



Universidade Federal Rural de Pernambuco
Departamento de Física

Pós-graduação em Física Aplicada

**Método Diagramático Aplicado ao Biliar
de Dirac Caótico**

Marília Santos Melo de Barros

Dissertação de Mestrado

Recife
agosto de 2014

Universidade Federal Rural de Pernambuco
Departamento de Física

Marília Santos Melo de Barros

Método Diagramático Aplicado ao Bilhar de Dirac Caótico

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-graduação em Física Aplicada do Departamento de Física da Universidade Federal Rural de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Física.

Orientador: *Prof. Dr. Anderson Luiz da Rocha e Barbosa*

Recife
agosto de 2014

A minha família ...

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, por te me concedido inteligência para fazer bom uso e paciência. A meus irmãos, meus pais, pois sempre estiveram me apoiando nos momentos de aflição mesmo não compreendendo os cálculos que faço. Agradeço a todos os professores do Departamento de Física que tive a oportunidade de cursar as disciplinas do mestrado quanto da graduação, em particular o professor Ailton, Pedro Hugo e a professora Sara pela dedicação e por me incentivarem desde a graduação. Quero evidenciar aqui meus sinceros agradecimentos ao professor Anderson Luiz da Rocha e Barbosa por ter sido um "pai profissional" durante esta jornada de pesquisa, desde a Iniciação Científica, pela sua notável dedicação, muita paciência e orientação. Aos todos os meus amigos que conquistei, alguns deles desde a graduação, porque cada página dessa dissertação reconheço um pouco de todos vocês. E também a satisfação de cursar disciplina com vocês, discutir listas de exercícios, o desespero antes das provas principalmente a prova de Mecânica Quântica e as boas conversas. Muito obrigado a todos que contribuíram para que esta dissertação tornasse realidade. Por fim, agradeço à FACEPE pelo apoio financeiro.

Se vi mais longe foi por estar de pé sobre ombros de gigantes
—ISAAC NEWTON (fevereiro, 1676)

Resumo

Transporte eletrônico em dispositivos nanoestruturados vem sendo um tema relevante em física teórica e experimental. Os principais efeitos observáveis em um bilhar quântico caótico são devido a interferência quântica durante o transporte eletrônico. Nessas nanoestruturas as escalas de comprimentos de coerência de fase e o caminho livre médio excedem as dimensões da amostra do sistema, além disso, o tempo de permanência é menor do que o tempo de decoerência. Nessa abordagem o bilhar quântico é considerado uma cavidade caótica conectada a guias de onda ideais acoplados a reservatórios de elétrons. Os efeitos coerentes mais importantes em física mesoscópica são a localização fraca e flutuação universal da condutância. A presença destes efeitos é devido à coerência de fase dos elétrons que é mantida durante o processo de transporte de cargas. A perda da coerência de fase ou decoerência leva ao desaparecimento desses efeitos. Para uma abordagem analítica do problema de transporte eletrônico há diversas técnicas atualmente. O método diagramático tem se apresentado como uma boa opção principalmente quando se necessita estudar sistemas com multiterminais. O método diagramático foi proposto por Brouwer e Beenakker para calcular os observáveis físicos como a condutância através de um bilhar quântico caótico ou bilhar de Schrödinger caótico, ou seja, quando a função de onda da partícula é descrita pela equação de Schrödinger. Neste trabalho iremos fazer um estudo analítico dos observáveis físicos do transporte de carga através do bilhar quântico caótico com simetria de subrede (SLS) ou simetria quiral, também conhecido como Bilhar de Dirac Caótico. A SLS está presente nas estruturas de rede bipartida com duas subredes interconectadas. Para este fim, pretendemos generalizar o método diagramático de forma a se adequar a sistemas onde as funções de onda são descritas pela equação de Dirac.

Palavras-chave: Bilhar de Dirac, Bilhar de Schrödinger, Técnica Diagramática, Matriz Aleatória, Decoerência.

Abstract

Electronic transport in nanostructured devices have been relevant topic at theoretical and experimental physics. The main physical effects in chaotic quantum billiard are caused by quantum interference in electronic transport. In mesoscopic physics, the length scales like phase coherence and mean free path are much longer than length of devices, moreover, the dwell time of electrons are much smaller than time of coherence. In this case, the quantum billiard is described as chaotic cavity connecting to ideal leads. The most important coherence effects in mesoscopic physics are weak localization and universal fluctuations of conduction, which presents when the phase coherence of electrons is preserved in electronic transport. If the phase coherence is broken the weak localization and universal fluctuations of conduction vanishes, which is known as decoherence. There are many techniques currently to analytical analyze of electronic transport. However, the diagrammatic method have been shown as good option mainly when it is necessary to study systems with multiple leads. The diagrammatic method was proposed by Brouwer and Beenakker to obtain the physical observables like conduction through the chaotic quantum billiard or Chaotic Schrödinger Billiard. In other words, when the function wave of electrons are described by Schrödinger equation. In this work, we are studying analytically the physical observables of electronic transport to chaotic quantum billiard with sublattices or chiral symmetry (SLS), which is known Chaotic Dirac Billiard. The SLS is present in the bipartite network structures with two sublattices inter-connected. Our goal are generalizing the diagrammatic method to systems which the function wave are described by Dirac equation.

Keywords: Dirac Billiard, Schrödinger Billiard, Diagrammatic Method, Random Matrix, Decoherence.

Sumário

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	REGIME DE TRANSPORTE EM FÍSICA MESOSCÓPICA	2
1.1.1	Ponto de contato quântico	4
1.2	BILHAR DE SCHRÖDINGER: CAVIDADE CAÓTICA QUÂNTICA	5
1.2.1	Reversão temporal: Reversão do movimento	6
1.2.2	Teoria de espalhamento no Bilhar de Schrödinger	7
1.2.3	Classe de Wigner-Dyson	10
1.3	FORMALISMO DE LANDAUER	11
1.4	ESTATÍSTICA DE CONTAGEM DE CARGAS E EFEITO DE INTERFERÊNCIA	13
1.5	BILHAR DE DIRAC CAÓTICO	14
1.5.1	Grafeno	15
1.6	EQUAÇÃO DE DIRAC	16
1.6.1	Simetria de reversão temporal	17
1.6.2	Quiralidade	18
1.7	SUMÁRIO GERAL DA DISSERTAÇÃO	19
2	APLICAÇÃO DO MÉTODO DIAGRAMÁTICO AO BILHAR DE SCHRÖDINGER CAÓTICO	20
2.1	INTEGRAÇÃO SOBRE O GRUPO UNITÁRIO	20
2.2	INTEGRAÇÃO DE MATRIZES SIMÉTRICAS DO GRUPO UNITÁRIO	23
2.3	INTEGRAÇÃO SOBRE O GRUPO SIMPLÉTICO DE MATRIZES QUARTENIÔNICA	24
2.4	TÉCNICA DIAGRAMÁTICA APLICADA AO BILHAR DE SCHRÖDINGER CAÓTICO	26
2.4.1	Média e variância da condutância para ECU($\beta = 2$)	26
2.4.2	Caso geral	27
2.4.3	Casos particulares	28
2.5	MÉDIA DA POTÊNCIA DO RUÍDO DE DISPARO	29
2.5.1	Segundo momento para ECU ($\beta = 2$)	29
2.5.2	Fórmula geral	30
2.6	VARIÂNCIA DA POTÊNCIA DO RUÍDO DE DISPARO	31
2.6.1	Variância da potência do ruído de disparo para o ECU ($\beta = 2$)	31
2.6.2	Variância da potência do ruído para ECO e ECS ($\beta = 1$ e $\beta = 4$)	32
2.6.3	Casos particulares	32

3	MÉTODO DIAGRAMÁTICO APLICADO AO BILHAR DE DIRAC	35
3.1	INTEGRAÇÃO SOBRE O GRUPO ORTOGONAL	35
3.2	INTEGRAÇÃO SOBRE O GRUPO SIMPLÉTICO	39
3.3	APLICAÇÃO DO MÉTODO DE INTEGRAÇÃO SOBRE O GRUPO ORTOGONAL AO BILHAR DE DIRAC	40
3.4	MÉDIA DA CONDUTÂNCIA	41
3.5	VARIÂNCIA DA CONDUTÂNCIA	42
3.5.1	Casos particulares	43
4	DECOÊRENCIA NO BILHAR DE DIRAC	47
4.1	EFEITO DE UM TERCEIRO GUIA CONECTADO A CAVIDADE BALÍSTICA	47
4.2	MÉDIA DA CONDUTÂNCIA	49
4.3	VARIÂNCIA DA CONDUTÂNCIA	50
5	CONCLUSÃO E PERSPECTIVAS	53
6	ANEXO I: PESOS DO ENSEMBLE DE WIGNER-DYSON	54
7	ANEXO II: PESOS PARA OS ENSEMBLES COM SIMETRIA QUIRAL	56
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	58

Lista de Figuras

- | | | |
|------|---|----|
| 1.1 | Escala de comprimento característica do sistema mesoscópico a baixas temperaturas. Onde L é o comprimento da amostra, λ_F comprimento de onda de Fermi, l_e caminho livre médio, L_ϕ comprimento de coerência de fase e ξ o comprimento de localização. | 3 |
| 1.2 | Ilustração de um sistema mesoscópico balístico (a esquerda) e difusivo (a direita). | 3 |
| 1.3 | Ponto de contato quântico (contato pontual) e a quantização da condutância, à medida que varia a tensão na constrição. | 4 |
| 1.4 | Bilhar de Shrödinger ou Cavidade Caótica Quântica. Na figura à direita as setas indicam o caminho do elétrons hipotético entrado e saindo da cavidade caótica, explorando todo o tempo de permanência. A esquerda figura ilustrativa da cavidade. | 5 |
| 1.5 | Trajetória de uma partícula sujeita a um certo campo de força central. A direita partícula no sentido do movimento e a esquerda revertida no tempo. | 7 |
| 1.6 | Bilhar de Shrödinger conectada a dois guias. As setas indicam as funções de onda entrando (e) e saindo (s) dos guias 1 e 2. | 8 |
| 1.7 | Amostra mesoscópica conectada a dois reservatórios com seus respectivos potenciais químicos μ_1 e μ_2 , possibilitando a passagem de corrente elétrica na amostra. | 12 |
| 1.8 | Flutuação da condutância em um condutor unidimensional submetido a ação de um campo magnético entre -15 e 15 tesla. | 14 |
| 1.9 | Ilustração do Bilhar de Dirac caótico com estrutura rede colmeia. | 15 |
| 1.10 | Exemplos de sistemas com simetria de subrede. a) Representa a estrutura do grafeno (rede coméia). b) Representa uma estrutura com simetria de subrede irregular. c) Estrutura sem simetria de subrede. Nas figuras a) e b) nas estruturas os pontos pretos representa a subrede A e os brancos subrede B e na figura c) temos um exemplo de estrutura com três subredes A , B e C . | 15 |
| 1.11 | Rede comeia de uma linha monoatômica de carbono. A rede apresenta duas bordas: zigzag (na horizontal) e armchair (na vertical). | 16 |
| 2.1 | Regras de substituição para as matrizes unitárias U e U^* , o delta de Kronecker e uma matriz fixa, de modo geral. | 21 |
| 2.2 | O diagrama a esquerda mostra a representando a função $f(U)$, equação (2.4). A direita o diagrama representa a média da função $\langle f(U) \rangle$, equação (2.5). Este contém dois ciclos- T que geram $\text{Tr}A$ e $\text{Tr}B$ e um ciclo- U com peso V_1 . | 22 |

- 2.3 Diagramas para a média $f^2(U)$. O primeiro e o quarto diagramas ambos tem dois ciclo- U , logo seus pesos são iguais a $V_{1,1}$. O segundo e terceiro diagramas tem apenas um ciclo- U com peso V_2 . 23
- 2.4 Os diagramas da média da função ($f(U)$) são representados pela soma de dois diagramas. O primeiro diagrama apresenta um ciclo- U e dois ciclos- T , o segundo apresenta um ciclo- U e um ciclo- T . Neste caso, surge mais um novo diagrama onde as bolas pretas estão ligadas a bolas brancas pelas linhas finas. 24
- 2.5 Bilhar quântico caótico ou Bilhar de Schrödinger se comporta semelhantemente a uma associação de resistores em série quando não há simetria de reversão temporal. A resistência é o inverso do número de canais abertos em cada guia. 27
- 2.6 Comportamento da média e variância da condutância no caso simétrico, quando $N_1 = N_2 = N$ e anti-simétrico $N_1 = 2$. 28
- 2.7 Os dois primeiros diagramas apresentam um ciclo- U com momento V_2 , quatro e dois ciclo- T , respectivamente. Nos dois últimos diagramas cada apresentam dois ciclo- U com peso $V_{1,1}$ e quatro ciclo- T . 30
- 2.8 Comportamento da média e variância da potência do ruído de disparo no caso simétrico, quando $N_1 = N_2 = N$ e anti-simétrico $N_2 = 2$. 33
- 3.1 Regras de substituição para as matrizes unitárias U , o delta de Kronecker e uma matriz fixa A , sobre o grupo ortogonal. 36
- 3.2 À esquerda representamos a função $f(U)$, equação (3.4), diagramaticamente. À direita o diagrama representa a média da função $f(U)$, equação (3.5). Este contém dois ciclos- T que geram $\text{Tr}A$ e $\text{Tr}B$ e um ciclo- U com peso V_1 . 36
- 3.3 Diagramas que representam a equação (3.6), neles apresentaram as possíveis permutações para gerarem o valor da equação (3.6) 37
- 3.4 Representação diagramática da equação (3.8) . 37
- 3.5 Representação diagramática da média da equação (3.8). Note que o primeiro, segundo e terceiro diagramas possuem dos ciclos- U equivalentes ao peso V_{11} , os demais diagramas possuem um ciclo- U equivalente ao peso V_2 . 38
- 3.6 Estes são alguns exemplos dos diagramas resultantes da equação (3.10), cada diagrama tem os pesos $V_{1111}, V_{112}, V_{2,2}, V_{1,3}$, respectivamente. 39
- 3.7 A média e a variância da condutância são plotados em unidades de $4e^2/h$ e $8e^2/h^2$, respectivamente. Na figura (a) e (b), esta representada o caso simétrico, $N = N_1 = N_2$ e em (c) e (d) a assimetria dos terminais onde $N_1 = 2$. As bolas sólidas e asteriscos são referentes às simulações numéricas obtidas a partir da fatorização QR e do Modelo Hamiltoniano. As linhas sólidas são os resultados analíticos obtidos via técnica diagramática correspondentes as equações (3.1), (3.29), (3.30) e (3.30). 44

- 3.8 A figura indica a comparação entre a variância da condutância do Bilhar de Dirac dos ensembles chiral em unidades $8e^4/h^2$ com a do bilhar de Schrödinger caótico de Wigner-Dyson em unidades $4e^4/h^2$, com os terminais simétricos ($N = N_1 = N_2$) via método diagramático(DM). Os simbolos refere-se a simulação numérica com relação a fatorização QR (Gram-Schmidt) e modelo Hamiltoniano (HM) 45
- 4.1 Modelo esquemático do Bilhar de Dirac conectado a três guias ideais. A presença do terceiro guia contribui para a defasagem, sem perdas de elétrons. A média do fluxo de corrente que atravessa o terceiro guia é nula. 47
- 4.2 As razões entre as variâncias da condutância para $N_\phi \gg 1$. Os resultados tende a 2.5 para $chECO/chECU$ e 0.44 para $chECS/chECU$, de acordo com as equações (4.26) e (4.27). Os símbolos representam as simulações numéricas da fatorização QR e modelo Hamiltoniano para os ensembles chirais. 52

Lista de Tabelas

1.1	Tabela com a nomenclatura de Cartan para espaço simétricos. As simetrias fundamentais que classsicam cada tipo de ensemble são: simetria de reversão temporal (TRS), partícula-buraco (PHS), simetria de rotação de spin (SRS) e subrede (SLS) . Na tabela quando há uma quebra de simetrias representamos por 0, e não havendo a quebra da simetria representamos por ± 1 .	2
1.2	Classificação dos regimes.	4
1.3	Tabela de Cartan. Representa a decomposição da matriz espalhamento em termos de matriz unitária, ortogonal e simplética.	10
3.1	Do regime quântico extremo ($N_1 = N_2 = 1$) referente ao Bilhar de Dirac e ao Bilhar Schrödinger caótico, ambos resultados das médias estão em uma escala de $4e^2/h$ e $2e^2/h$, respectivamente.	42
3.2	Regime quântico extremo ($N_1 = N_2 = 1$) para classificação do grupo chiral referente ao Bilhar de Dirac e ao Bilhar Schrödinger caótico, ambos os resultados das médias estão em uma escala de $8e^4/h^2$ e $4e^4/h^2$, respectivamente.	43
4.1	Tabela de novos resultados universal da razão entre as condutâncias do Bilhar de Dirac e do Bilhar quântico caótico.	52

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

O avanço tecnológico possibilitou a construção de diversos dispositivos eletrônicos na escala de nanômetros, tais como pontos quânticos, fios e entre outros. Estes sistemas abrangem a região entre os sistemas macroscópicos e microscópicos e preservam a coerência de fase, sendo esta a principal característica durante todo o processo de transporte de carga. A preservação da coerência de fase possibilita a formação de padrões de interferência no interior de uma amostra. Em matéria condensada, estruturas que apresentam estas características são conhecidas como *sistemas mesoscópicos* [2, 3]. A partir disso, é possível estudar diversos fenômenos físicos onde os efeitos ondulatórios dos elétrons são relevantes. Durante o transporte de carga, surgem propriedades tais como, a universalidade da flutuação da condutância, localização fraca e a potência do ruído de disparo. Esses fenômenos independem do formato, do grau de desordem do sistema, composição atômica ou da sua estrutura, apenas dependem das simetrias fundamentais de cada sistema. Dado estas características, a Teoria de Matriz Aleatória vem sendo utilizada como uma das principais ferramentas teóricas no estudo de transporte eletrônico.

A Teoria da Matriz Aleatória (TMA) foi desenvolvida por Wigner e Dyson [4], que consiste no estudo da distribuição de probabilidade dos autovalores e autovetores de matrizes. Ela é uma ferramenta estatística aplicada a sistemas com dinâmica caótica, por isso a TMA é uma ótima ferramenta para obter as características da universalidade da condutância em condutores desordenados. Aplica-se ao estudo das propriedades termodinâmicas de sistemas fechados e ao estudo das propriedades de transporte de sistemas abertos. Inicialmente a TMA era composta por três ensembles, conhecidos como ensembles Gaussianos. Além destes ensembles a TMA é composta por dez ensembles subdivididos em três classes: Classe de Wigner-Dyson [4], Classe Quiral [5] e Classe de Altland-Zirnbauer [6]. A partir da nomenclatura de Cartan para espaços simétricos, tabela 1.1, apresentamos as principais simetrias que sobrevivem a presença de desordem e caracterizam cada tipo de ensemble: simetria de reversão temporal (TRS), partícula-buraco (PHS), simetria de rotação de spin (SRS) e subrede (SLS). Quando as simetrias são quebradas pela ação de um agente externo tal como campo magnético, elas são representadas por (0), quando as simetrias não são quebradas estão representadas por (± 1), dependendo da simetria de spin e SRS. Na TRS, +1 corresponde a partículas com spin inteiro $1, 2, \dots$ e -1 corresponde partículas com spin meio $1/2$. Na PHS, +1 corresponde ao tripleto e -1 ao singleto e na simetria SLS sempre teremos +1 [1, 3, 8].

Neste trabalho focamos nossos estudos nas Classes Quiral e Wigner Dyson. Mais especificamente estudaremos o Bilhar de Dirac caótico, apresentando resultados exatos da média e variância da condutância onde comparamos nossos resultados com os já conhecidos resultados para o Bilhar de Schrödinger caótico [9]. O Bilhar de Schrödinger é descrito pelos ensembles de Wigner-Dyson enquanto o Bilhar de Dirac é descrito pelos ensembles Quirais. A princi-

Classes de Simetrias	Beta	Ensembles	TRS	PHS	SLS
Wigner-Dyson	2	A(unitário)	0	0	0
	1	AI(ortogonal)	+1	0	0
	4	AII(simplético)	-1	0	0
Quiral	2	AIII(unitário)	0	0	1
	1	BDI(ortogonal)	+1	+1	1
	4	CII(simplético)	-1	-1	1
Altland-Zirnbauer	2	D	0	+1	0
	2	C	0	-1	0
	1	DIII	-1	+1	1
	4	CI	+1	-1	1

Tabela 1.1 Tabela baseada na referência [8] com a nomenclatura de Cartan para os espaços simétricos. A segunda coluna refere-se aos índices de simetria de cada ensemble. A terceira coluna representa a nomenclatura de Cartan para espaços simétricos. As simetrias fundamentais que classificam cada tipo de ensemble são: simetria de reversão temporal (TRS), partícula-buraco (PHS), simetria de rotação de spin (SRS) e subrede (SLS). Na tabela quando há uma quebra de simetrias representamos por 0, e não havendo a quebra da simetria representamos por ± 1 .

pal diferença entre os ensembles de Wigner-Dyson é a validade SLS presente nos ensembles Quirais.

1.1 REGIME DE TRANSPORTE EM FÍSICA MESOSCÓPICA

O regime mesoscópico em matéria condensada é caracterizado por dispositivos mantidos a baixas temperaturas, permitindo que o elétron propague coerentemente através da amostra, visto que a coerência de fase caracteriza o comportamento quântico. Os dispositivos eletrônicos mesoscópicos estão localizados entre as escalas macroscópica e microscópica. Esta faixa de comprimento se estende do comprimento de coerência de fase, L_ϕ , até o comprimento de onda de Fermi, λ_F . O comprimento de coerência de fase é dado por [2, 10]

$$L_\phi = \sqrt{D\tau_\phi}, \quad (1.1)$$

onde D é a constante de difusão e τ_ϕ é o tempo de relaxação de fase. O comprimento de onda de Fermi é escrito

$$\lambda_F = \frac{h}{\sqrt{2m^*\varepsilon_F}}, \quad (1.2)$$

onde m^* representa a massa efetiva do elétron e ε_F a energia de Fermi.

