarschot. Spectrum of the QCD Dirac operator and chiral random matrix theory. - *Phys. Rev. Lett.*, 72:25312533, 1994. 1.3.1, 3.1, 3.2.
- [42] R. M. Westervelt. Graphene nanoelectronics. -*Science*, 320:324325, 2008.
- [43] C. W. BEENAKKER, C. EMARY, M. KINDERMANN, AND J. L. VAN VELSEN - *Phys. Rev. Lett.*,91,147901(2003).
- [44] P. A. Mello and H. U. Baranger. -*Interference phenomena in electronic transport through chaotic cavities: An information-theoretic approach. Waves in Random Media*, 9(2):105146, (1999).
- [45] KUMAR, SANTOSH; PANDEY, AKHILESH - *Conductance distributions in chaotic mesoscopic cavities*, *J. Phys. A: Math. Theor.* 43(2010) 285101 (17pp).

- [46] M. L. Mehta. Random Matrices. -*Academic Press, San Diego, California, 2nd edition*, 1991. 3, 3.4, 4
- [47] Arkfren, G.B. & Weber, H.J. *Mathematical Methods for Physicists*, 7nd. Ed., Academic Press, New York, (2012).
- [48] H.U.Baranger and P.A.Mello - *Phys. Rev. Lett.* **73**,142 (1994)
- [49] VILLAMAINA, DIEGO; VIVO, PIERPAOLO - *Entanglement production in non-ideal cavities and optimal opacity.*, Rev. Mod. Phys.,cond-mat/1207.4623v2, (2013).
- [50] A.F. de Macedo-Junior-*Propriedades Universais de Transporte em Pontos Quânticos com Simetria Quiral*,DF/UFPE-tesis, 2002
- [51] MACEDO-JUNIOR, A. F.; MACÊDO, A. M. S. - *Universal transport properties of asymmetric chiral quantum dots.* Physical Review B,**77**,165313 (2008).
- [52] I.M.L da Silva, J.G.G.S. Ramos, and A.L.R. Barbosa-Anomalous entanglement in Chaotic Dirac Billiard *Phys. Rev. B* , 90, 245107(2014)
- [53] M. S. M. Barros, A. J. Nascimento Jnior, A. F. Macedo- Junior, J. G. G. S. Ramos, and A. L. R. Barbosa , -*Phys. Rev. B* , 88, 245133 (2013)