O comprimento de coerência de fase é a maior escala de comprimento e é caracterizado pela ocorrência de interferências de funções de ondas eletrônicas, isto é, o elétron pode viajar dentro desta distância sem perder a coerência de fase. Este comprimento depende da temperatura, à medida que a temperatura aumenta L_ϕ diminui, e varia de amostra para amostra [2, 10]. Se o

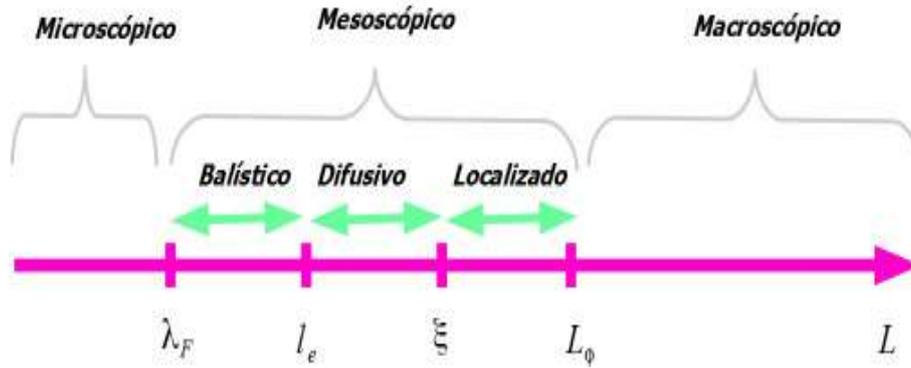


Figura 1.1 Escala de comprimento característica do sistema mesoscópico a baixas temperaturas. Onde L é o comprimento da amostra, λ_F comprimento de onda de Fermi, l_e caminho livre médio, L_ϕ comprimento de coerência de fase e ξ o comprimento de localização.

comprimento da amostra L for maior que L_ϕ , o dispositivo não apresenta efeitos de interferências quântica, sendo assim, o transporte eletrônico é descrito pela física clássica, veja a figura 1.1.

Outra escala importante é o caminho livre médio entre dois espalhamentos elásticos consecutivos, l_e . Ele está relacionado ao tempo de espalhamento elástico, sendo a distância percorrida pelo elétron até que modifique completamente seu momento inicial descrevendo o grau de desorganização do sistema, isto é, a distância entre duas colisões sucessivas com impurezas, veja figura 1.2. Além desta há outra escala, o comprimento de localização (ξ), que está relacionada ao grau de desordem do sistema, veja a figura 1.1.

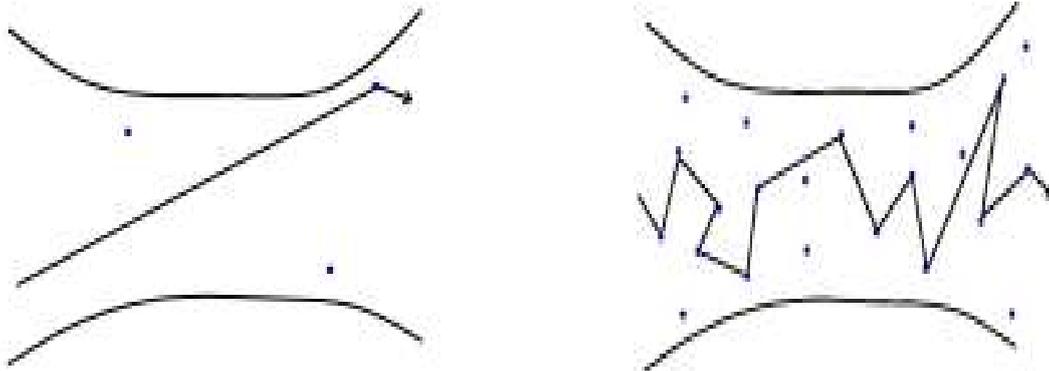


Figura 1.2 Ilustração de um sistema mesoscópico balístico (à esquerda) e difusivo (à direita).

O comprimento da amostra L , necessariamente obedece a seguinte condição: $L_\phi \geq L \geq \lambda_F$. Dito que L está compreendida entre as escalas de comprimento que caracteriza o sistema mesoscópico, podemos identificar três regimes: Balístico, difusivo e localizado. Na tabela 1.2, apresentamos as características de cada regime.

Inicialmente o foco da física mesoscópica era o regime difusivo, no qual o movimento dos elétrons consiste em colisões aleatórias entre as impurezas, veja a figura 1.2 [11]. A partir do avanço tecnológico, o regime balístico passou a ser o alvo de pesquisa, sendo neste o movimento aleatório dos elétrons determinado pelas condições de contorno da amostra [12].

Regime	Condição	Colisões
Balístico	$l_e > L$	Praticamente não há colisões
Difusivo	$L > l_e$	Diversas colisões Elásticas
Localizado	$L_\phi > L > \xi$	Múltiplas Colisões

Tabela 1.2 Classificação dos regimes.

No transporte eletrônico coerente, temos como principais efeitos quânticos a quantização da condutância, as flutuações universais, a localização fraca e o ruído de disparo. As flutuações universais da condutância são padrões estocásticos independentes do tempo e desaparecem lentamente com o aumento da temperatura, [13]. No entanto, o ruído trás informações da correlação temporal dos elétrons que não estão contidos na condutância [14].

1.1.1 Ponto de contato quântico

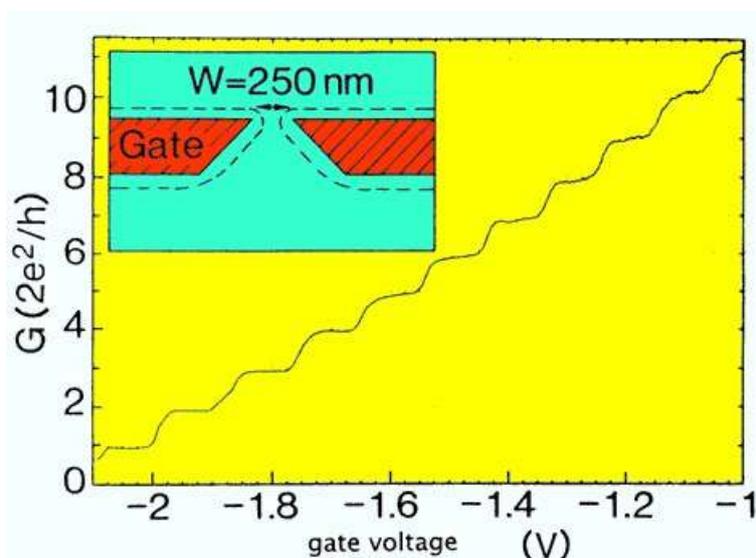


Figura 1.3 Ponto de contato quântico e a quantização da condutância, à medida que varia a tensão na constricção . Figura retirada de [15].

Um exemplo fundamental da física mesoscópica é o ponto de contato quântico (PCQ). Experimentalmente PCQ é fabricado a partir de uma heteroestrutura de *AsGa/NAsGa*, esse fica confinado por barreiras de potencial infinitas e conectado através das constricções a dois reservatórios com uma diferença de potencial eletroquímico entre eles, veja a figura 1.3[15, 21]. A

partir da desta junção podemos estudar o contato pontual. Este dispositivo consiste de um guia de onda com uma constrição de largura W ajustável, que o divide em duas regiões [15].

A corrente elétrica através da constrição varia de acordo com o ajuste da abertura, W . À medida que se aumenta a largura da constrição a corrente aumenta por etapas. De fato, ocorre a formação de degraus que consistem na quantização da condutância em temperaturas baixas, esse efeito foi primeiramente observada em heteroestruturas semicondutoras de GaAs e AlGaAs nas referências [86, 87]. Segundo a figura 1.3, a condutância pode assumir valores discretos, que são múltiplos inteiros do quantum da condutância, devido a isto a condutância é dada pela equação a seguir:

$$G = N \times \frac{2e^2}{h}, \quad (1.3)$$

onde $2e^2/h$ é o quantum de condutância e N é um número inteiro que conta o número de modos de interferência construtivas e consiste na razão entre a largura do contato e a metade do comprimento de onda do elétron:

$$N = \text{Int} \left[2 \frac{W}{\lambda} \right]. \quad (1.4)$$

1.2 BILHAR DE SCHRÖDINGER: CAVIDADE CAÓTICA QUÂNTICA

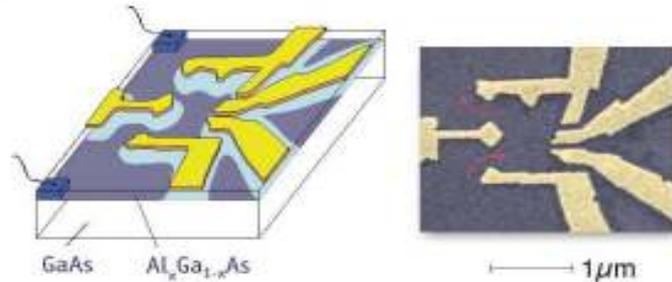


Figura 1.4 Bilhar de Schrödinger ou Cavidade Caótica Quântica. Na figura à direita as setas indicam o caminho do elétron hipotético entrando e saindo da cavidade caótica, explorando todo o tempo de permanência. A esquerda figura ilustrativa da cavidade. Figura retirada de [85].

O bilhar de Schrödinger é um dispositivo eletrônico composto por uma cavidade caótica, que consiste em uma microestrutura bidimensional onde o elétron sofre espalhamento, conectada a um ou mais guias de ondas ideais, veja a figura 1.4. Para que o transporte eletrônico através da cavidade seja considerado universal, é necessário que a escala de tempo de permanência do elétron na cavidade (τ_d) seja suficientemente maior que o tempo ergódico (τ_{erg})

(tempo necessário para o elétron explorar todo o espaço de fase). Contudo, τ_d tem que ser suficientemente menor que o tempo de coerência de fase (τ_ϕ) para que o transporte se mantenha coerente. Desta forma temos que $\tau_\phi \gg \tau_d \gg \tau_{erg}$.

Para que seja realizado o estudo do transporte de cargas, é necessário acoplar reservatórios macroscópicos ao bilhar (cavidade aberta) através de guias de ondas ideais e mantê-los fora de equilíbrio. É importante ressaltar que o tempo de permanência também deve ser maior que o tempo de Ehrenfest esse tempo irá determinar se o sistema é clássico ou quântico, isto é, se o tempo for menor que o tempo de Ehrenfest tem um sistema clássico caso contrário o sistema é dito quântico [2, 16, 11]. Diante destas condições, os observáveis de transporte independem das propriedades microscópicas da cavidade caótica quântica, isto justifica a utilização da Teoria de Matrizes Aleatória.

1.2.1 Reversão temporal: Reversão do movimento

Para descrever simetria de reversão temporal tomamos como base as referências [18, 19]. Do ponto de vista da Mecânica Clássica [18], ao considerar uma partícula sujeita a um certo campo de força, fazendo com que a partícula pare depois de um certo instante de tempo, após a partícula parar aplicamos novamente uma força fazendo com que a partícula reverta seu sentido de movimento. Isto é, a partícula percorre a mesma trajetória, porém com sentido contrário, veja a figura (1.5). De fato, temos as seguintes soluções para o vetor posição e momento da partícula:

$$\begin{cases} \vec{r}_{rev}(t) = \vec{r}(-t) \\ \vec{P}(t) = -\vec{P}(-t). \end{cases} \quad (1.5)$$

Concluimos que $\vec{r}_{rev}(t)$ e $\vec{r}(t)$ são soluções das equações do movimento.

Do ponto de vista da Mecânica Quântica [19], a equação que descreve o movimento das partículas é a equação de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle. \quad (1.6)$$

O hamiltoniano e o operador momento são dado por:

$$\hat{H} = \frac{\hat{P}^2}{2m} + V(\vec{r}), \quad (1.7)$$

$$\hat{P} = -i\hbar \vec{\nabla}. \quad (1.8)$$

Atuando um $\langle \vec{r} |$ pela esquerda na equação (1.6), temos

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \langle \vec{r} | \psi(t) \rangle = \langle \vec{r} | \hat{H} | \psi \rangle. \quad (1.9)$$

Utilizando as equações (1.7) e (1.8) podemos reescrever a equação (1.23) da seguinte forma:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{r}) \right) \psi(t), \quad (1.10)$$



Figura 1.5 Trajetória de uma partícula sujeita a um certo campo de força central. A direita partícula no sentido do movimento e a esquerda revertida no tempo.

onde $\psi(\vec{r}, t) = \langle \vec{r} | \psi(t) \rangle$ é a função de onda.

Dado que $\psi(\vec{r}, t)$ é solução da equação (1.10), podemos verificar que $\psi(\vec{r}, -t)$ não será solução, mas tomando o conjugado da equação (1.10), concluímos que $\psi^*(\vec{r}, -t)$ é sua solução. Desta forma, quando fazemos $t \rightarrow -t$ e $\hat{P} \rightarrow -\hat{P}$ na equação (1.10) concluímos que $\psi^* = C\psi$ e C é o operador conjugação complexa.

1.2.2 Teoria de espalhamento no Bilhar de Schrödinger

A teoria de espalhamento proposta por Landauer, Imry e Büttiker tem se mostrado uma ótima ferramenta para descrever o transporte de carga a baixas frequências, temperatura e voltagem, no regime de partículas não-interagente e não relativísticas.

Seja uma amostra mesoscópica conectada a dois guias de onda bidimensionais ideais com largura W , podemos considerar os guias ideais se os potenciais devido às impurezas, $V(\vec{r})$, e o potencial vetor oriundo de um campo magnético externo, $\vec{A}(\vec{r})$, são nulos dentro do guia [9, 11]. A equação de Schrödinger neste caso é dada por:

$$\frac{1}{2m} \left[-i\hbar \vec{\nabla} + \frac{e}{c} \vec{A}(\vec{r}) \right]^2 \psi(\vec{r}) + V(\vec{r})\psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r}). \quad (1.11)$$

Impondo as condições de contorno, $\psi(x, \pm W/2) = 0$, tal que as funções de ondas se anulam nas paredes dos guias, a solução da equação (1.11) é dada por:

$$\psi(\vec{r}) \propto \sqrt{\frac{2}{W}} \sin(k_y y) e^{\pm i k_x x}. \quad (1.12)$$

O momento transversal k_y é quantizado, $k_y = \frac{n\pi}{W}$ e $n = 1, 2, \dots$. O sinal positivo (negativo) na equação (1.12) representa ondas planas saindo (entrando) da cavidade, veja figura 1.6.

Os momentos transversais da função de onda de propagação estão relacionados da seguinte forma:

$$k_x^2 + k_y^2 = k^2 \equiv \frac{2mE}{\hbar^2}. \quad (1.13)$$

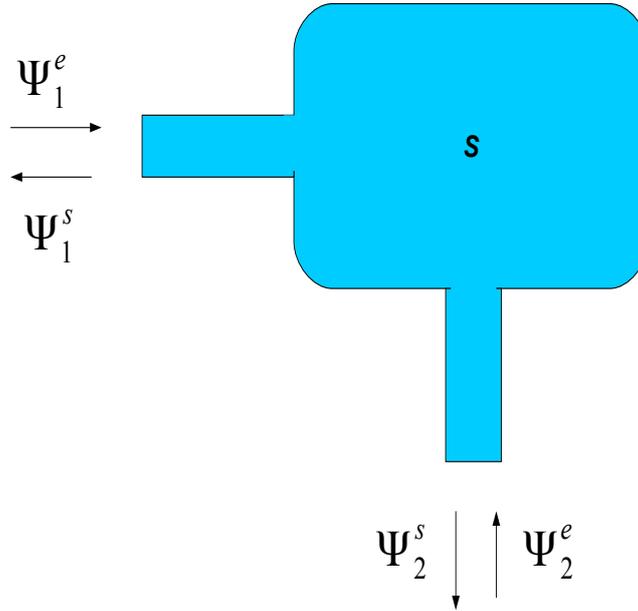


Figura 1.6 Bilhar de Schrödinger conectada a dois guias. As setas indicam as funções de onda entrando (e) e saindo (s) dos guias 1 e 2.

Se $k_y < k$, k_x é real e a exponencial contida na solução da equação de Schrödinger representa ondas propagantes ou canais abertos no guia;

Se $k_y > k$, neste caso k_x é imaginário originando canais fechados ou ondas que decaem exponencialmente nos guias.

Vale salientar que ao longo dos guias a solução da equação de Schrödinger pode ser escrita como a soma de canais abertos e fechados que entram e saem da amostra mesoscópica. De fato, fora da amostra somente as ondas propagantes permanecem.

A relação linear entre os coeficientes oriundos da resolução da equação de Schrödinger leva a obtenção da matriz de espalhamento S de dimensão $N_T \times N_T$ onde $N_T = N_1 + N_2$ e N_i é o número de canais abertos nos guias 1 e 2. A matriz S conecta as amplitudes das ondas que entram(e) e saem(s) através dos guias de onda na cavidade mesoscópica [9]:

$$\begin{pmatrix} \psi_1^s \\ \psi_2^s \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \psi_1^e \\ \psi_2^e \end{pmatrix} \quad (1.14)$$

onde a matriz de espalhamento, S , pode ser escrita na estrutura de blocos:

$$S = \begin{pmatrix} r & t' \\ t & r' \end{pmatrix} \quad (1.15)$$

onde r, r' e t, t' são as matrizes reflexão e transmissão, respectivamente. Veja a figura 1.6. A matriz espalhamento traz toda informação do transporte dos elétrons do sistema.

Podemos reescrever a equação (1.14) da seguinte maneira:

$$\Psi^s = S \Psi^e, \quad (1.16)$$

onde $\Psi^i = \begin{pmatrix} \psi_1^i \\ \psi_2^i \end{pmatrix}$, $i = e, s$. A conservação de corrente requer que

$$\Psi^{e\dagger} \Psi^e = \Psi^{s\dagger} \Psi^s \quad (1.17)$$

Substituindo (1.16) em (1.17), temos

$$\Psi^{e\dagger} \Psi^e = (S^\dagger \Psi^{e\dagger})(S \Psi^e) = \Psi^{e\dagger} S^\dagger S \Psi^e. \quad (1.18)$$

Então,

$$S^\dagger S = 1 = S S^\dagger, \quad (1.19)$$

pela lei de conservação do fluxo de corrente através da cavidade, a matriz espalhamento é unitária [4].

No caso em que o sistema preserva a simetria de reversão temporal, o potencial vetor na equação de Schrödinger (1.11) é nulo no ponto quântico, $\vec{A}(\vec{r}) = 0$. As funções de onda revertidas no tempo ψ^{e*} e ψ^{s*} devem satisfazer a seguinte relação

$$\Psi^{e*} = S \Psi^{s*}, \quad (1.20)$$

a matriz espalhamento conecta as amplitudes das funções de onda que entram com as amplitudes das funções que saem da cavidade, aplicando o operador conjugação complexa C , as funções mudam o sentido de propagação, e invertendo a equação (1.20), mostramos que

$$\Psi^s = (S^*)^{-1} \Psi^e, \quad (1.21)$$

comparando a equação (1.21) com a equação (1.16) verificamos que

$$S = (S^*)^{-1}. \quad (1.22)$$

Consequentemente:

$$S S^* = 1. \quad (1.23)$$

Devido a unitariedade da matriz espalhamento, concluímos que

$$S = S^T, \quad (1.24)$$

ou seja, neste caso a matriz espalhamento é unitária e simétrica.

Ensembles	β	Classes de simetria	U	S
Wigner-Dyson	2	A(ECU)	$\mathbb{U}(N)$	$S = U$
	1	AI(ECO)	$\mathbb{U}(N)$	$S = U^T U$
	4	AII(ECS)	$\mathbb{U}(2N)$	$S = J U^T J^{-1} U$
Quiral	2	AIII(chECU)	$\mathbb{U}(2N)$	$S = \Sigma_z U^\dagger \Sigma_z U$
	1	BDI(chECO)	$\mathbb{SO}(2N)$	$S = \Sigma_z U^T \Sigma_z U$
	4	CII(chECS)	$\mathbb{S}_p(4N)$	$S = \Sigma_z U^\dagger \Sigma_z U$
Altland-Zirnbauer	2	D	$\mathbb{SO}(2N)$	$S = U$
	2	C	$\mathbb{S}_p(2N)$	$S = U$
	1	DIII	$\mathbb{SO}(4N)$	$S = J U^T J^{-1} U$
	4	CI	$\mathbb{S}_p(4N)$	$S = \Sigma_z U^\dagger \Sigma_z U$

Tabela 1.3 Tabela de Cartan. Representa as dez tipos de classe dos ensembles com seus respectivos índices de simetria (β), na quinta coluna estão representadas as decomposições da matriz espalhamento em termos de matriz unitária, ortogonal e simplética. [20]

1.2.3 Classe de Wigner-Dyson

Sistemas abertos consistem em uma cavidade caótica quântica aberta conectada a reservatórios térmicos conectados por guias ideais. O transporte de cargas através destes dispositivos é descrito pela matriz de espalhamento S . Para que haja a universalidade é necessário que as partículas tenham uma dinâmica caótica, ou seja, explorem ergodicamente o espaço de fase antes de saírem da cavidade [2, 10].

No decorrer do trabalho consideramos a hipótese que a matriz de espalhamento S é distribuída uniformemente sobre o grupo unitário, ou seja, toda matriz S é igualmente provável, o ensemble circular unitário pertence a este grupo. Deste modo, este ensemble apresenta a seguinte distribuição de probabilidade:

$$P(S) = \text{constante}, \quad (1.25)$$

onde S é apenas restringida pela simetria discutidas na seção anterior.

A seguir são apresentadas as formas das matrizes para cada tipo de ensembles pertencente a classe de Wigner-Dyson.

Ensemble Circular Unitário (ECU) : Aplicado a sistemas que não preservam a simetria de reversão temporal. Distribuído uniformemente sobre o grupo unitário e de matrizes quaterniônica. Apresenta índice de simetria $\beta = 2$.

Ensemble Circular Ortogonal (ECO) : Aplicado a sistemas que possuem simetria de reversão temporal e de invariância de rotação de spin. Neste caso a matriz S é tanto unitária e simétrica: $SS^\dagger = 1$, $S = S^T$. Os elementos da matriz S são números complexos e por sua vez possui índice de simetria $\beta = 1$.

Ensemble Circular Simplético(ECS) : Aplicado a sistemas com simetria de reversão temporal, e simetria de rotação de spin quebrada. Neste caso a matriz S além de ser unitária é quaternio auto-dual, possuindo índice de simetria $\beta = 4$.

A simetria de reversão temporal é quebrada sob a ação de um campo magnético, ocorrendo uma transição suave dos ensembles ortogonal ou simplético para o ensemble unitário.

Na tabela de Cartan 1.3 apresentamos as dez classes de ensembles. No nosso trabalho consideramos apenas as classes de Wigner-Dyson e Quiral tanto para recuperar resultados analíticos de outras referências quanto como para obtermos novos resultados na literatura.

Na tabela 1.3 as matrizes J e Σ_z são definidas da seguinte maneira [20]:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1_N \\ 1_N & 0 \end{pmatrix}, \quad \Sigma_z = \begin{pmatrix} 1_N & 0 \\ 0 & -1_N \end{pmatrix}. \quad (1.26)$$

1.3 FORMALISMO DE LANDAUER

Um dos resultados mais conhecidos do formalismo de Landauer, consiste na fórmula de quantização da condutância [2, 21]. A condutância dos condutores elétricos macroscópicos de uma determinada amostra depende da condutividade (σ), da largura (W) e do comprimento da amostra (L) dada por:

$$G = \frac{\sigma W}{L} \quad (1.27)$$

caracterizada pela Lei de Ohm. Porém, na região mesoscópica é necessário fazer duas correções diante desta lei.

- Há uma condutância de contato, condutância do condutor balístico com um canal aberto colocado entre contatos condutores e independentes do comprimento, $G_0 = 2e^2/h$ conhecida como quanta de condutância (o fator dois refere-se a degenerescência de spin). A resistência de contato depende do número de modos transversais, $R_c = (h/2e^2N)$, para um condutor longo $N \gg 1$ e R_c é muito pequena;
- A dependência com W é discreta: $N_T = \text{Int}[\frac{2W}{\lambda}]$, sendo o número de canais abertos no condutor.

Na figura 1.7, temos uma amostra mesoscópica conectada a dois reservatórios térmicos com potenciais eletroquímicos μ_1 e μ_2 através de guias ideais. Os guias ideais contêm N_T canais de propagação transversais. As cargas se propagam pelo condutor com probabilidade de transmissão T e probabilidade de reflexão $R = 1 - T$, para que haja conservação da corrente. Ao injetar um elétron no guia 1, a probabilidade média de transmissão para que ele seja transmitido até o guia 2 é dada por:

$$T \equiv \frac{1}{N_T} \times \text{Tr}(tt^\dagger), \quad (1.28)$$

onde t é bloco de transmissão da matriz de espalhamento e N_T o número de modos transversais ou canais. No caso, em que a probabilidade de reflexão é nula no condutor, os reservatórios funcionam como sumidouros perfeitos. Os espalhamentos inelásticos somente ocorrem nos reservatórios térmicos [22].

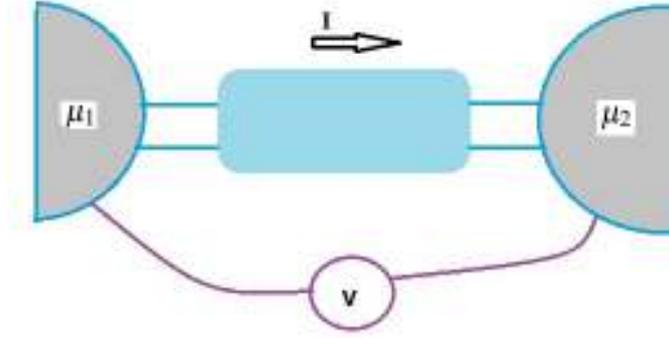


Figura 1.7 Amostra mesoscópica conectada a dois reservatórios com seus respectivos potenciais químicos μ_1 e μ_2 , possibilitando a passagem de corrente elétrica na amostra.

Se $\mu_1 = \mu_2$ a média da corrente, $\langle I \rangle$, é igual a zero. Mas se $\mu_1 > \mu_2$ a média da corrente é maior que zero. Neste caso, há um fluxo de corrente I_1^+ saindo do reservatório 1. Então, o fluxo da corrente é:

$$I_1^+ = \frac{2e}{h} N_T (\mu_1 - \mu_2), \quad (1.29)$$

Já o fluxo no guia 2 será transmitido do condutor e é dado por

$$I_2^+ = \frac{2e}{h} N_T T (\mu_1 - \mu_2). \quad (1.30)$$

De fato, o guia 1 possui fluxo refletido pelo condutor e a corrente refletida é dada por

$$I_1^- = \frac{2e}{h} N (1 - T) (\mu_1 - \mu_2). \quad (1.31)$$

Sendo assim, a corrente líquida I que passa pelo condutor

$$I = I_1^+ - I_1^- = I_2^+. \quad (1.32)$$

A diferença dos potenciais eletroquímicos é igual a $-eV$ e da definição de condutância obtemos o seguinte resultado para a condutância ou fórmula de Landauer:

$$G = G_0 \times \text{Tr}(tt^\dagger). \quad (1.33)$$

A equação (1.33) é conhecida como "fórmula de Landauer". Ela relaciona o bloco de transmissão t da matriz espalhamento com a condutância para estruturas mesoscópicas [23, 2].

1.4 ESTATÍSTICA DE CONTAGEM DE CARGAS E EFEITO DE INTERFERÊNCIA

Do ponto de vista da óptica quântica, o interessante seria calcular a probabilidade de um certo valor de n fótons atingirem um detector em um certo intervalo de tempo. Já em física mesoscópica, o análogo consiste em contar elétrons. No entanto, existem muitas diferenças entre estas partículas, dentre elas os elétrons interagem e os fótons não, isto, influencia na estatística de contagem. Como a probabilidade é normalizada, a partir disso podemos obter qualquer cumulante de uma distribuição. O primeiro cumulante consiste na média, o segundo a variância, o terceiro a assimetria e o quarto a curtose [39, 7].

Na seção anterior, apresentamos que a transferência de carga depende dos autovalores do produto tt^\dagger composto pelo bloco de transmissão da matriz espalhamento S . No caso de sistemas caóticos os autovalores são variáveis aleatórias que flutuam estatisticamente, logo os cumulantes da estatística de contagem são variáveis aleatórias. Então, vamos nos deter apenas aos dois primeiros cumulantes de transferência de carga, a condutância que esta ligada a média da distribuição da corrente e a potência do ruído de disparo que representa a variância da corrente [24, 25].

Como já tínhamos visto, a condutância aumenta à medida que aumentamos o número de canais abertos nos guias de onda, pois o número de autovalores de transmissão do sistema também aumentará. Na presença de uma diferença de potencial químico, os elétrons ejetados nas cavidades caóticas possuem probabilidade de transmissão diferente da probabilidade de reflexão, ocasionando o que chamamos de Localização Fraca. Em transporte eletrônico, a Localização Fraca trata-se da correção quântica a condutância clássica devido aos efeitos de interferências em virtude das trajetórias revertidas no tempo[11], veja a figura 1.8. No caso de partículas sem spin, esta interferência é construtiva devido à fase quântica do elétron ser a mesma na trajetória revertida no tempo, neste caso a probabilidade de reflexão é maior do que a probabilidade de transmissão, conseqüentemente a condutância é menor que a condutância no limite semiclássico. Em um acoplamento spin-órbita, ocorre o giro dos spin dos elétrons produzindo interferências destrutivas, diminuindo a probabilidade de reflexão ocasionando o aumento na condutância. Esse fenômeno ficou conhecido como Anti-localização Fraca [26, 27]. Ambos para a condutância a localização e anti-localização consistem na correção quântica da Lei de Ohm.

No limite semiclássico ($N_T \gg 1$) a correção da localização fraca é dada pela seguinte expressão:

$$\delta G_{LF} = \langle G \rangle - G_{LC}. \quad (1.34)$$

O primeiro termo do lado direito da expressão (1.34), consiste na média da condutância com simetria de reversão temporal e o segundo diz respeito a condutância no limite clássico. A palavra "localização" se dá pelo fato da correção ser usualmente negativa para a condutância ($G_{LF} < 0$) e o termo "fraca" devido a sua pequena magnitude ($G_{LF} \sim G_Q$) quando comparada ao termo dominante ($G_{LF} \ll G_{Ohm}$), no regime semiclássico, onde G_Q é condutância no regime quântico .

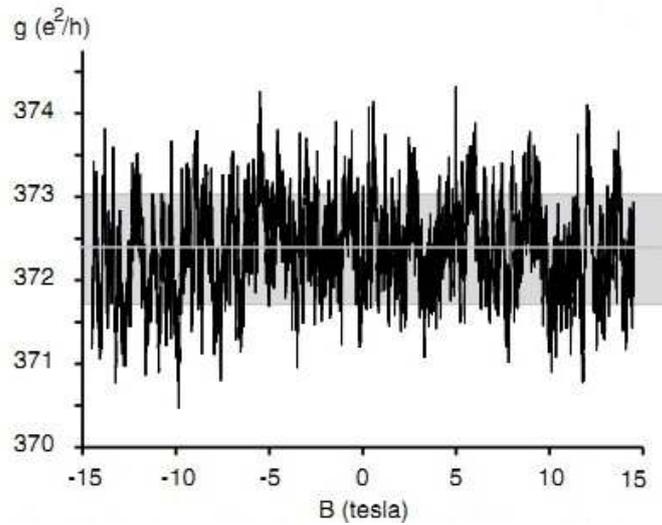


Figura 1.8 Flutuação da condutância em um condutor unidimensional submetido a ação de um campo magnético entre -15 e 15 tesla . Figura adaptada de [28].

Outra característica fundamental no transporte eletrônico são as flutuações na condutância, descobertas teoricamente por Altshuler, Lee e Stone em 1985[29]. Elas variam de amostra para amostra e desaparecem à medida que as temperaturas são elevadas e também podem ser observadas a partir de uma variação do campo magnético, veja a figura 1.8. No regime semiclássico, as flutuações universais da condutância só dependem das simetrias do sistema, $N \gg 1$.

A potência do ruído de disparo é o segundo cumulante na estatística de contagem ela fornece informações das flutuações dependentes do tempo na corrente elétrica em torno do seu valor médio com diferença de potencial não nula, levando em conta que a temperatura seja nula [14]. De fato, devemos considerar a corrente como um fluxo de cargas quantizadas [10]. Assim como, a condutância é obtida a parti do bloco de transmissão da matriz espalhamento, a potência do ruído de disparo também é obtida como se segue [14]

$$P = \frac{2e^3V}{h} \text{Tr}[tt^\dagger(1 - tt^\dagger)], \quad (1.35)$$

onde V é a diferença de potencial aplicada nos reservatórios.

1.5 BILHAR DE DIRAC CAÓTICO

Recentemente, estudos teóricos e experimentais estão sendo realizados em todos os ensembles das classes de universalidade, mas o principal foco está voltado para o bilhar quântico caótico com simetria SLS também chamado de Bilhar de Dirac caótico, veja a figura 1.9. Através dele as funções de onda dos elétrons incidentes são descritas pela equação de Dirac da mecânica quântica relativística, esta equação é apropriada para descrever sistemas com simetria

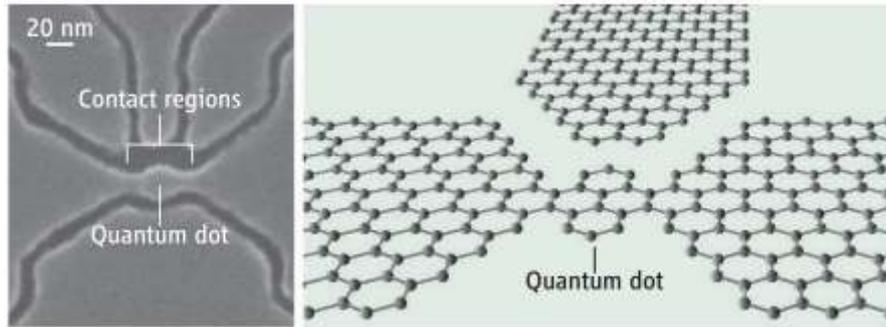


Figura 1.9 Ilustração do Bilhar de Dirac caótico com estrutura rede colmeia [30].

de subrede, que consiste em estruturas com duas partes simétricas (subrede) de forma espeelhada, veja a figura 1.10. Um exemplo desse sistema bipartido é o grafeno, onde sua estrutura é hexagonal e conhecida como rede colmeia [31, 32].

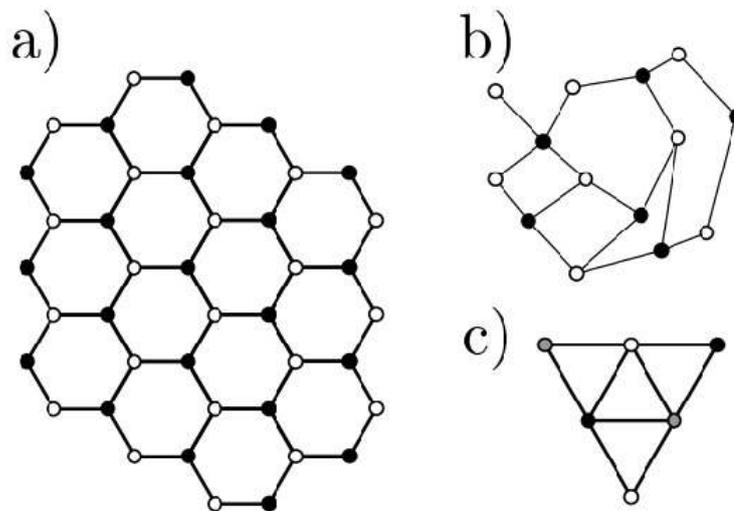


Figura 1.10 Exemplos de sistemas com simetria de subrede. a) Representa a estrutura do grafeno (rede colmeia). b) Representa uma estrutura com simetria de subrede irregular. c) Estrutura sem simetria de subrede. Figura retirada [31]. Nas figuras a) e b) nas estruturas os pontos pretos representa a subrede *A* e os brancos subrede *B* e na figura c) temos um exemplo de estrutura com três subredes *A*, *B* e *C*.

1.5.1 Grafeno

O grafeno foi descoberto em 2004 pelos pesquisadores Andre Geim e Konstantin Novoselov, onde foi possível sintetizar folhas de grafeno por meio da técnica de clivagem. Em 2010

(Prêmio Nobel de Física), começou a "febre do grafeno" [15]. O melhoramento no processo do grafite tem possibilitado isolamento do carbono bidimensional chamado de grafeno, bastante existente na natureza empilhada na forma do mineral grafite. As folhas de grafeno são interligadas por meio de forças de Van der Waals, as quais são ligações fracas que favorecem o deslizamento de um plano sobre o outro mediante a ação de uma força externa [15].

Este material consiste em uma camada monoatômica de átomos de carbono arranjados em uma rede de colmeia também chamada de favo de mel. É um material transparente, extremamente fino e bastante resistente. São semicondutores de gap nulo com um tipo de elétron e um tipo de buraco. A rede de colmeia é composta de duas subredes de carbono equivalentes A e B , ambas as bandas de energia se interceptam no ponto de Dirac ($\varepsilon = 0$), próximos da Zona de Brillouin. Suas propriedades eletrônicas são descritas pela equação de Dirac, da mecânica quântica relativística [1, 31, 32].

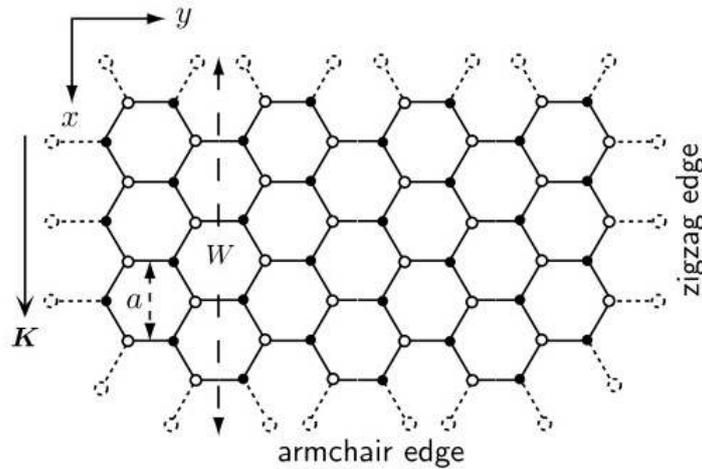


Figura 1.11 Rede colmeia de uma linha monoatômica de carbono. A rede apresenta duas bordas: zigzag (na horizontal) e armchair (na vertical) [14].

1.6 EQUAÇÃO DE DIRAC

A equação de Dirac da Mecânica Quântica Relativística é definida por [34, 84]:

$$v\vec{p} \cdot \vec{\sigma} \psi = \varepsilon \psi, \quad (1.36)$$

onde $v = \partial\varepsilon/\partial\hbar k$, $\vec{p} = -i\hbar(\partial/\partial x, \partial/\partial y)$, $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y)$, são a velocidade, o vetor momento e as matrizes de Pauli que atuam no spinor das subredes do grafeno $\psi = (\psi_A, \psi_B)$, respectivamente. As matrizes de Pauli são dadas por:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (1.37)$$

A equação (1.36) pode ser melhor analisada quando é escrita da seguinte forma:

$$-i\hbar v \begin{pmatrix} 0 & \partial_x - i\partial_y \\ \partial_x + i\partial_y & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix}. \quad (1.38)$$

A equação de Dirac bidimensional descreve estados com vetor de onda \vec{k} , centrado na primeira zona de Brillouin da rede hexagonal de uma linha monoatômica de carbono. É importante resaltar que a matriz que multiplica o spinor ψ é anti-diagonal, que implica em

$$-i\hbar v (\partial_x - i\partial_y) \psi_B = \varepsilon \psi_A \quad (1.39)$$

$$-i\hbar v (\partial_x + i\partial_y) \psi_A = \varepsilon \psi_B. \quad (1.40)$$

Podemos concluir que as funções de onda das subrede $B(A)$ somente levam a funções de onda da subrede $A(B)$, isto é, a função de onda esta sempre associada à subrede correspondente, veja a figura 1.11. Esta característica anti-diagonal do hamiltoniano esta associada a simetria de subrede ou simetria quiral do grafeno.

1.6.1 Simetria de reversão temporal

A simetria de reversão temporal consiste no complexo conjugado dos estados [34]. O operador reversão temporal atuando no spinor, é dado por :

$$\mathcal{T}\psi = (\psi_A^*, \psi_B^*), \quad (1.41)$$

onde o operador reverção temporal \mathcal{T} , tem a forma matricial

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} C = -(\tau_y \otimes \sigma_y)C, \quad (1.42)$$

onde C é um operador da conjugação complexa e τ_y a matriz de Pauli que atua nos valles ou pontos de Dirac.

O hamiltoniano de Dirac reverso no tempo é dado por: $\mathcal{T}H(\vec{A})\mathcal{T}^{-1} = H(-\vec{A})$, onde \vec{A} é o potencial magnético. A simetria de reversão temporal é preservada na ausência de campo magnético. Além desta simetria, o hamiltoniano de Dirac satisfaz a simetria antiunitária $SH(\vec{A})S^{-1} = H(-\vec{A})$, com \mathcal{S} dado pela matriz:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} C = i(\tau_0 \otimes \sigma_y)C, \quad (1.43)$$

τ_0 é a matriz unitária e o operador S , atua como um operador reversão temporal em apenas uma vale. Esta simetria é chamada simplética ela pode ser quebrada na ausencia de campo magnético.

1.6.2 Quiralidade

Classe Quiral é subdividida em três ensembles como as Classes de Wigner-Dyson: quiral circular ortogonal (chCOE), unitário (chCUE) e simplético (chCSE), de acordo com a tabela 1.1. A representação ch para quiral vem do inglês "chiral". A diferença entre os ensembles Quirais e Wigner-Dyson é a validade da simetria de subrede nos ensembles Quirais.

Seguindo as referências [5, 8] o Hamiltoniano de Dirac sem massa, deve satisfazer a seguinte relação de anti-comutação:

$$H = -\sigma_z H \sigma_z, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1_M & 0 \\ 0 & -1_M \end{pmatrix}. \quad (1.44)$$

O Hamiltoniano é uma matriz aleatória com dimensão $2M \times 2M$ e 1_M é a matriz identidade de dimensão $M \times M$. Podemos interpretar os M 1's e os -1 's na matriz σ_z como os números de átomos em cada subrede A e B , respectivamente. Neste caso temos um total de $2M$ átomos no Bilhar de Dirac. Devido a equação (1.44), o hamiltoniano do Bilhar de Dirac deve adquirir uma estrutura anti-diagonal [5]:

$$H = \begin{pmatrix} 0 & T \\ T^\dagger & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.45)$$

onde T é uma matriz de dimensão $M \times M$. Utilizando a referência [33], podemos relacionar o modelo hamiltoniano de Dirac com a matriz espalhamento S através da seguinte expressão

$$S(\varepsilon) = 1 - 2\pi W^\dagger (\varepsilon - H + i\pi W W^\dagger)^{-1} W. \quad (1.46)$$

Agora a matriz S tem dimensão $\bar{N}_T \times \bar{N}_T$, onde \bar{N}_T é o número total de canais abertos ou átomos nos terminais ou guias conectados ao Bilhar de Dirac. A matriz W acopla os níveis ressonantes da cavidade caótica aos canais abertos dos guias de onda e possui dimensão $2M \times \bar{N}_T$.

Substituindo a equação (1.44) na equação (1.46), podemos demonstrar que a matriz espalhamento, além da unitariedade, deve satisfazer a seguinte relação:

$$S(\varepsilon) = \Sigma_z S^\dagger(-\varepsilon) \Sigma_z, \quad \Sigma_z = \begin{pmatrix} 1_{N_T} & 0 \\ 0 & -1_{N_T} \end{pmatrix}, \quad (1.47)$$

onde N_T é o número total de canais abertos no guia. Assumimos que o transporte eletrônico através do Bilhar de Dirac ocorre somente próximo da energia zero ($\varepsilon = 0$), conhecido como ponto de Dirac [34]. Neste caso, reescrevemos a matriz espalhamento como

$$S = \Sigma_z S^\dagger \Sigma_z. \quad (1.48)$$

Para que a equação (1.48) seja satisfetida, é adequado utilizar as decomposições da matriz espalhamento em função em matrizes ortogonais para o chECO, unitária para chECU e simplética para chECS, de acordo com a Tabela 1.3. Estas decomposições serão utilizadas nos próximos capítulos para obter médias de observáveis do transporte eletrônico.

1.7 SUMÁRIO GERAL DA DISSERTAÇÃO

Vimos neste capítulo introdutório os principais conceitos em física mesoscópica e os principais efeitos de interferência que influenciam os observáveis de transporte. Fizemos uma breve revisão dos conceitos de física mesoscópica e da teoria de matrizes aleatórias, que descreve a universalidade em sistema com dinâmica caótica. Apresentamos o bilhar de Schrödinger e o bilhar de Dirac juntamente com os ensembles de Wigner-Dayson e os ensembles quirais que os descrevem, respectivamente. Usando a descrição da matriz espalhamento apresentaremos a técnica diagramática nos capítulos 2 e 3 e aplicaremos a mesma ao bilhar de Schrödinger e ao bilhar de Dirac.

No capítulo 2 será apresentada uma revisão do método de integração sobre o grupo unitário proposto pelo Brouwer e Beenakker [34], cujo objetivo é obter médias de funções polinômiais. A partir deste método diagramático obtivemos a média e a variância da condutância e da potência do ruído de disparo do transporte eletrônico no Bilhar de Schrödinger para todos os ensembles da classe de Wigner-Dyson.

No capítulo 3, será apresentada uma extensão do método diagramático, que consiste em decompor a matriz espalhamento em produtos de matrizes ortogonais para realizar estudos sobre o Bilhar de Dirac. A decomposição das matrizes é de acordo com a simetria do ensemble: uma matriz ortogonal para chCOE, matriz unitária para chCUE e por fim uma matriz simplética para chCSE, como podemos perceber a suas respectivas descrições na tabela 1.1. De fato, nos estendemos o método diagramático para solucionar este problema e a partir desta extensão obtivemos resultados significantes que proporcionaram a publicação do nosso artigo na Physical Review B [1].

No capítulo 4, estudaremos o problema de decoerência no Bilhar de Dirac, utilizando a extensão do método diagramático apresentado no capítulo 3. Este problema consiste em conectar um terceiro guia ideal ao Bilhar de Dirac. Os resultados obtidos neste capítulo também foram publicados no Physical Review B [1].

Por fim no capítulo 5, apresentaremos nossas conclusões e perspectivas de trabalhos futuros utilizando a extensão do método diagramático.

APLICAÇÃO DO MÉTODO DIAGRAMÁTICO AO BILHAR DE SCHRÖDINGER CAÓTICO

Neste capítulo, apresentamos uma breve revisão do Método Diagramático proposto pelo Brouwer e Beenakker [34] para integrar sobre o grupo unitário. A partir deste método, podemos obter resultados exatos para média da condutância, as flutuações universais da condutância assim como também para a potência do ruído de disparo no bilhar quântico caótico também conhecido como Bilhar de Schrödinger que são descritos pelos ensembles circulares de Wigner-Dyson. Este método consiste em representar funções compostas por elementos da matriz unitária na forma de diagramas.

2.1 INTEGRAÇÃO SOBRE O GRUPO UNITÁRIO

A técnica proposta por Brouwer e Beenakker [34] consiste na utilização de diagramas cujo objetivo é integrar sobre o grupo unitário $\mathcal{U}(N_T)$. O conceito de integrar refere-se a calcular a média de uma função e é representada pelo colchetes $\langle \dots \rangle$:

$$\langle f \rangle = \int f(U) dU, \quad (2.1)$$

onde $f(U)$ é uma função polinomial, U é a matriz unitária de dimensão $N_T \times N_T$ e a medida invariante dU é a medida de Haar no grupo unitário¹.

Considere a função polinomial $f(U) = U_{a_1 b_1} \dots U_{a_n b_n} U_{\alpha_n \beta_1}^* \dots U_{\alpha_m \beta_m}^*$ formada pelos elementos da matriz U . Para $n = m$ a média desta função difere de zero, caso contrário, a média possui valor nulo. A solução da (2.1) pode ser escrita por [2, 34]

$$\langle U_{a_1 b_1} \dots U_{a_n b_n} U_{\alpha_n \beta_1}^* \dots U_{\alpha_m \beta_m}^* \rangle = \delta_{nm} \sum_{P, P'} V_{P, P'} \prod_{j=1}^n \delta_{a_j \alpha_{P(j)}} \delta_{b_j \beta_{P'(j)}}. \quad (2.2)$$

Além disso $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ devem ser permutações dos elementos $a_1 \dots a_n$ e $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ devem ser as permutações de $(b_1 \dots b_n)$. O somatório é sobre todas as possíveis permutações de P e P' de $1, \dots, n$, onde $n = \sum_{k=1}^n c_k$ e c_k representa o comprimento de cada diagrama referente a sua respectiva função polinomial e os coeficientes $V_{P, P'}$ representam os pesos de cada diagrama da mesma.

¹Média invariante de Haar sobre o grupo ortogonal, unitário ou simplético [2].

Como exemplo consideramos $n = m = 1$. Neste caso, $P = P' = id$, a permutação identidade, $P^{-1}P'[2]$. Logo, a equação(2.2) resulta em

$$\langle U_{a_1 b_1} U_{\alpha_1 \beta_1}^* \rangle = V_1 \delta_{a_1 \alpha_1} \delta_{b_1 \beta_1}. \quad (2.3)$$

Para valores pequenos de n e m os resultados são facilmente obtidos da equação (2.2), mas o mesmo não ocorre para valores maiores. À medida que aumentamos os valores de n e m os resultados tornam-se complicados de se obterem, é a partir do fato que representamos as funções polinomiais na forma diagramática, facilitando a resoluções destas funções. Para tornar mais eficiente esta abordagem pode representar esta estrutura na forma diagramática como veremos a seguir.

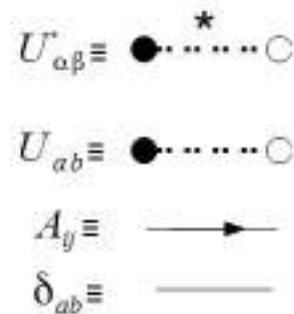


Figura 2.1 Regras de substituição para as matrizes unitárias U e U^* , o delta de Kronecker e uma matriz fixa, de modo geral.

Os diagramas, consistem em montar blocos onde os elementos das matrizes unitárias U_{ab} ($U_{\alpha\beta}^*$) são representados por linhas grossas e pontilhadas (com asterisco), ver a figura 2.1. O primeiro índice (a ou α) e o segundo (b ou β) são representados por pontos preto e branco, respectivamente. Definimos uma matriz fixa determinística A tal que seus elementos são representados por uma linha grossa e sólida, apontado do primeiro índice para o segundo, e as múltiplas permutações são representadas por uma linha fina (δ_{ab}), veja a figura 2.1.

Dado que a matriz U é unitária devemos seguir as seguintes regras para montar o diagrama: pontos pretos (brancos) só podem ser ligados a pontos pretos (brancos) através de um elemento da matriz fixa A . As permutações são geradas pelas linhas finas conectando todos os pontos pretos (brancos) de U aos pontos pretos (brancos) de U^* , representando um delta de Kronecker. Estas são as condições impostas para o estudo sobre o ensemble circular unitário.

Com relação a média, essa consiste em somar todas as permutações P e P' da estrutura cíclica e V_{c_1, \dots, c_k} representam os pesos dos diagramas sobre o grupo U , onde o coeficiente do ciclo c_k é a metade do número do conjunto formado pelas linhas fina e pontilhadas alternadamente contidas que formam o ciclo U de cada diagrama. Para encontrar as contribuições das permutações para a média de uma função é necessário obter:

- A estrutura cíclica das permutações ;
- A soma sobre os índices das matrizes fixas;

- Os traços das matrizes fixas através da análise do circuito. Cada traço das matrizes fixas corresponde a um ciclo- T ;
- O circuito fechado no diagrama constituído de linhas pontilhadas e linhas finas alternadamente é chamado de ciclo- U , este corresponde aos pesos do diagrama.

Para que sejam desenhados os diagramas é necessário utilizar as regras de substituição de acordo com a figura 2.1.

Como exemplo segue a média da função

$$f(U) = \text{Tr}(AUBU^\dagger). \quad (2.4)$$

A função $f(U)$ e a sua média são representadas diagramaticamente como mostrado na figura 2.2.

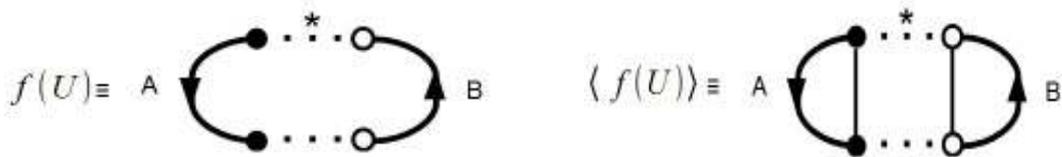


Figura 2.2 O diagrama a esquerda mostra a representando a função $f(U)$, equação (2.4). A direita o diagrama representa a média da função $\langle f(U) \rangle$, equação (2.5). Este contém dois ciclos- T que geram $\text{Tr}A$ e $\text{Tr}B$ e um ciclo- U com peso V_1 .

Para obter a média da função analisamos o diagrama a direita da figura 2.2. Partindo do ponto preto superior, seguindo a seta da matriz A até chegar ao ponto preto inferior e retornando pela linha fina até chegar ao ponto preto fechando o ciclo, temos o traço da matriz A . Do mesmo modo, para os pontos brancos, obtemos o traço da matriz B . Vale salientar que neste caso podemos percorrer a seta da matriz fixa no sentido contrário, que obtemos o mesmo resultado para o traço da matriz fixa. Agora para obter o peso do diagrama percorremos o caminho composto de uma linha fina e pontilhado alternadamente até retornar ao ponto de partida, fechando o ciclo- U . Em cada ciclo U , o total de cada conjunto formado por uma linha fina e pontilhada dividindo por dois equivale ao peso do diagrama. De fato, obtemos o seguinte resultado para a média da função $f(U)$:

$$\langle f(U) \rangle = V_1 \text{Tr}(A)\text{Tr}(B). \quad (2.5)$$

O valor para o peso do diagrama da equação (2.5) é dado por

$$V_1 = \frac{1}{N_T}, \quad (2.6)$$

para maiores detalhes com relação à obtenção do valor dos pesos veja as referências [2, 34]. De fato, $\text{Tr}(A)$ corresponde ao ciclo- T dos pontos pretos e o $\text{Tr}(B)$ ao ciclo- T dos pontos brancos. Vale salientar que A e B são matrizes fixas quaisquer.

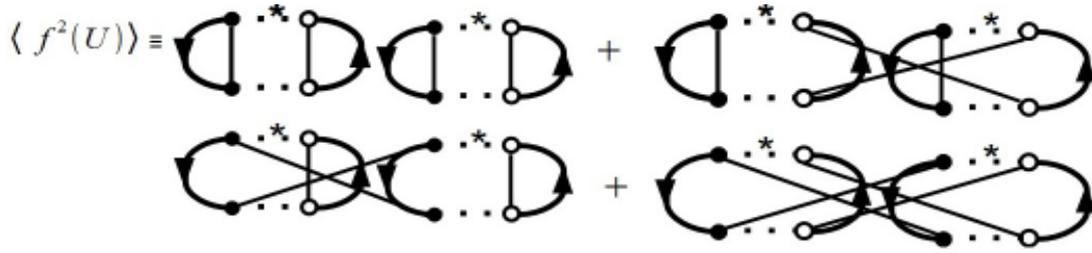


Figura 2.3 Diagramas para a média $f^2(U)$. O primeiro e o quarto diagramas ambos tem dois ciclo- U , logo seus pesos são iguais a $V_{1,1}$. O segundo e terceiro diagramas tem apenas um ciclo- U com peso V_2 .

De modo análogo, o resultado para $\langle f^2(U) \rangle$ é obtido do conjunto de diagramas, montados na figura 2.3 :

$$\begin{aligned} \langle f^2(U) \rangle &= V_{1,1}[(\text{Tr}(A))^2(\text{Tr}(B))^2 + \text{Tr}(A^2)\text{Tr}(B^2)] \\ &+ V_2[\text{Tr}(A^2)(\text{Tr}(B))^2 + (\text{Tr}(A))^2\text{Tr}(B^2)], \end{aligned} \quad (2.7)$$

os valores dos respectivos pesos estão listados no Anexo I [34, 2].

A definição da variância da função polinomial (2.4) é

$$\text{var}[f(U)] = \langle f^2(U) \rangle - \langle f(U) \rangle^2, \quad (2.8)$$

substituindo as equações (2.5) e (2.7) em (2.8) obtém

$$\begin{aligned} \text{var}[f(U)] &= V_{1,1}[(\text{Tr}(A))^2(\text{Tr}(B))^2 + \text{Tr}(A^2)\text{Tr}(B^2)] \\ &+ V_2[\text{Tr}(A^2)(\text{Tr}(B))^2 + (\text{Tr}(A))^2\text{Tr}(B^2)] \\ &- V_1^2[(\text{Tr}(A))^2(\text{Tr}(B))^2]. \end{aligned} \quad (2.9)$$

2.2 INTEGRAÇÃO DE MATRIZES SIMÉTRICAS DO GRUPO UNITÁRIO

Aplicando a técnica diagramática para o Ensemble Circular Ortogonal, utilizamos a mesmas regras utilizadas anteriormente para montar os diagramas do ECU, além do fato que $U^T = U$. Em virtude da nova simetria da matriz U , concluímos que $U_{ij} = U_{ji}$. Este novo vínculo possibilita ligarmos os pontos pretos aos pontos brancos através das linhas finas. De fato, a função $f(U)$ conforme a equação (2.4) passa a ser representada pelos diagramas da figura 2.4[34, 2].

Tomando os traços dos diagramas, temos então que o primeiro diagrama possui um ciclo- U dando a informação sobre o peso e dois ciclos- T correspondendo aos traços da matriz A e matriz B . O segundo, representa o novo diagrama gerado que possui um ciclo- U e um ciclo- T correspondendo ao $\text{Tr}(AB)$. O valor de $\langle f(U) \rangle$ é dada pela equação a seguir

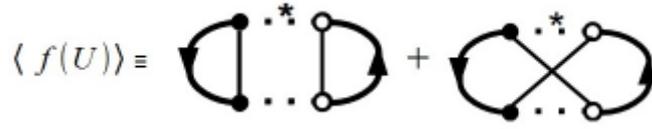


Figura 2.4 Os diagramas da média da função $\langle f(U) \rangle$ são representados pela soma de dois diagramas. O primeiro diagrama apresenta um ciclo- U e dois ciclos- T , o segundo apresenta um ciclo- U e um ciclo- T . Neste caso, surge mais um novo diagrama onde as bolas pretas estão ligadas a bolas brancas pelas linhas finas.

$$\langle f(U) \rangle = V_1[(\text{Tr}(A)\text{Tr}(B) + \text{Tr}(AB))], \quad (2.10)$$

onde

$$V_1 = \frac{1}{(N_T + 1)}. \quad (2.11)$$

Para obter a média do quadrado da função $\langle f^2(U) \rangle$, são necessários 24 diagramas a partir dos quais obtém-se o seguinte resultado:

$$\begin{aligned} \langle f^2(U) \rangle = & V_{1,1} \left[(\text{Tr}AB)^2 + \text{Tr}(A)\text{Tr}(B)\text{Tr}(AB) + (\text{Tr}(A))^2(\text{Tr}(B))^2 \right. \\ & + \text{Tr}(AB)\text{Tr}(A)\text{Tr}(B) + \text{Tr}(A^2)(B^2) + \text{Tr}(A^2)\text{Tr}(B^2) \\ & \left. + (\text{Tr}(AB))^2 + \text{Tr}(AB^2A) \right] + V_2 \left[\text{Tr}(A^2B^2) \right. \\ & + \text{Tr}(AB)\text{Tr}(B)\text{Tr}(A) + \text{Tr}(ABAB) + \text{Tr}(A^2)(\text{Tr}(B))^2 \\ & + \text{Tr}(A^2B)\text{Tr}(B) + \text{Tr}(AB^2)\text{Tr}(A) + \text{Tr}(A^2B)\text{Tr}(B) \\ & + \text{Tr}(A^2B)\text{Tr}(B) + (\text{Tr}(A))^2\text{Tr}(B^2) + \text{Tr}(AB^2A) \\ & + \text{Tr}(AB^2)\text{Tr}(A) + \text{Tr}(A)\text{Tr}(BAB) + \text{Tr}(ABA)\text{Tr}(B) \\ & \left. + \text{Tr}(A)\text{Tr}(B^2A) + \text{Tr}(ABAB) + \text{Tr}(A)\text{Tr}(BA)\text{Tr}(B) \right]. \quad (2.12) \end{aligned}$$

Os valores $V_{1,1}$ e V_2 para o COE estão listados no Anexo I [34]: A partir destas equações podemos obter a variância substituindo as equações (2.10) e (2.12) na equação (2.8).

2.3 INTEGRAÇÃO SOBRE O GRUPO SIMPLÉTICO DE MATRIZES QUARTENIÔNICA

Com intuito de obter os resultados esperados do Ensemble Circular Simplético utilizamos o processo de integração da referência [34]. A integração da função polinomial de dimensão $N_T \times N_T$ de matrizes quarteniônicas sobre o grupo unitário está relacionada com a integração

da função $\hat{f}(U)$ de matriz complexa de dimensão $N_T \times N_T$ sobre o ensemble circular ortogonal ou ensemble circular unitário. Por sua vez consiste em aumentar a dimensão da matriz do grupo unitário para uma matriz $2N_T \times 2N_T$. Neste trabalho, utilizaremos a função $f(U)$ do COE para obter $\hat{f}(U)$ no ECS. Para obtermos os resultados realizamos o seguinte procedimento:

1. A função $\hat{f}(U)$ do ECS é construída a partir de $f(U)$, equação (2.5), fazendo as substituições necessárias [34]. Os traços da função do ECO, obtidos a partir dos diagramas gerados da figura (2.4), são substituídos por $-1/2 \text{Tr}$ e os fatores numéricos N_T por $-2N_T$:

$$\hat{f}(U) = -\frac{1}{2}f(U) = -\frac{1}{2}(\text{Tr}AUBU^\dagger). \quad (2.13)$$

2. A média da função $\hat{f}(U)$ utiliza as mesmas regras de integração sobre o ECU;
3. A média $\langle \hat{f}(U) \rangle$, consiste em substituir o valores dos Tr por -2Tr e os fatores numéricos N_T por $-2N_T$ na equação (2.10):

$$\langle \hat{f}(U) \rangle = -\frac{1}{2(-2N_T + 1)} [(-2)(-2)\text{Tr}A\text{Tr}B - 2\text{Tr}AB] \quad (2.14)$$

$$\langle \hat{f}(U) \rangle = \frac{1}{(2N_T + 1)} [2\text{Tr}A\text{Tr}B - \text{Tr}AB]. \quad (2.15)$$

Para $\langle \hat{f}^2(U) \rangle$ e utilizando a regra de número 3, a equação (2.12) resulta em

$$\begin{aligned} \langle \hat{f}^2(U) \rangle = & V_{1,1} \left[(-2\text{Tr}AB)^2 - 8\text{Tr}(A)\text{Tr}(B)\text{Tr}(AB) + (-2\text{Tr}(A))^2(-2\text{Tr}(B))^2 + \right. \\ & -8\text{Tr}(AB)\text{Tr}(A)\text{Tr}(B) - 2\text{Tr}(A^2)(B^2) + 4\text{Tr}(A^2)\text{Tr}(B^2) + \\ & \left. + (-2\text{Tr}(AB))^2 - 2\text{Tr}(AB^2A) \right] + V_2 \left[-2\text{Tr}(A^2B^2) + \right. \\ & -8\text{Tr}(AB)\text{Tr}(B)\text{Tr}(A) - 2\text{Tr}(ABAB) - 2\text{Tr}(A^2)(-2\text{Tr}(B))^2 + \\ & +4\text{Tr}(A^2B)\text{Tr}(B) + 4\text{Tr}(AB^2)\text{Tr}(A) + 4\text{Tr}(A^2B)\text{Tr}(B) + \\ & +4\text{Tr}(A^2B)\text{Tr}(B) + (-2\text{Tr}(A))^2 - 2\text{Tr}(B^2) - 2\text{Tr}(AB^2A) + \\ & +4\text{Tr}(AB^2)\text{Tr}(A) + 4\text{Tr}(A)\text{Tr}(BAB) + 4\text{Tr}(ABA)\text{Tr}(B) + \\ & \left. +4\text{Tr}(A)\text{Tr}(B^2A) - 2\text{Tr}(ABAB) - 8\text{Tr}(A)\text{Tr}(BA)\text{Tr}(B) \right]. \quad (2.16) \end{aligned}$$

Os pesos $V_{1,1}$ e V_2 assumem os valores de acordo com o anexo I. É importante salientar que a variância $\hat{f}^2(U)$ é obtido substituindo (2.15) e (2.16) em (2.8).

2.4 TÉCNICA DIAGRAMÁTICA APLICADA AO BILHAR DE SCHRÖDINGER CAÓTICO

Nesta seção usaremos a técnica diagramática para obter médias de observáveis físicos referentes ao transporte de cargas, através do Bilhar Schrödinger caótico (BS), veja a figura (2.5). Neste caso, a matriz unitária é a matriz espalhamento que descreve o transporte de carga através do BS caótico. A matriz de espalhamento S tem dimensão $N_T \times N_T$ onde $N_T = N_1 + N_2$, N_1 e N_2 representam os números de canais abertos no guia de onda 1 e 2, respectivamente.

A condutância de Landauer-Büttiker, equação (1.33) pode ser reescrita em termos da matriz espalhamento [2, 34]

$$G = \frac{2e^2}{h} \text{Tr}(tt^\dagger) = \frac{2e^2}{h} \text{Tr}C_1 S C_2 S^\dagger. \quad (2.17)$$

Onde introduzimos as matrizes projeções C_1 e C_2 [34]:

$$C_1 = \begin{pmatrix} \hat{1}_{N_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \hat{1}_{N_2} \end{pmatrix}, \quad (2.18)$$

$\hat{1}_{N_i}$ é uma matriz identidade de dimensões ($N_i \times N_i$). Estas matrizes obedecem as seguintes condições: $C_1 + C_2 = \hat{1}$ e $C_1 C_2 = 0$. De fato, é importante notar que a equação (2.17) é equivalente a equação (2.5) quando $A = C_1$, $B = C_2$ e $U = S$.

2.4.1 Média e variância da condutância para ECU($\beta = 2$)

A média da função da condutância para o Ensemble Circular Unitário ($\beta = 2$) equivale a equação (2.5), os traços das matrizes projeções equivale ao número de canais abertos N_1 e N_2 , respectivamente. Fazendo as substituições necessárias obtemos o seguinte resultado para a média da condutância [35, 36]:

$$\frac{\langle G \rangle}{2e^2/h} = \frac{N_1 N_2}{N_1 + N_2}. \quad (2.19)$$

Como a condutância equivale ao inverso da resistência, no entanto, podemos definir a resistência como o inverso do número de canais abertos em cada guia, $R_i = \frac{h}{2e^2} \frac{1}{N_i}$, podemos reescrever a equação (2.19) da seguinte forma:

$$\langle G \rangle = \frac{1}{R_1 + R_2}. \quad (2.20)$$

De fato, o inverso da equação (2.20) corresponde a soma de duas resistências em série:

$$R_T = \frac{1}{\langle G \rangle} = R_1 + R_2. \quad (2.21)$$

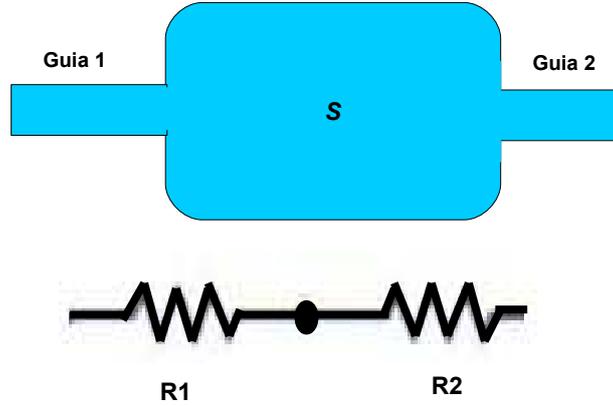


Figura 2.5 Bilhar quântico caótico ou Bilhar de Schrödinger se comporta semelhantemente a uma associação de resistores em série quando não há simetria de reversão temporal. A resistência é o inverso do número de canais abertos em cada guia.

Fazendo uma comparação direta entre os sistemas clássicos e quânticos, observa-se que o resultado do inverso da média da condutância da cavidade caótica conectada a dois guias equivale a uma associação de resistores em série, veja a figura (2.5).

Da mesma maneira, a variância da condutância adimensional é obtida a partir da equação (2.9), desta forma temos

$$\text{var}[G] = \frac{4e^2}{h^2} \frac{N_1^2 N_2^2}{N_T^2 (N_T^2 - 1)}. \quad (2.22)$$

2.4.2 Caso geral

Da mesma forma, podemos utilizar a solução de $\langle f(U) \rangle$ das equação (2.10) e (2.15) para obtermos a fórmula geral para a média da condutância :

$$\frac{\langle G \rangle}{2e^2/h} = \frac{N_1 N_2}{N_T - 1 + 2/\beta}, \quad (2.23)$$

onde β é o índice de simetria $\beta = 1, 2, 4$.

Por fim, podemos também obter a expressão geral da variância da condutância utilizando as regras diagramáticas apresentadas nas seções anteriores:

$$\frac{\text{var}[G]}{4e^2/h^2} = \frac{2N_T(N_1 - 1 + 2/\beta)(N_2 - 1 + 2/\beta)}{\beta(N_T - 2 + 2/\beta)(N_T - 1 + 4/\beta)(N_T - 1 + 2/\beta)^2}. \quad (2.24)$$

Estes resultados foram obtidos primeiramente por Baranger e Mello [36].

O comportamento das equações (2.23) e (2.24) são mostrados na figura (2.8) para o caso simétrico $N_1 = N_2 = N$ e anti-simétrico com $N_1 = 2$.

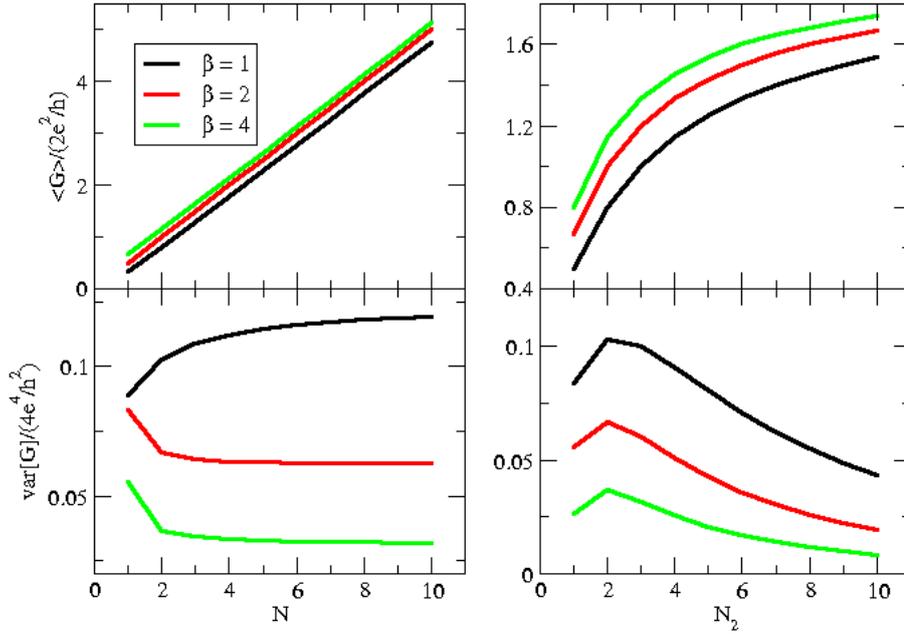


Figura 2.6 Comportamento da média e variância da condutância no caso simétrico, quando $N_1 = N_2 = N$ e anti-simétrico $N_1 = 2$.

2.4.3 Casos particulares

Tomando o limite semiclássico onde $N_1 + N_2 \gg 1$ nas equações (2.23) e (2.24) obtemos os seguintes resultados:

$$\frac{\langle G \rangle}{2e^2/h} = \frac{N_1 N_2}{N_1 + N_2} + \left(\frac{\beta - 2}{\beta} \right) \frac{N_1 N_2}{(N_1 + N_2)^2} + \left(\frac{\beta - 2}{\beta} \right)^2 \frac{N_1 N_2}{(N_1 + N_2)^3} + \mathcal{O}(N_T^{-2}) \quad (2.25)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\text{var}[G]}{4e^2/h^2} &= \frac{2N_1^2 N_2^2}{\beta(N_1 + N_2)^4} \\ &- \frac{2N_1 N_2 (10N_1 N_2 - 3\beta N_1 N_2 + 2N_1^2 + \beta N_1^2 - 2N_2^2 + \beta N_2^2)}{\beta^2(N_1 + N_2)^5} + \mathcal{O}(N_T^{-2}). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Perceba que na equação (2.25), o primeiro termo é a lei de Ohm da física clássica como foi mostrado anteriormente na equação (2.21). Neste caso, a associação em série corresponde a dois condutores de condutância N_1 e N_2 . O segundo termo da equação (2.25) corresponde a correção de localização fraca para $\beta = 1$, antilocalização fraca para $\beta = 4$ e para $\beta = 2$ este termo é nulo.

No caso de guias simétrico, $N_1 = N_2 \equiv N$, as equações (2.25) e (2.26) se simplificam em

$$\frac{\langle G \rangle}{2e^2/h} = \frac{N}{2} + \left(1 - \frac{2}{\beta}\right) \frac{1}{4} + \mathcal{O}(N_T^{-1}) \quad (2.27)$$

e

$$\frac{\text{var}[G]}{4e^4/h^2} = \frac{1}{8\beta} + \mathcal{O}(N_T^{-1}). \quad (2.28)$$

Observamos que o termo da localização fraca e a variância da condutância neste regime não dependem do número de canais do sistema, somente do índice de simetria β [37, 38].

2.5 MÉDIA DA POTÊNCIA DO RUÍDO DE DISPARO

A partir do método diagramático, vamos apresentar como obter resultados para a média e a variância da potência do ruído de disparo. A equação que o descreve, escrita em função da matriz transmissão t , é dada por

$$P = \frac{2e^3 V}{h} \text{Tr}[tt^\dagger(1 - tt^\dagger)]. \quad (2.29)$$

No entanto, a potência do ruído de disparo adimensional que corresponde ao segundo momento irreduzível é definida como [14]:

$$p = g - h = \text{Tr}[tt^\dagger - (tt^\dagger)^2], \quad (2.30)$$

onde $p = \frac{P}{2e^3/h}$.

2.5.1 Segundo momento para ECU ($\beta = 2$)

Percebemos que na equação (2.30) surge o termo $\text{Tr}(tt^\dagger)^2$, esse termo diz respeito ao segundo momento da mecânica estatística. Então, para obtermos a média da potência do ruído de disparo adimensional, $\langle p \rangle$, temos que obter $\langle h \rangle$. A definição de h em função da matriz espalhamento é :

$$h = \text{Tr}(tt^\dagger)^2 = \text{Tr}C_1 S C_2 S^\dagger C_1 S C_2 S^\dagger. \quad (2.31)$$

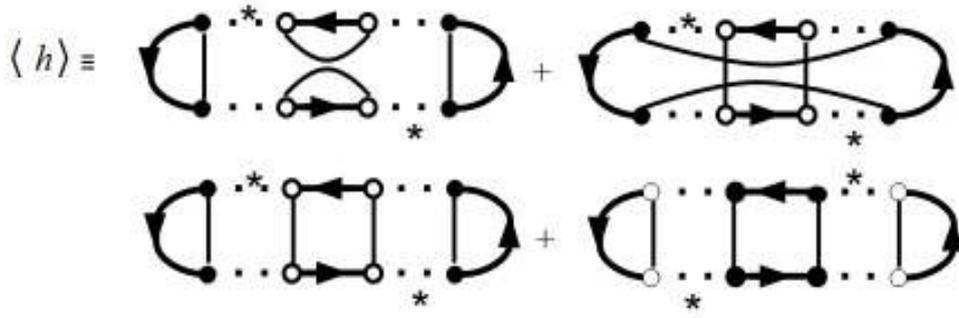


Figura 2.7 Os dois primeiros diagramas apresentam um ciclo- U com momento V_2 , quatro e dois ciclo- T , respectivamente. Nos dois últimos diagramas cada apresentam dois ciclo- U com peso $V_{1,1}$ e quatro ciclo- T .

Representando a fórmula acima na estrutura diagramática para ECU obtemos a figura (2.7). Dos diagramas da figura (2.7) encontramos

$$\langle h \rangle = V_{1,1}(\text{Tr}C_1)^2\text{Tr}C_2^2 + V_2\text{Tr}C_1^2\text{Tr}C_2^2 + V_2(\text{Tr}C_1)^2(\text{Tr}C_2)^2 + V_{1,1}\text{Tr}C_1^2(\text{Tr}C_2)^2. \quad (2.32)$$

Logo, a equação resultante para a média do segundo momento é dada por:

$$\langle h \rangle = \frac{N_1N_2(N_1^2 + N_1N_2 + N_2^2 - 1)}{N_T(N_T^2 - 1)}. \quad (2.33)$$

Substituindo as equações (2.19) e (2.33) em (2.30) temos a média da potência do ruído de disparo para ECU ($\beta = 2$) dada por:

$$\langle p \rangle = \frac{N_1N_2(N_2^2 + 1)(N_1 + 1)}{N_T(N_T + 1)(N_T + 3)}. \quad (2.34)$$

2.5.2 Fórmula geral

A equação geral da média de $\langle h \rangle$ pode ser obtida utilizando as regras diagramáticas discutidas no decorrer deste capítulo. Desta forma obtemos a seguinte expressão [2, 39]:

$$\langle h \rangle = \frac{N_1N_2(N_1^2 + N_1N_2 + N_2^2 - 2N + 1 + \frac{4N_T - 6}{\beta} + \frac{4}{\beta^2})}{(N_T - 2 + \frac{2}{\beta})(N_T - 1 + \frac{2}{\beta})(N_T - 1 + \frac{4}{\beta})}, \quad (2.35)$$

Portanto, obtemos a média da potência do ruído do disparo substituindo as equações (2.23) e (2.35) na equação (2.30):

$$\langle p \rangle = \frac{N_1 N_2 (N_1 - 1 + 2/\beta)(N_2 - 1 + 2/\beta)}{(N_T - 2 + 2/\beta)(N_T - 1 + 2/\beta)(N_T - 1 + 4/\beta)}. \quad (2.36)$$

Estas equações foram obtidas nas referências [39, 40, 42, 56].

2.6 VARIÂNCIA DA POTÊNCIA DO RÚIDO DE DISPARO

Nesta seção, dedicamos a obter a variância da potência do ruído de disparo. Para este cálculo precisamos fazer novos diagramas, um total de 648 diagramas contribuiu para obter o resultado da variância. De modo geral, utilizamos a equação a seguir para obter a variância :

$$\text{var}[p] = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2. \quad (2.37)$$

Neste caso, foi necessário obter o valor de $\langle p^2 \rangle$. Em que a equação que possibilita obter o valor desta média é dada por

$$\langle p^2 \rangle = \langle g^2 \rangle - \langle h^2 \rangle - 2\langle gh \rangle. \quad (2.38)$$

2.6.1 Variância da potência do ruído de disparo para o ECU ($\beta = 2$)

Para obtermos o resultado da variância da potência do ruído para ECU precisamos obter primeiramente os valores de $\langle h^2 \rangle$ e $\langle gh \rangle$, $\langle g^2 \rangle$. Para obtermos os resultados para $\langle h^2 \rangle$ e $\langle gh \rangle$ foram necessários dois novos conjuntos de diagramas: 36 para o cálculo de $\langle gh \rangle$ e 512 para $\langle h^2 \rangle$. Os 612 novos diagramas todos foram feitos utilizando a técnica diagramática sobre o grupo unitário. Por fim chegamos aos seguintes resultados:

$$\begin{aligned} \langle h^2 \rangle = & N_1^2 N_2^2 (42N_1 N_2 + 6 + 15N_1^2 + 15N_2^2 - 34N_1^2 N_2^2 + N_2^6 - 10N_2^4 + N_1^6 - \\ & + 10N_1^4 + 4N_1 N_2^5 + 8N_1^2 N_2^4 + 10N_1^3 N_2^3 + 8N_1^4 N_2^2 - 30N_1 N_2^3 + 4N_1^5 N_2 + \\ & - 30N_1^3 N_2) / [N_T^2 (N_T - 1)(N_T + 1)(N_T - 2)(N_T + 2)(N_T + 3)(N_T - 3)] \end{aligned} \quad (2.39)$$

e

$$\langle gh \rangle = \frac{(N_1^2 + N_1 N_2 - 3 + N_2^2) N_1^2 N_2^2}{(N_T + 1)(N_T - 1)(N_T + 2)(N_T - 2)}. \quad (2.40)$$

Substituindo (2.7), (2.39) e (2.40) na equação (2.38), obtemos a seguinte expressão para a média do quadrado da potência do ruído

$$\begin{aligned} \langle p^2 \rangle = & N_1^4 + N_1^4 N_2^2 + 2N_1^3 N_2^3 - 4N_1^3 N_2 - 4N_1^2 N_2^2 - 3N_1^2 + \\ & + N_1^2 N_2^4 + 6N_1 N_2 - 4N_1 N_2^3 + 6 - 3N_2^2 + N_2^4) N_1^2 N_2^2 / \\ & [N_T^2 (N_T + 1)(N_T - 1)(N_T + 2)(N_T - 2)(N_T + 3)(N_T - 3)] \end{aligned} \quad (2.41)$$

Enfim, substituindo as equações (2.36) e (2.41) em (2.37) chegamos ao resultado da variância da potência do ruído de disparo

$$\begin{aligned} \text{var}[p] = & [N_1^2 N_2^2 (-6 + 9N_1^2 - 26N_1^2 N_2^2 + 8N_1^3 N_2^3 + 9N_2^2 + 6N_1 N_2 + 4N_1^3 N_2 + \\ & + 4N_1 N_2^3 - 4N_1^4 - 4N_2^4 + N_2^6 + N_1^6 - 2N_1 N_2^5 - 2N_1^5 N_2 + N_1^2 N_2^4 + N_1^4 N_2^2)] / \\ & [(N_T^2 (N_T + 1)^2 (N_T - 1)^2 (N_T + 2)(N_T - 2)(N_T + 3)(N_T - 3))]. \end{aligned} \quad (2.42)$$

2.6.2 Variância da potência do ruído para ECO e ECS ($\beta = 1$ e $\beta = 4$)

O procedimento para obter os resultados de $\beta = 1$ e $\beta = 4$ é análogo ao do $\beta = 2$, mas é necessário obedecer as regras da técnica diagramática dos respectivos ensembles. Os resultados obtidos para a variância da potência do ruído dos respectivos ensembles são:

$$\begin{aligned} \text{var}[p]_{\beta=1} = & [2N_1 N_2 (N_2 + 1)(N_1 + 1)(36N_1 + 36N_2 + 24N_2^2 + 24N_1^2 - 99N_1 N_2^2 - 99N_1^2 N_2 - 8N_1^3 N_2 + \\ & - 8N_1 N_2^3 + 4N_1^4 N_2 + 4N_1 N_2^4 + 74N_1^3 N_2^2 + 74N_1^2 N_2^3 + 64N_1^3 N_2^3 + 20N_1^2 N_2^4 \\ & - 6N_2^5 N_1 + 20N_1^4 N_2^2 + 9N_1^4 N_2^3 + 9N_1^3 N_2^4 + 9N_1^4 N_2^3 + 9N_1^3 N_2^4 - 6N_1^5 N_2 - N_2^5 N_1^2 \\ & - N_2^6 N_1 - N_1^5 N_2^2 - N_1^6 N_2 - 26N_1^2 N_2^2 - 22N_1 N_2 - 41N_1^3 - 41N_2^3 - 30N_1^4 - 30N_2^4 \\ & + 4N_2^5 + 6N_2^6 + 4N_1^5 + 6N_1^6 + N_2^7 + N_1^7) / ((N_T - 2)(N_T - 1)(N_T)^2 \\ & (N_T + 1)^2 (2 + N_T)(N_T + 3)^2 (N_T + 5)(N_T + 7))]. \end{aligned} \quad (2.43)$$

$$\begin{aligned} \text{var}[p]_{\beta=4} = & [N_1 N_2 (2N_2 - 1)(2N_1 - 1)(9N_1 + 9N_2 - 12N_1^2 - 12N_2^2 + 60N_1^4 - 41N_1^3 - 41N_2^3 + 60N_2^4 + \\ & + 16N_1^5 + 16N_2^5 - 48N_2^6 - 48N_1^6 + 16N_2^7 + 16N_1^7 - 512N_1^3 N_2^3 + 52N_1^2 N_2^2 + 11N_1 N_2 + \\ & - 99N_1 N_2^2 - 99N_2 N_1^2 + 16N_2 N_1^3 + 16N_1 N_2^3 + 16N_1 N_2^4 + 16N_2 N_1^4 + 296N_1^3 N_2^2 + \\ & - 160N_1^4 N_2^2 - 160N_1^2 N_2^4 - 16N_1^5 N_2^2 + 144N_1^4 N_2^3 + 144N_1^3 N_2^4 - 16N_1^2 N_2^5 + \\ & + 296N_1^2 N_2^3 + 48N_2 N_1^5 - 16N_2 N_1^6 + 48N_1 N_2^5 - 16N_1 N_2^6)] / \\ & [((N_T + 1)(2N_T + 1)N_T^2 (2N_T - 1)^2 (-1 + N_T)(2N_T - 3)^2 (2N_T - 5)(2N_T - 7))]. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Os resultados obtidos utilizando o método diagramático para a média e variância da condutância, tais como os resultado da média da potência do ruído de disparo foram comparados com os resultados das referências [34, 2]. O resultado para a média da variância da potência do ruído de disparo foi comparado com o resultado da referência [39] obtido por outro método matemático e comparados através das simulações computacionais observando a eficácia da técnica diagramática. Os resultados das equações (2.36), (2.42), (2.43) e (2.44) são mostrados na figura 2.8

2.6.3 Casos particulares

- **Caso de guias simétrico**, os resultados da média e variância da potência do ruído de disparo podem ser melhor apresentados tomando $N_1 = N_2 = N$. Neste caso, a equação geral para a média do ruído é

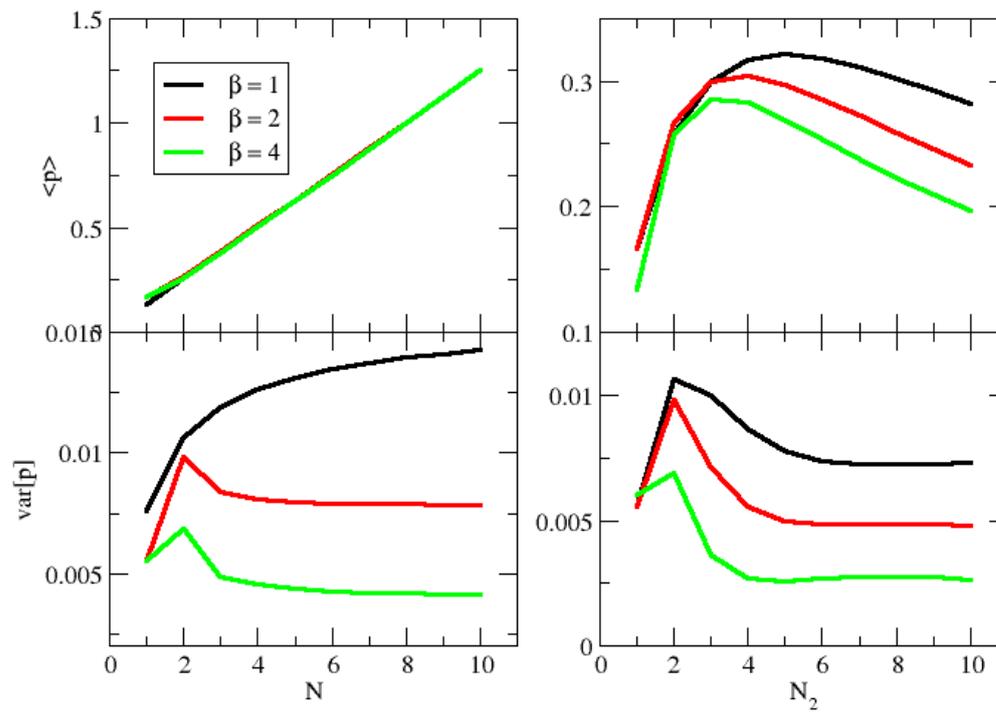


Figura 2.8 Comportamento da média e variância da potência do ruído de disparo no caso simétrico, quando $N_1 = N_2 = N$ e anti-simétrico $N_2 = 2$.

$$\langle p \rangle = \frac{N^4(N-1 + \frac{2}{\beta})^2}{(2N-2 + \frac{2}{\beta})(2N-1 + \frac{2}{\beta})(2N-1 + \frac{4}{\beta})} \quad (2.45)$$

A seguir mostraremos os resultados obtidos para a variância da potência do ruído de disparo para as três classes de simetria do Bilhar quântico caótico.

Para $\beta = 2$:

$$\text{var}[p] = \frac{1}{8} \frac{N^2(4N^4 - 9N^2 + 3)}{(4N^2 - 9)(4N^2 - 1)^2}. \quad (2.46)$$

Para $\beta = 1$, obtivemos os seguintes resultados:

$$\text{var}[p] = \frac{1}{4} \frac{(1+N)N(8N^5 + 60N^4 + 142N^3 + 91N^2 - 49N - 36)}{(2N+7)(2N-1)(2N+1)^2(2N+3)^2(2N+5)}. \quad (2.47)$$

Por fim o resultado obtidos para $\beta = 4$

$$\text{var}[p] = \frac{1}{4} \frac{(-1+2N)N(128N^5 - 480N^4 + 568N^3 + 182N^2 - 49N - 18)}{[(4N-7)(4N+1)(4N-1)^2(4N-3)^2(4N-5)]}. \quad (2.48)$$

- No **Regime Semi-clássico** onde $N_1 + N_2 \gg 1$ a equação (2.36) e (2.46; 2.47 e 2.48) como pode ser vista na forma expandida, temos os seguintes resultados:

$$\langle p \rangle = \frac{N_1^2 N_2^2}{(N_1 + N_2)^3} - \frac{(\beta - 2) N_1 N_2 (N_1 - N_2)^2}{\beta (N_1 + N_2)^4} + \mathcal{O}(N^{-1}) \quad (2.49)$$

$$\text{var}[p] = \frac{2 N_1^2 N_2^2 (N_1^4 - 4N_2 N_1^3 + 8N_1^2 N_2^2 - 4N_2^3 N_1 + N_2^4)}{\beta (N_1 + N_2)^8} + \mathcal{O}(N^{-1}) \quad (2.50)$$

- **Regime Simétrico**, $N_1 = N_2 = N \gg 1$, os resultados de todos os ensembles ($\beta = 2, \beta = 1, \beta = 4$) tendem para os seguintes resultados universais [11], respectivamente:

$$\langle p \rangle_{\beta=1,2,4} = \frac{1}{8} N \quad (2.51)$$

$$\text{var}[p] = \frac{1}{64\beta}. \quad (2.52)$$

Da equação (2.49) a localização fraca é nula para todos os β .

MÉTODO DIAGRAMÁTICO APLICADO AO BILHAR DE DIRAC

Neste capítulo, abordaremos o método diagramático para obter a média e variância da condutância através de um bilhar quântico caótico com simetria de sub-rede ou chiral também conhecido como bilhar de Dirac caótico [1, 43]. Para obter estes resultados foi necessário introduzir uma extensão do método diagramático de integração sobre o grupo unitário, pois o método usado no capítulo anterior não pode ser usado diretamente para calcular médias sobre os grupos ortogonais. Como vimos na tabela 1.3 as matrizes com simetria de sub-rede (SLS) podem ser decompostas em produtos de matrizes ortogonais [1].

3.1 INTEGRAÇÃO SOBRE O GRUPO ORTOGONAL

Agora vamos discutir o método de integração sobre o grupo ortogonal. Seja a média da função [2, 60] :

$$\langle f \rangle = \int f(U) dU, \quad (3.1)$$

onde $f(U)$ é uma função polinomial e U é a matriz ortogonal de dimensão $N_T \times N_T$. Considerando a função polinomial $f(U) = U_{a_1 b_1} \dots U_{a_n b_n}$ para $n = m$ a média difere de zero, caso contrário, a média possui valor nulo. A solução geral da equação (3.1) é

$$\langle U_{a_1 b_1} \dots U_{a_n b_n} \rangle = \delta_{nm} \sum_{P, P'} V_{P, P'} \prod_{j=1}^n \delta_{a_j a_{P(j)}} \delta_{b_j b_{P'(j)}}. \quad (3.2)$$

Sendo, P as permutações dos elementos $a_1 \dots a_n$ e P' as permutações de $b_1 \dots b_n$. Como exemplo, consideramos $n = m = 1$ o somatório sobre P e P' se estende pela permutação identidade. Neste caso, a permutação $P = P' = id$ é igual a identidade, $P^{-1}P'$. Logo, a equação (3.2) resulta em

$$\langle U_{a_1 b_1} U_{a_2 b_2} \rangle = V_1 \delta_{a_1 a_2} \delta_{b_1 b_2}. \quad (3.3)$$

Percebemos que este método de integração não é eficiente para obter resultados sobre o grupo ortogonal. Desta forma faz-se necessário introduzir uma extensão do método diagramático apresentado no capítulo anterior para que possamos integrar sobre o grupo ortogonal de

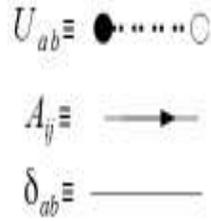


Figura 3.1 Regras de substituição para as matrizes unitárias U , o delta de Kronecker e uma matriz fixa A , sobre o grupo ortogonal.

forma mais eficiente. Agora temos como objetos básicos da regra diagramática os blocos representados na figura 3.1. Dado que a matriz U é ortogonal, ou seja, seus elementos são reais, isto favorece a conexão de todos os pontos pretos entre eles, sem restrições, o mesmo vale para os pontos brancos. De modo geral, definimos a matriz fixa A e a representamos pela linha grossa e as possíveis permutações representadas pelo o delta de Kronecker, veja a figura 3.1.

Como exemplo, vamos calcular a média da função a baixo:

$$f(U) = \text{Tr}(AUBU) \tag{3.4}$$

A função e a média da equação (3.4) estão representadas na figura 3.2. A partir do diagrama a esquerda da figura 3.2, obtemos o traço da matriz A referente ao ciclo T dos pontos pretos, o traço da matriz B referente ao ciclo T dos pontos brancos e um ciclo U referente ao peso do diagrama. Neste caso, obtemos o seguinte resultado para a média da equação (3.4)

$$\langle f(U) \rangle = V_1 \text{Tr}(A)\text{Tr}(B) \tag{3.5}$$

e o peso V_1 assume o valor listado no anexo II, para maiores detalhes de como obter o valor atribuído ao peso veja a referência [60].



Figura 3.2 À esquerda representamos a função $f(U)$, equação (3.4), diagramaticamente. À direita o diagrama representa a média da função $f(U)$, equação (3.5). Este contém dois ciclos- T que geram $\text{Tr}A$ e $\text{Tr}B$ e um ciclo- U com peso V_1 .

De modo análogo, calculamos o valor da média do quadrado da função (3.4), os diagramas que contribuem para obter este resultado estão presentes na figura 3.3, temos

$$\begin{aligned} \langle f^2(U) \rangle &= V_{11}[(\text{Tr}(A))^2(\text{Tr}(B))^2 + \text{Tr}(A^2)\text{Tr}(B^2) + \text{Tr}(A^2)\text{Tr}(B^2)] \\ &+ V_2[(\text{Tr}(A))^2\text{Tr}(B^2) + \text{Tr}(A^2)(\text{Tr}(B))^2 + \text{Tr}(A^2)\text{Tr}(B^2) \\ &+ \text{Tr}(A^2)\text{Tr}(B^2) + \text{Tr}(A^2)(\text{Tr}(B))^2 + (\text{Tr}(A))^2\text{Tr}(B^2)]. \end{aligned} \tag{3.6}$$

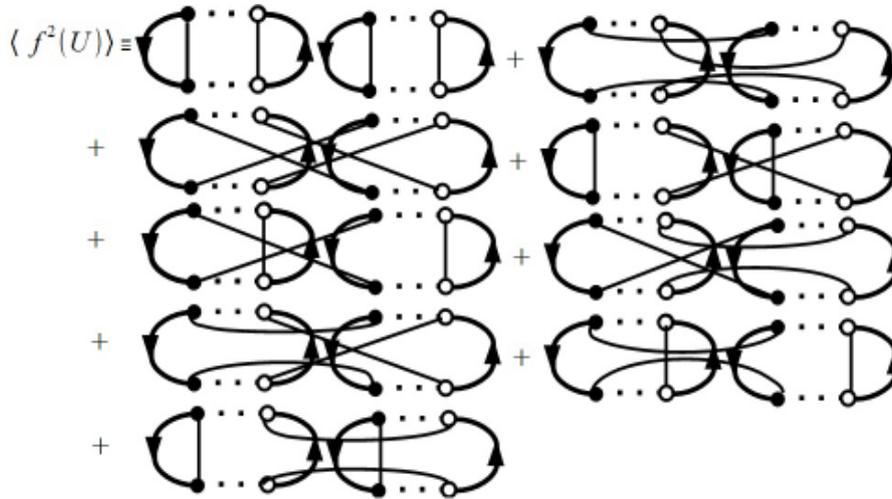


Figura 3.3 Diagramas que representam a equação (3.6), neles apresentaram as possíveis permutações para gerarem o valor da equação (3.6)

Para obter a variância da função $f(U)$ apenas substitui os valores das equações (3.5) e (3.6) na equação (2.8), tal que temos

$$\begin{aligned}
 \text{var}[f(U)] &= V_{11}[(\text{Tr}(A))^2(\text{Tr}(B))^2 + \text{Tr}(A^2)\text{Tr}(B^2) + \text{Tr}(A^2)\text{Tr}(B^2)] \\
 &+ V_2[(\text{Tr}(A))^2\text{Tr}(B^2) + \text{Tr}(A^2)(\text{Tr}(B))^2 + \text{Tr}(A^2)\text{Tr}(B^2) + \text{Tr}(A^2)\text{Tr}(B^2)] \\
 &+ \text{Tr}(A^2)(\text{Tr}(B))^2 + (\text{Tr}(A))^2\text{Tr}(B^2)] - [V_1^2(\text{Tr}(A))^2(\text{Tr}(B))^2]. \tag{3.7}
 \end{aligned}$$

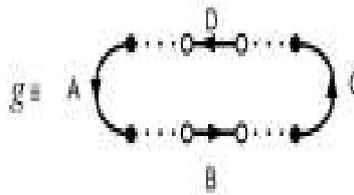


Figura 3.4 Representação diagramática da equação (3.8) .

Como segundo exemplo, temos a função $g(U)$ que é definida a seguir

$$g = \text{Tr}(AUBUCUDU). \tag{3.8}$$

O diagrama que representa a equação (3.8) esta representada na figura 3.4 e o conjunto de diagramas que representam a média desta função são os da figura 3.5. Dos diagramas da figura

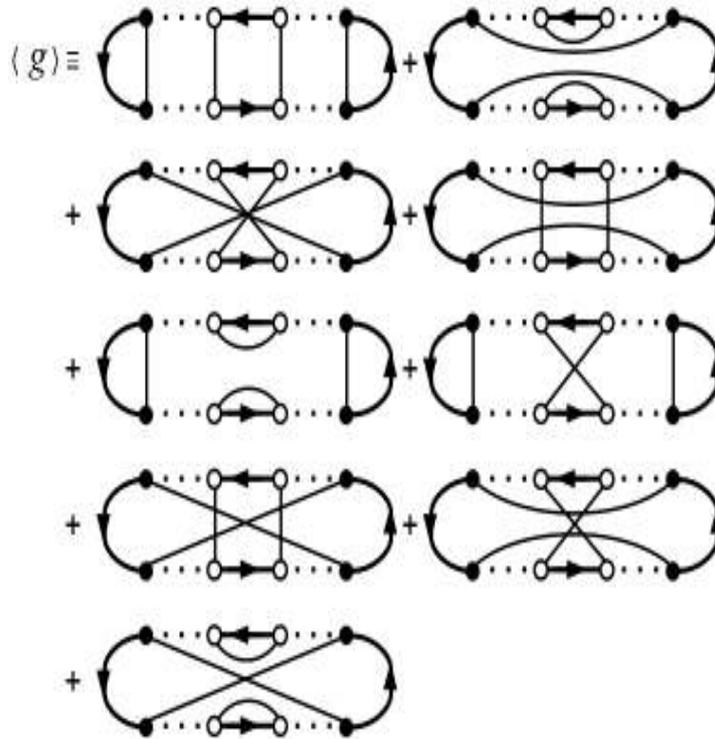


Figura 3.5 Representação diagramática da média da equação (3.8). Note que o primeiro, segundo e terceiro diagramas possuem dois ciclos-U equivalentes ao peso V_{11} , os demais diagramas possuem um ciclo-U equivalente ao peso V_2 .

3.5, obtemos o seguinte resultado para a média da função (3.8):

$$\begin{aligned}
 \langle g(U) \rangle &= V_{11}[\text{Tr}(A)\text{Tr}(BD)\text{Tr}(C) + \text{Tr}(AC)\text{Tr}(B)\text{Tr}(D) \\
 &+ \text{Tr}(AC)\text{Tr}(BD)] + V_2[\text{Tr}(AC)\text{Tr}(BD) + \text{Tr}(A)\text{Tr}(BD)\text{Tr}(C) \\
 &+ \text{Tr}(AC)\text{Tr}(BD) + \text{Tr}(A)\text{Tr}(B)\text{Tr}(D)\text{Tr}(C) \\
 &+ \text{Tr}(AC)\text{Tr}(BD) + \text{Tr}(AC)\text{Tr}(B)\text{Tr}(D)].
 \end{aligned}
 \tag{3.9}$$

Os pesos V_{11} e V_2 encontra-se no anexo II [60]. O próximo passo é obter a média quadrática da função $g(U)$. Para este fim, foi necessário obter 11025 diagramas. Contudo, dentro deste conjunto de diagramas identificamos que 540 são não nulos e contribuem para a média da função $\langle g^2(U) \rangle$. Na figura 3.6 apresentamos cinco exemplos dos diagramas referentes a esta média. A partir destes diagramas, temos o seguinte resultado ilustrativo:

$$\begin{aligned}
 \langle g^2(U) \rangle &= V_{1,1,1,1}(\text{Tr}(AC))^2\text{Tr}(B^2)\text{Tr}(A^2) + V_{1,2,1}\text{Tr}(AC^2A)(\text{Tr}(B))^2(\text{Tr}(D))^2 \\
 &+ V_{2,2}(\text{Tr}(AC))^2\text{Tr}(B^2)(\text{Tr}D)^2 + V_{3,1}\text{Tr}(ACAC)(\text{Tr}(B))^2\text{Tr}(D^2) \\
 &+ V_4(\text{Tr}(AC))^2\text{Tr}(B^2)(\text{Tr}A)^2 + \dots
 \end{aligned}
 \tag{3.10}$$

No resultado completo para a equação (3.10) temos nove diagramas com peso $V_{1,1,1,1}$, 78 com peso $V_{1,1,2}$, 63 com peso $V_{2,2}$, 168 com peso $V_{1,3}$ e 222 com peso V_4 . Os pesos estão listados no Anexo II.

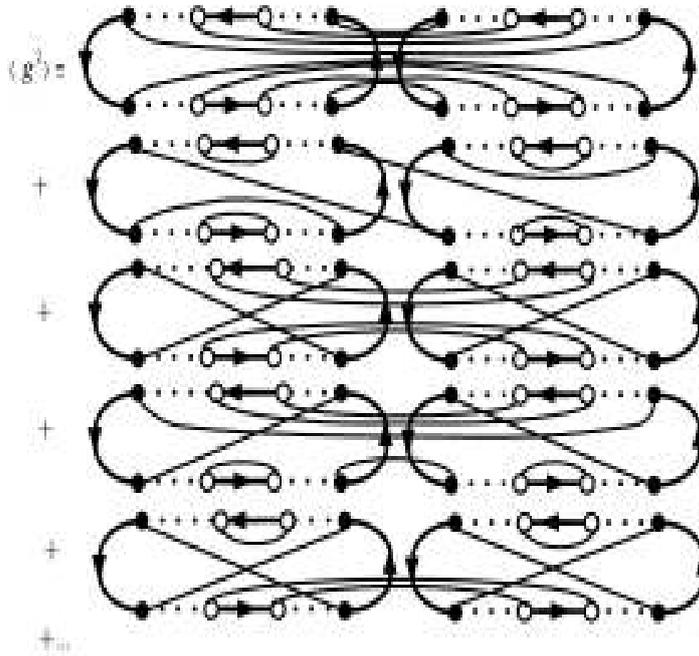


Figura 3.6 Estes são alguns exemplos dos diagramas resultantes da equação (3.10), cada diagrama tem os pesos $V_{1111}, V_{112}, V_{2,2}, V_{1,3}$, respectivamente. Estes pesos são calculados na referência [60] e no nosso trabalho encontram-se no Anexo II

3.2 INTEGRAÇÃO SOBRE O GRUPO SIMPLÉTICO

Para obter os resultados para chCSE, utilizamos o mesmo procedimento apresentado na seção (2.3). A partir da equação (3.5) e utilizando o terceiro procedimento apresentado na seção (2.3), obtemos o seguinte resultado

$$\langle f(U) \rangle = 4V_1\text{Tr}(A)\text{Tr}(B)
 \tag{3.11}$$

e a equação (3.6) fica

$$\begin{aligned} \langle f^2(U) \rangle &= V_{11}[(-2\text{Tr}(A))^2(-2\text{Tr}(B))^2 + 4\text{Tr}(A^2)\text{Tr}(B^2) + 4\text{Tr}(A^2)\text{Tr}(B^2)] \\ &+ V_2[(-2\text{Tr}(A))^2 - 2\text{Tr}(B^2) - 2\text{Tr}(A^2)(-2\text{Tr}(B))^2 + 4\text{Tr}(A^2)\text{Tr}(B^2) \\ &+ 4\text{Tr}(A^2)\text{Tr}(B^2) - 2\text{Tr}(A^2)(-2\text{Tr}(B))^2 + (-2\text{Tr}(A))^2 - 2\text{Tr}(B^2)]. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Realizando os mesmo procedimentos para a equação (3.9), obtemos o seguinte resultado:

$$\begin{aligned} \langle g(U) \rangle &= V_{11}[-8\text{Tr}(A)\text{Tr}(BD)\text{Tr}(C) - 8\text{Tr}(AC)\text{Tr}(B)\text{Tr}(D) \\ &+ 4\text{Tr}(AC)\text{Tr}(BD)] + V_2[4\text{Tr}(AC)\text{Tr}(BD) - 8\text{Tr}(A)\text{Tr}(BD)\text{Tr}(C) \\ &+ 4\text{Tr}(AC)\text{Tr}(BD) + 16\text{Tr}(A)\text{Tr}(B)\text{Tr}(D)\text{Tr}(C) \\ &+ 4\text{Tr}(AC)\text{Tr}(BD) - 8\text{Tr}(AC)\text{Tr}(B)\text{Tr}(D)]. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Os pesos $V_{1,1}$ e V_2 estão listados no Anexo II. O mesmo procedimento deve ser utilizado para obter a média quadrática da equação (3.13).

3.3 APLICAÇÃO DO MÉTODO DE INTEGRAÇÃO SOBRE O GRUPO ORTOGONAL AO BILHAR DE DIRAC

Nesta seção, nosso objetivo é obter os resultados da média e variância da condutância, via técnica diagramática, para o bilhar de Dirac. O método de integração nos capacita a obter novos resultados exatos para a classe Quiral. Usando a nova integração sobre o grupo ortogonal, apresentamos o estudo em todas as classes Quirais para o caso de dois terminais. A condutância de Landauer-Büttiker, equação (1.33), pode ser reescrita em termos da matriz espalhamento [21]

$$\frac{G}{2e^2/h} = \text{Tr}(tt^\dagger) = \text{Tr}C_1SC_2S^\dagger. \quad (3.14)$$

Neste caso, $C_{1,2}$ são matrizes projeções sobre os respectivos terminais e são definadas agora como

$$C_1 = \begin{pmatrix} \hat{1}_{\bar{N}_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \hat{1}_{\bar{N}_2} \end{pmatrix}. \quad (3.15)$$

Onde $1_{\bar{N}_i}$ é a matriz identidade de dimensão $\bar{N}_i \times \bar{N}_i$ e $\bar{N}_i = 2N_i$ representa o número de canais abertos, o sobrescrito (i) representa o terminal 1 e 2 e o fator 2 que multiplica o número de canais abertos leva em conta as duas subredes.

Na equação (3.14), a matriz espalhamento deve ser reescrita, conforme a tabela (1.3), devido a característica do chCOE:

$$S = \Sigma_z U^T \Sigma_z U. \quad (3.16)$$

Agora a matriz espalhamento tem dimensão $2N_1 \times 2N_2$, devido a simetria de sub-rede. Fazendo a substituição de (3.16) em (3.14) e utilizando a seguinte relação

$$\Sigma_z C_1 \Sigma_z = C_1, \quad (3.17)$$

a equação (3.14) assume a seguinte expressão

$$\frac{G}{2e^2/h} = \text{Tr}(C_1 \Sigma_z U^T \Sigma_z U C_2 \Sigma_z U^T \Sigma_z U \Sigma_z). \quad (3.18)$$

Então,

$$\frac{G}{2e^2/h} = \text{Tr}(C_1 U^T \Sigma_z U C_2 U^T \Sigma_z U). \quad (3.19)$$

A matriz U é ortogonal e unitária e suas entradas são números reais. Percebemos que a equação (3.19) é equivalente à equação (3.8), se as matrizes A e C forem a matriz Σ_z e as matrizes B e D forem as matrizes projeções.

3.4 MÉDIA DA CONDUTÂNCIA

Agora, vamos apresentar os resultados obtidos a partir da utilização do método diagramático sobre o grupo ortogonal para calcular a média da equação (3.19). Com o auxílio da identidade abaixo, podemos identificar quais os diagramas da figura (3.5) não contribuiram para o cálculo da média:

$$\text{Tr}(\Sigma_z) = \text{Tr}(C_1 C_2) = 0. \quad (3.20)$$

Usando a equação (3.9) e a identidade (3.20) obtemos o seguinte resultado para a média da condutância para o chECO [1]:

$$\frac{\langle G \rangle_{\beta=1}}{2e^2/h} = \frac{4N_1 N_2 N_T}{(2N_T - 1)(N_T + 1)} \quad (3.21)$$

Para obter a média da condutância do ensemble chECS, realizamos os procedimentos adequados para esta classe conforme foi mostrado. Por fim, obtemos o seguinte resultado para a média da condutância do chCSE usando a equação (3.13):

$$\frac{\langle G \rangle_{\beta=4}}{2e^2/h} = \frac{16N_1 N_2 N_T}{(4N_T - 1)(2N_T + 1)} \quad (3.22)$$

No entanto, para o ensemble chECU em que a matriz U da equação (3.19) é unitária isto possibilita utilizar o mesmo método de integração sobre o grupo unitário, abordado no capítulo 2. É importante ressaltar que estes diagramas são exatamente os diagramas utilizados na obtenção da média da potência do ruído de disparo para os ensembles de Wigner-Dyson. Sendo

assim, podemos mostrar o resultado final de forma compacta através da equação geral para a média da condutância para as três classes do ensemble chiral:

$$\frac{\langle G \rangle}{2e^2/h} = \frac{4\beta N_1 N_2 N_T}{(\beta N_T + 1)(2N_T - 1)}. \quad (3.23)$$

Esta equação é o primeiro resultado do nosso artigo publicado na revista *Physical Review B* [1].

Na tabela 3.1, apresentamos uma comparação da média da condutância entre o BD e BS no regime quântico extremo, quando $N_1 = N_2 = 1$. Na figura 3.7 a equação (3.23) é plotada no caso simétrico ($N_1 = N_2 = N$) e no caso assimétrico quando $N_1 = 2$ e variando o número de canais no guia 2. Os resultados da equação (3.23) foram comprovados via simulação numérica pela referência [24].

Condutância		
β	Bilhar de Dirac	Bilhar quântico caótico
1	4/9	1/3
2	8/15	1/2
4	16/27	2/3

Tabela 3.1 Do regime quântico extremo ($N_1 = N_2 = 1$) referente ao Bilhar de Dirac e ao Bilhar Schrödinger caótico, ambos resultados das médias estão em uma escala de $4e^2/h$ e $2e^2/h$, respectivamente.

3.5 VARIÂNCIA DA CONDUTÂNCIA

Nesta seção, apresentaremos os resultados obtidos para a variância da condutância. De modo similar, ela é definida pela equação (2.8) então temos

$$\text{var}[G] = \langle G^2 \rangle - \langle G \rangle^2. \quad (3.24)$$

O valor para $\langle G \rangle$ é obtido a partir da equação (3.23) e $\langle G^2 \rangle$ para o ensemble chCOE é definido como

$$\frac{\langle G^2 \rangle}{4e^4/h^2} = \langle [\text{Tr}(tt^\dagger)]^2 \rangle \quad (3.25)$$

$$= \langle [\text{Tr}(C_1 S C_2 S^\dagger)]^2 \rangle \quad (3.26)$$

$$= \langle [\text{Tr}(C_1 \Sigma_z^T \Sigma_z U C_2 U^T \Sigma_z U \Sigma_z)]^2 \rangle. \quad (3.27)$$

Para obtermos o resultado da equação anterior (3.27), identificamos todas as possíveis possibilidades de conectar os pontos pretos e os pontos brancos, nos obtemos um total de 11025 diagramas. No entanto, percebemos que destes apenas 540 diagramas contribuíam para a variância da condutância na simetria quiral. Como exemplo, os diagramas da figura 3.6.

Depois de somar todas as possíveis contribuições, nós obtemos expressões com os resultados exatos para a variância das três classes quirais, de acordo com as equações abaixo:

$$\frac{\text{var}[G]_{\beta=1}}{4e^4/h^2} = \frac{16N_1N_2N_T(3 + 2N_T^3 + 4N_1N_2N_T^2 - 4N_T - 4N_1N_2 - 5N_1^2 - 5N_2^2)}{(2N_T - 3)(2N_T - 1)^2(N_T + 3)(N_T + 1)^2(2N_T + 1)}, \quad (3.28)$$

$$\frac{\text{var}[G]_{\beta=2}}{4e^4/h^2} = \frac{8N_1N_2(3 + 16N_1N_2N_T^2 - 6N_1^2 - 6N_2^2)}{(2N_T - 3)(2N_T + 3)(2N_T + 1)^2(2N_T + 1)^2}, \quad (3.29)$$

$$\frac{\text{var}[G]_{\beta=4}}{4e^4/h} = \frac{32N_1N_2N_T(3 - 16N_1N_2 + 8N_T - 20N_1^2 - 20N_2^2 - 16N^3 + 64N_1N_2N_T^2)}{(4N_T + 3)(4N_T + 1)^2(2N_T - 3)(2N_T - 1)^2(4N_T - 1)} \quad (3.30)$$

Na tabela 3.2, apresentamos uma comparação da variância da condutância entre o BD e BS no regime quântico extremo, quando $N_1 = N_2 = 1$. Na figura (3.7) a equação (3.30) é plotada no caso simétrico ($N_1 = N_2 = N$) e no caso assimétrico quando $N_1 = 2$ e variando o número de canais no guia 2. Os resultados das equações (3.29), (3.30) e (3.30) foram comprovados via simulação numérica pela referência [24].

Variância da Condutância		
β	Bilhar de Dirac	Bilhar Shrödinger caótico
1	228/2025	4/45
2	124/1575	1/12
4	416/8019	1/18

Tabela 3.2 Regime quântico extremo ($N_1 = N_2 = 1$) para classificação do grupo chiral referente ao Bilhar de Dirac e ao Bilhar Schrödinger caótico, ambos os resultados das médias estão em uma escala de $8e^4/h^2$ e $4e^4/h^2$, respectivamente.

3.5.1 Casos particulares

No limite semiclássico ($N_1 + N_2 \gg 1$), a equação (3.23) toma a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{\langle G \rangle}{2e^2/h} &= 2 \frac{N_1N_2}{N_1 + N_2} + \left(1 - \frac{2}{\beta}\right) \frac{N_1N_2}{(N_1 + N_2)^2} \\ &+ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2}{\beta} + \frac{4}{\beta^2}\right) \frac{N_1N_2}{(N_1 + N_2)^3} + \dots \end{aligned} \quad (3.31)$$

Esta por sua vez pode ser reescrita em função de $\bar{N}_i = 2N_i$, onde levamos em conta as duas subredes da estrutura da rede colmeia. Então, temos

$$\begin{aligned} \frac{\langle G \rangle}{2e^2/h} &= \frac{\bar{N}_1\bar{N}_2}{\bar{N}_1 + \bar{N}_2} + \left(1 - \frac{2}{\beta}\right) \frac{\bar{N}_1\bar{N}_2}{(\bar{N}_1 + \bar{N}_2)^2} \\ &+ \left(1 - \frac{2}{\beta} + \frac{4}{\beta^2}\right) \frac{\bar{N}_1\bar{N}_2}{(\bar{N}_1 + \bar{N}_2)^3} + \dots \end{aligned} \quad (3.32)$$

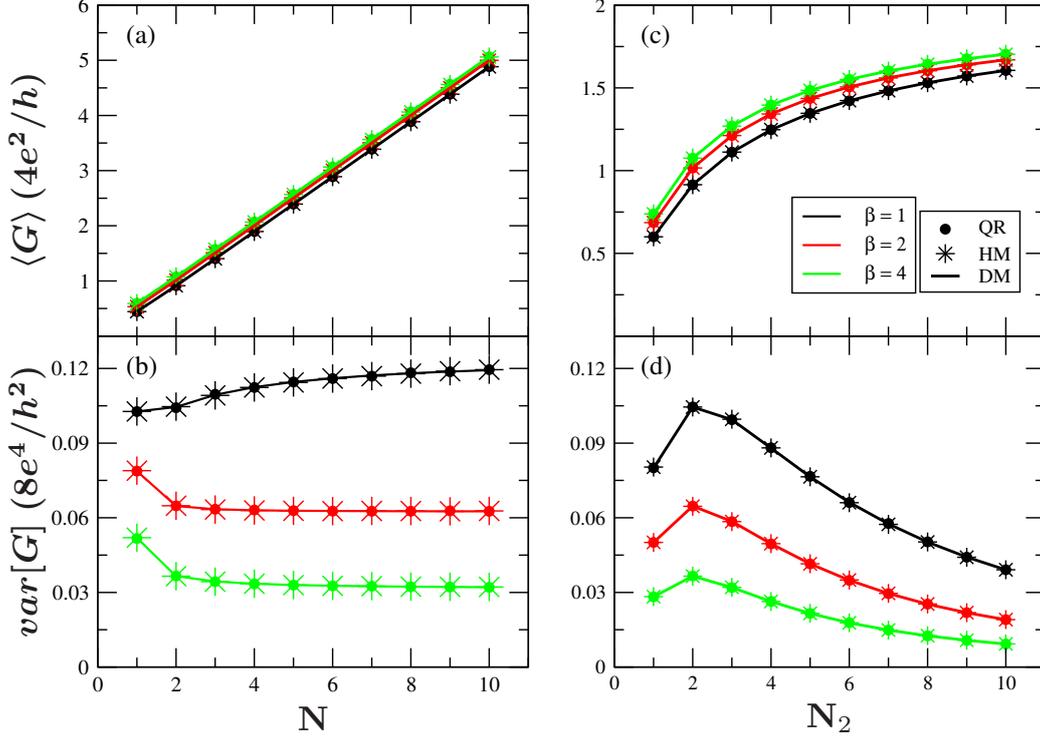


Figura 3.7 A média e a variância da condutância são plotados em unidades de $4e^2/h$ e $8e^4/h^2$, respectivamente. Na figura (a) e (b), esta representada o caso simétrico, $N = N_1 = N_2$ e em (c) e (d) a assimetria dos terminais onde $N_1 = 2$. As bolas sólidas e asteriscos são referentes às simulações numéricas obtidas a partir da fatorização QR e do Modelo Hamiltoniano [24]. As linhas sólidas são os resultados analíticos obtidos via técnica diagramática correspondentes às equações (3.1), (3.29), (3.30) e (3.30).

O primeiro termo da equação (3.32) consiste na lei de Ohm, o segundo termo é chamado de localização fraca e anti-localização fraca para $\beta = 1$ e $\beta = 4$, respectivamente. Para $\beta = 2$, o segundo termo da equação é nulo, mas o terceiro termo representa a contribuição para as correções de interferência. Comparando a equação (3.32) referente ao Bilhar de Dirac com a equação (2.25) do Bilhar Shrödinger caótico, vemos que para ($\beta = 2$) o segundo e o terceiro termos desaparecem da equação (2.25), mas na equação (3.32) o terceiro termo sobrevive. Percebe-se que o primeiro termo e o segundo de ambas as equações são equivalentes, porém os resultados gerais são completamente diferentes por causa da SLS característica do Bilhar de Dirac.

Para a variância da condutância, expandindo as equações (3.29), (3.30) e (3.30) em potências do número total de canais (N_T), obtemos

$$\frac{var[G]}{4e^4/h^2} = \frac{4}{\beta} \frac{N_1^2 N_2^2}{(N_1 + N_2)^4} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N_T}\right) \quad (3.33)$$

$$= \frac{4}{\beta} \frac{\bar{N}_1^2 \bar{N}_2^2}{(\bar{N}_1 + \bar{N}_2)^4} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\bar{N}_T}\right). \quad (3.34)$$

A equação (3.34) esta de acordo com as referências [37, 38], no foram estudados os casos para $\beta = 1, 2$. Quando comparada ao resultado do Bilhar Schrödinger caótico vemos que existe um fator dois multiplicando a equação do Bilhar de Dirac, isto é, este fator dois é referente a simetria de sub-rede.

No caso simétrico, quando $\bar{N} = \bar{N}_1 = \bar{N}_2$ a equação (3.34) passa a assumir a seguinte expressão:

$$\langle G \rangle = \frac{2e^2}{h} \left[\frac{\bar{N}}{2} + \left(1 - \frac{2}{\beta}\right) \frac{1}{4} \right]. \quad (3.35)$$

Para $\beta = 1, 2$ essa equação esta de acordo com as referências [37, 38].

A partir da equação (3.34), podemos escrever a seguinte equação para a variância

$$\frac{\text{var}[G]}{4e^2/h^2} = \frac{4}{\beta} \frac{1}{16}. \quad (3.36)$$

De fato, obtemos os seguintes resultados para a variância para sistemas com simetria de sub-rede 1/4 para chCOE, 1/8 para chCUE e 1/16 para chCSE. Observa-se que estes resultados são 4, 2 e 1 vezes 1/16 do resultado para o CUE, respectivamente.

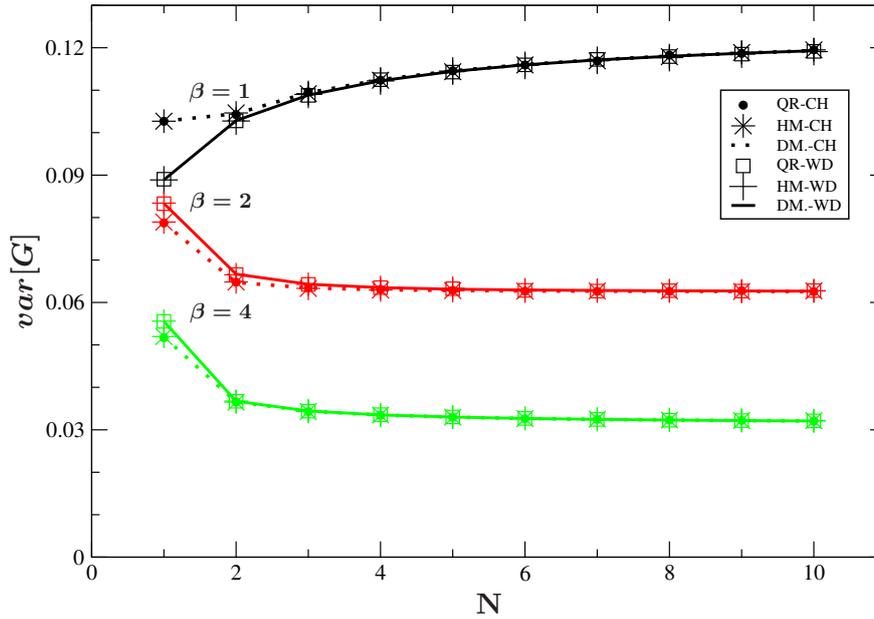


Figura 3.8 A figura indica a comparação entre a variância da condutância do Bilhar de Dirac dos ensembles chiral em unidades $8e^4/h^2$ com a do bilhar de Shrodinger caótico de Wigner-Dyson em unidades $4e^4/h^2$, com os terminais simétricos ($N = N_1 = N_2$) via método diagramático. Os símbolos referem-se à simulação numérica com relação a fatorização QR (Gram-Schmidt), modelo Hamiltoniano (HM), as linhas sólidas e pontilhadas representa os resultados obtidos via método diagramático(DM) aos ensembles de Wigner-Dyson e chiral, respectivamente. Para maiores detalhes vê o trabalho [24].

Por fim, no gráfico da figura (3.8) comparamos a variância da condutância do Bilhar de Dirac para os ensembles chirais, conforme as equações (3.29), (3.30) e (3.30), com a variância do ensemble de Wigner-Dyson (2.24) com terminais simétricos. Os valores destas variâncias adimensionais diferem para $N = 1$ e convergem para valores $N \geq 2$. Sendo assim, podemos estabelecer as seguintes aproximações entre os dois tipos de variância da condutância no limite semiclassico:

$$\text{var}[G]_{\beta} \longrightarrow 2 \times \text{var}[G]_{wd,\beta}. \quad (3.37)$$

DECOÊRENCIA NO BILHAR DE DIRAC

Neste capítulo vamos abordar estudos sobre a quebra de coerência de fase, isto é, o desaparecimento dos efeitos quânticos de interferência devido a coerência de fase no transporte eletrônico quântico, onde utilizamos a formulação proposta por Büttiker [45, 50] e descrevemos resultados para o bilhar caótico quântico. Este caso consiste em conectar um terceiro terminal fictício o qual é o responsável pela a quebra da coerência de fase. Utilizando o Método Diagramático apresentaremos os resultados analíticos para a média e variância da condutância e entre outros resultados relevantes que estão presentes no nosso artigo [1].

4.1 EFEITO DE UM TERCEIRO GUIA CONECTADO A CAVIDADE BALÍSTICA

Ao conectar um terceiro guia a cavidade balística juntamente com um reservatório, isso requer passar corrente neste terceiro guia, veja a figura 4.1. Mas, o reservatório é ajustado de tal maneira que a média da corrente que passa neste terceiro guia é nula, o ajuste do potencial se dá pelo número de canais no guia 3 [47, 48]. De fato, se a média da corrente neste guia é nula isto implica que o fluxo de corrente que entra na cavidade é o mesmo que sai através do guia 3. Levando em conta a conservação do fluxo de corrente, temos $I = I_1 = -I_2$.

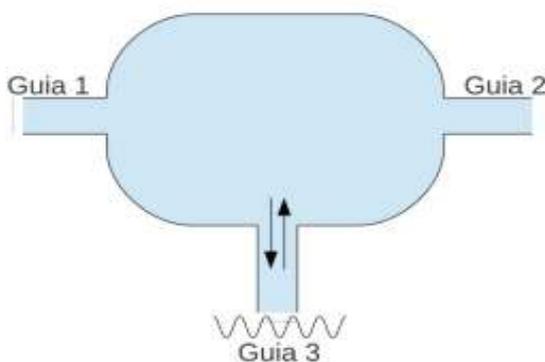


Figura 4.1 Modelo esquemático do Bilhar de Dirac conectado a três guias ideais. A presença do terceiro guia contribui para a defasagem, sem perdas de elétrons. A média do fluxo de corrente que atravessa o terceiro guia é nula. Figura retirada [24].

Sabemos que a condutância é o inverso da resistência, aplicando a Lei de Ohm temos

$$G = \frac{I}{V}, \quad (4.1)$$

onde V é a diferença de potencial entre os reservatórios 1 e 2. A partir da definição de corrente descrita pela teoria de Landauer-Buttiker a equação da condutância passa a ser [47, 48]

$$G = \frac{2e^2}{h(V_1 - V_2)} \left[g_{12}(V_1 - V_2) + g_{13}(V_1 - V_3) \right], \quad (4.2)$$

onde

$$V_3 = \frac{g_{31}V_1 + g_{32}V_2}{g_{31} + g_{32}}. \quad (4.3)$$

Logo, ao adicionar um terceiro guia, a condutância pode ser reescrita como [47, 48]

$$G = \frac{2e^2}{h} \left[g_{12} + \frac{g_{31}g_{23}}{g_{31} + g_{32}} \right]. \quad (4.4)$$

Neste caso, $g_{ij} = \text{Tr}(t_{ij}t_{ij}^\dagger)$ é a probabilidade média de transmissão para os elétrons do guia j para o guia i e t_{ij} é o bloco de transmissão da matriz espalhamento.

A condutância dada pela equação (4.4) pode ser reescrita em função da matriz espalhamento sendo que a probabilidade de transmissão é dada por

$$g_{ij} = \text{Tr}(C_i S C_j S^\dagger), \quad (4.5)$$

onde $i, j = 1, 2, 3$. Agora a matriz espalhamento possui dimensão $\bar{N}_T \times \bar{N}_T$, $\bar{N}_T = \bar{N}_1 + \bar{N}_2 + \bar{N}_\phi$ e $\bar{N}_\phi = 2N_\phi$ é o número de canais abertos no terceiro guia.

Expandindo a equação (4.4), no regime semiclassico, e tomando a média temos

$$\frac{\langle G \rangle}{2e^2/h} = \langle g_{12} \rangle + \frac{\langle g_{31} \rangle \langle g_{23} \rangle}{\langle g_{31} \rangle + \langle g_{32} \rangle} + \mathcal{O}(N_T^{-2}). \quad (4.6)$$

Da equação (3.9), podemos calcular a média dos coeficientes de transmissão, equação (4.5), com $i \neq j$. Neste caso, fazemos as seguintes substituições:

$$C_1 = C_i \quad (4.7)$$

$$C_2 = C_j, \quad (4.8)$$

Agora, as matrizes projeções nos três guias são:

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1_{\bar{N}_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1_{\bar{N}_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1_{\bar{N}_\phi} \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

E também utilizamos as seguintes condições:

$$C_i C_j = 0 \quad (4.10)$$

$$\sum_{i=1}^m C_i = 1_{\bar{N}_T}. \quad (4.11)$$

Usando estas relações, obtemos a seguinte expressão para a média dos coeficientes

$$\langle g_{ij} \rangle = \frac{4\beta N_i N_j N_T}{(\beta N_T + 1)(2N_T - 1)} \quad (4.12)$$

$$= \frac{\beta \bar{N}_i \bar{N}_j \bar{N}_T}{(\beta \bar{N} + 2)(\bar{N} - 1)}, \quad i \neq j, \quad (4.13)$$

onde $\bar{N} = \bar{N}_1 + \dots + \bar{N}_m$ e $\bar{N}_T = 2N_T$.

4.2 MÉDIA DA CONDUTÂNCIA

Substituindo os valores da média dos coeficientes de transmissão obtidos a partir da equação (4.13) em (4.6), obtemos a seguinte equação geral para a média da condutância

$$\frac{\langle G \rangle}{2e^2/h} = \left[2 \frac{N_1 N_2}{N_1 + N_2} + \left(1 - \frac{2}{\beta} \right) \frac{N_1 N_2}{N_1 + N_2} \frac{1}{N_1 + N_2 + N_\phi} \right]. \quad (4.14)$$

Neste ponto, é interessante introduzir a relação entre as escalas de tempo τ_d e τ_ϕ com o número de canais abertos nos guias:

$$\frac{\tau_d}{\tau_\phi} = \frac{\bar{N}_\phi}{(\bar{N}_1 + \bar{N}_2)}, \quad (4.15)$$

onde o tempo de permanência da partícula dentro do Bilhar de Dirac é dado por [49]

$$\tau_d = \frac{2\pi mA}{h(\bar{N}_1 + \bar{N}_2)} \quad (4.16)$$

e o tempo de defasagem do transporte eletrônico é [49]

$$\tau_\phi = \frac{2\pi mA}{h\bar{N}_\phi}. \quad (4.17)$$

A massa eletrônica e a área da região do Bilhar de Dirac estão representadas por m e A , respectivamente. Substituindo a equação (4.15) na equação (4.14), obtemos a média da condutância em função das escalas de tempo τ_ϕ e τ_d :

$$\frac{\langle G \rangle}{2e^2/h} = \left[\frac{\bar{N}_1 \bar{N}_2}{\bar{N}_1 + \bar{N}_2} + \left(1 - \frac{2}{\beta} \right) \frac{\bar{N}_1 \bar{N}_2}{(\bar{N}_1 + \bar{N}_2)^2} \frac{1}{1 + \frac{\tau_d}{\tau_\phi}} \right]. \quad (4.18)$$

A partir da equação (4.18) podemos analisar dois limites importantes. O primeiro limite consiste em considerar $\tau_\phi \gg \tau_d$, ou seja, o transporte é coerente. Neste caso, da equação (4.18) reobtemos a equação (3.32). O segundo limite consiste em $\tau_d \gg \tau_\phi$, ou seja, o transporte não é mais coerente, as correções de (anti)localização fraca são supridas e apenas o termo da Lei de Ohm sobrevive na equação (4.18). O resultado da equação (4.18) foi comprovado via simulação numérica pela referência [24].

4.3 VARIÂNCIA DA CONDUTÂNCIA

Neste caso, as flutuações universais da condutância do Bilhar de Dirac pode ser escrita da seguinte maneira no limite semiclássico [49]

$$\begin{aligned} \frac{\text{var}[G]}{4e^4/h^2} &= \text{varg}[g_{12}] + \frac{\langle g_{32} \rangle^4 \text{var}[g_{31}] + \langle g_{31} \rangle^4 \text{var}[g_{32}]}{(\langle g_{32} \rangle + \langle g_{31} \rangle)^4} \\ &+ 2 \frac{\langle g_{32} \rangle^2 \langle g_{31} \rangle^2 \text{covar}[g_{31}, g_{32}]}{(\langle g_{32} \rangle + \langle g_{31} \rangle)^4} \\ &+ 2 \frac{\langle g_{31} \rangle^2 \text{covar}[g_{21}, g_{23}]}{(\langle g_{32} \rangle + \langle g_{31} \rangle)^2} \\ &+ 2 \frac{\langle g_{32} \rangle^2 \text{covar}[g_{21}, g_{31}]}{(\langle g_{32} \rangle + \langle g_{31} \rangle)^2} + \mathcal{O}(N_T^{-2}). \end{aligned} \quad (4.19)$$

Usando os diagramas que contribuem para a variância, figura 3.3, juntamente com a equação (4.13) e substituindo os valores adequadamente na equação (4.19), obtemos o seguinte resultado para a variância da condutância após tomarmos os limites $N_\phi \gg 1$ e $\frac{\tau_\phi}{\tau_d} \ll 1$:

$$\begin{aligned} \frac{\text{var}[G]}{4e^2/h^2} &= \frac{4}{\beta} \frac{N_1^2 N_2^2}{(N_1 + N_2)^4} \left(\frac{\tau_\phi}{\tau_d} \right)^2 \\ &+ \frac{2}{\beta} \left(\frac{2}{\beta} - 1 \right) \frac{N_1 N_2 (N_1^2 - N_1 N_2 + N_2^2)}{(N_1 + N_2)^5} \left(\frac{\tau_\phi}{\tau_d} \right)^2. \end{aligned} \quad (4.20)$$

No caso simétrico, $N = N_1 = N_2$, a equação (4.20) torna-se de forma simplificada

$$\frac{\text{var}[G]}{4e^2/h^2} = \frac{1}{4\beta} \left(\frac{\tau_\phi}{\tau_d} \right)^2 + \frac{1}{\beta} \left(\frac{2}{\beta} - 1 \right) \frac{1}{16N} \left(\frac{\tau_\phi}{\tau_d} \right)^2 \quad (4.21)$$

$$= \frac{1}{\beta} \frac{N_T^2}{\phi} + \frac{1}{4\beta} \left(\frac{2}{\beta} - 1 \right) \frac{N_T}{N_\phi^2}. \quad (4.22)$$

Usando a equação (4.22), obtemos os seguintes resultados para a variância da condutância no regime quântico extremo ($N = 1$):

- Para $\beta = 1$

$$\frac{\text{var}[G]}{4e^4/h^2} = \frac{5}{16} \left(\frac{\tau_\phi}{\tau_D} \right)^2 = \frac{5}{4} \frac{1}{N_\phi^2} \quad (4.23)$$

- Para $\beta = 2$

$$\frac{\text{var}[G]}{4e^4/h^2} = \frac{1}{8} \left(\frac{\tau_\phi}{\tau_D} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{N_\phi^2} \quad (4.24)$$

- Para $\beta = 4$

$$\frac{\text{var}[G]}{4e^4/h^2} = \frac{7}{128} \left(\frac{\tau_\phi}{\tau_D} \right)^2 = \frac{7}{32} \frac{1}{N_\phi^2} \quad (4.25)$$

A partir destes resultados, obtemos novos números universais que caracterizam o Bilhar de Dirac e consistem na razão entre as variâncias da condutância com simetria de reversão temporal das equações (4.24) e (4.25) pela variâncias sem simetria de reversão temporal (4.23).

$$\frac{\text{var}[G]_{\beta=1}}{\text{var}[G]_{\beta=2}} = \frac{5}{2} \quad (4.26)$$

$$\frac{\text{var}[G]_{\beta=4}}{\text{var}[G]_{\beta=2}} = \frac{7}{16} \quad (4.27)$$

Estes resultados estão plotados na figura 4.2 em função de N_ϕ e foram confirmados pela simulação numérica de acordo com a referência [24]. Na tabela 4.1, mostramos a comparação entre os números universais das razões da variância do Bilhar de Dirac e Bilhar de Schrödinger. Estes números universais servem para caracterizar o transporte eletrônico em cada um desses dispositivos eletrônicos.

Por fim, considerando o limite semiclássico $\bar{N}_1 + \bar{N}_2 \gg 1$ na equação (4.19), obtemos o seguinte resultado para a variância:

$$\frac{\text{var}[G]}{4e^4/h^2} = \frac{4}{\beta} \frac{\bar{N}_1^2 \bar{N}_2^2}{(\bar{N}_1 + \bar{N}_2)^4} \frac{1}{\left(1 + \frac{\tau_d}{\tau_\phi}\right)^2}. \quad (4.28)$$

No limite $\tau_\phi \gg \tau_d$, reobtemos a equação (3.34), enquanto no limite $\tau_d \gg \tau_\phi$ a variância é suprimida, devido à perda de coerência de fase.

Então, obtemos os seguintes resultados conforme estão apresentados na tabela 4.1.

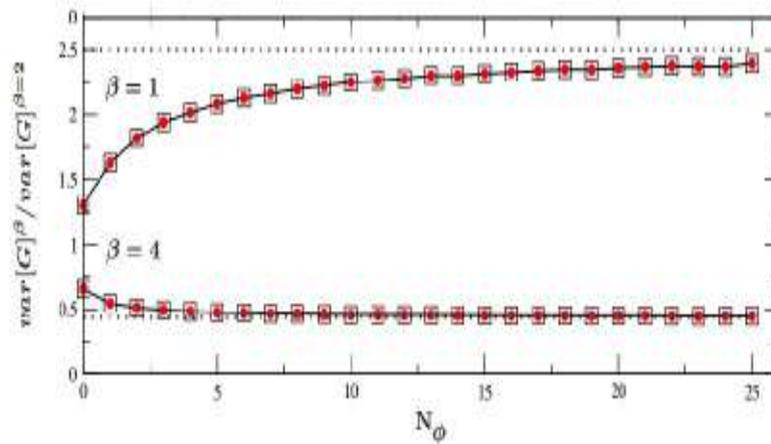


Figura 4.2 As razões entre as variâncias da condutância para $N_\phi \gg 1$. Os resultados tendem a 2.5 para chECO/chECU e 0.44 para chECS/chECU, de acordo com as equações (4.26) e (4.27). Os símbolos representam as simulações numéricas da fatorização QR e modelo Hamiltoniano para os ensembles chirais [24].

$\frac{\text{var}[G]_\beta}{\text{var}[G]_{\beta=2}}$		
β	Bilhar de Dirac	Bilhar Shrödinger caótico
1	5/2	3

Tabela 4.1 Tabela de novos resultados universal da razão entre as condutâncias do Bilhar de Dirac e do Bilhar quântico caótico [1, 47, 48].

CONCLUSÃO E PERSPECTIVAS

Neste trabalho, generalizamos o método diagramático proposto por Brouwer e Beenakker [34] para integração sobre o grupo unitário. Apresentamos resultados analíticos para o transporte eletrônico através do Bilhar de Dirac Caótico, sendo necessário fazer uma extensão do método diagramático para integração sobre o grupo ortogonal, e assim obtermos os resultados exatos para a média e a variância da condutância. Estudamos e comparamos as Classes de Wigner-Dayson e Chiral. A partir desta comparação, verificamos que a média e variância do Bilhar de Dirac difere dos valores do Bilhar de Shrödinger, no regime quântico extremo e também mostramos a convergência desses resultados em função do número total de canais abertos nos guias. Concluimos que a variância da condutância dos ensembles Chirais, converge para o dobro dos resultados dos ensemble de Wigner-Dyson quando $N \gg 1$.

Sendo assim, também investigamos o transporte eletrônico do Bilhar de Dirac na presença de decoerência, utilizando o modelo de Büttiker [45] que consiste em conectar um terceiro guia ao bilhar de Dirac. De fato, obtivemos novos números universais referentes as razões da variância da condutância para o Bilhar de Dirac no limite quântico extremo. Diante disto, verificamos a eficácia da técnica diagramática.

Para obter estes resultados foi necessário fazer 11025 diagramas, um trabalho árduo, pois eles foram feitos manualmente requerendo tamanha atenção. Estes resultados foram bastante significantes, que favoreceu a publicação do nosso artigo [1].

Com base no trabalho desenvolvido, diversas vertentes de trabalhos futuros podem ser identificadas. Desta forma, novas pesquisas podem ser realizadas como o estudo da classe Altland-Zinbauer, Efeito Hall de Spin, e o ruído de disparo no Bilhar de Dirac dando continuidade ao trabalho em questão.

ANEXO I: PESOS DO ENSEMBLE DE WIGNER-DYSON

Os pesos obedecem certas relações recursivas [34], estas relações são específicas para cada ensemble.

- Classe Unitária ($\beta = 2$) :

$$V_1 = \frac{1}{N}, \quad (6.1)$$

$$V_{1,1} = \frac{N}{N(N^2 - 1)}, \quad (6.2)$$

$$V_{1,1,1} = \frac{-2 + N^2}{N(N^2 - 1)(N^2 - 4)}, \quad (6.3)$$

$$V_2 = -\frac{1}{N(N^2 - 1)}, \quad (6.4)$$

$$V_{2,1} = -\frac{N}{N(N^2 - 1)(N^2 - 4)}, \quad (6.5)$$

$$V_3 = \frac{2}{N(N^2 - 1)(N^2 - 4)}, \quad (6.6)$$

$$V_{1,1,1,1} = \frac{6 - 8N^2 + N^4}{N^2(N^2 - 1)(N^2 - 4)(N^2 - 9)}, \quad (6.7)$$

$$V_{2,1,1} = \frac{4N - N^3}{N^2(N^2 - 1)(N^2 - 4)(N^2 - 9)}, \quad (6.8)$$

$$V_{2,2} = \frac{6 + N^2}{N^2(N^2 - 1)(N^2 - 4)(N^2 - 9)}, \quad (6.9)$$

$$V_{3,1} = \frac{-3 + 2N^2}{N^2(N^2 - 1)(N^2 - 4)(N^2 - 9)}, \quad (6.10)$$

$$V_4 = \frac{-5N}{N^2(N^2 - 1)(N^2 - 4)(N^2 - 9)}. \quad (6.11)$$

- Classe Simplética ($\beta = 4$) :

$$V_{1,1} = \frac{1 - 2N}{2N(2N - 1)(2N - 3)}, \quad (6.12)$$

$$V_2 = \frac{1}{2N(-2N + 1)(-2N + 3)}. \quad (6.13)$$

- Classe Ortogonal ($\beta = 1$):

$$V_1 = \frac{1}{N+1}, \quad (6.14)$$

$$V_{1,1} = \frac{2+N}{N(N+1)(N+3)}, \quad (6.15)$$

$$V_{1,1,1} = \frac{2+5N+N^2}{N(N-1)(N+1)(N+3)(N+5)}, \quad (6.16)$$

$$V_2 = -\frac{1}{N(N+1)(N+3)}, \quad (6.17)$$

$$V_{2,1} = -\frac{-3-N}{N(N-1)(N+1)(N+3)(N+5)}, \quad (6.18)$$

$$V_3 = \frac{2}{N(N-1)(N+1)(N+3)(N+5)}, \quad (6.19)$$

$$V_{1,1,1,1} = \frac{-32-8N+28N^2+11N^3+N^4}{N(N-2)(N-1)(N+1)(N+2)(N+3)}, \quad (6.20)$$

$$V_{2,1,1} = \frac{-4-18N-9N^2-N^3}{N(N-2)(N-1)(N+1)(N+2)(N+3)}, \quad (6.21)$$

$$V_{2,2} = \frac{24+7N+N^2}{N(N-2)(N-1)(N+1)(N+2)(N+3)}, \quad (6.22)$$

$$V_{3,1} = \frac{10+12N+2N^2}{N(N-2)(N-1)(N+1)(N+2)(N+3)}, \quad (6.23)$$

$$V_4 = \frac{-11-5N}{N(N-2)(N-1)(N+1)(N+2)(N+3)}. \quad (6.24)$$

ANEXO II: PESOS PARA OS ENSEMBLES COM SIMETRIA QUIRAL

Os pesos obedecem certas relações recursivas [44], estas relações para cada ensemble.

- Classe Unitária ($\beta = 2$) :

$$V_1 = \frac{1}{N} \quad (7.1)$$

$$V_{1,1} = \frac{N+1}{N(N-1)(N+2)} \quad (7.2)$$

$$V_2 = -\frac{1}{N(N-1)(N+2)} \quad (7.3)$$

$$V_{2,1} = -\frac{1}{N(N-1)(N-2)(N+4)} \quad (7.4)$$

$$V_3 = \frac{2}{N(N-1)(N-2)(N+2)(N+4)} \quad (7.5)$$

$$V_4 = -\frac{5N-6}{N(N+1)(N+2)(N+4)(N+6)(N-1)(N-2)(N-3)} \quad (7.6)$$

$$V_{3,1} = \frac{2N+8}{(N+1)(N+2)(N+4)(N+6)(N-1)(N-2)(N-3)} \quad (7.7)$$

$$V_{2,2} = \frac{N^2+5N+18}{N(N+1)(N+2)(N+4)(N+6)(N-1)(N-2)(N-3)} \quad (7.8)$$

$$V_{2,1,1} = \frac{-N^3-6N^2-3N+6}{N(N+1)(N+2)(N+4)(N+6)(N-1)(N-2)(N-3)} \quad (7.9)$$

$$V_{1,1,1,1} = \frac{N^4+7N^3+N^2-35N-6}{N(N+1)(N+2)(N+4)(N+6)(N-1)(N-2)(N-3)}. \quad (7.10)$$

- Classe Ortogonal ($\beta = 1$) :

$$V_{11} = \frac{2N+1}{(2N-1)(2N+2)}, \quad (7.11)$$

$$V_2 = \frac{1}{2N(2N-1)(2N+2)} \quad (7.12)$$

- Classe Simplética ($\beta = 4$) :

$$V_{11} = \frac{1}{(2N-1)(2N+1)}, \quad (7.13)$$

$$V_2 = -\frac{1}{2N(2N-1)(2N+1)} \quad (7.14)$$

Referências Bibliográficas

- [1] BARROS, M. S. M. et al **Open chaotic Dirac billiards: Weak(anti) localization, conductance fluctuations and decoherence.** Phys. Rev. B 88, 245133, (2013).
- [2] BARBOSA, A. L. R. **Estatística de Contagem de Carga e Efeitos de Interferência em Sistemas Mesoscópicos.** Tese, UFPB, (2009).
- [3] GNUTZMANN, S.; SEIF, B. **Universal spectral statistics in wigner-dyson, chiral, and andreev star graphs: I construction and numerical results.** Phys. Rev. E 69, 056219, (2004).
- [4] MEHTA, M. L. **Random Matrices.** 688 p. ISBN: 0-12-088409-7, 2004.
- [5] VERBAARSCHOT, J. **Spectrum of the qcd dirac operator and chiral random matrix theory.** Phys. Rev. Lett. 72, 2531, (1994).
- [6] ALTLAND, A.; ZIRNBAUER, M. R. **Nonstandard symmetry classes in mesoscopic normal-superconducting hybrid structures.** Phys. Rev. B 55, 1142, (1997).
- [7] GLAUBER, R. J. **Photon Correlations.** Phys. Rev. Lett., 10:84â86, (1963).
- [8] JACQUOD, J. M. P.; WHITNEY, R. S.; BÜTTIKER, M. **Onsager relations in coupled electric, thermoelectric, and spin transport: The tenfold way .** Phys. Rev. B. 86, 155118, (2012).
- [9] MELLO, P. A.; KUMANR, N. **Quantum Transport in Statistical Fluctuations.** Oxford University Press, New York (2004).
- [10] SANTOS, A. P. **Propriedades universais de transporte em cavidades da classe bdg .** Tese de mestrado, Departamento de Física-UFRPE, (2011).
- [11] BEENAKKER, C. W. **Random-matrix theory of quantum transport.** arXiv: cond-mat/9612179v1, (1996).
- [12] MARDER, M. P. **Condensed Matter Physics,** Wiley–interscience, (1960).
- [13] HEINZEL, T. **Mesoscopic Electronics in Solid State Nanostructures.** WILEY-VCH Verlag GmbH and Co.KgaA, Weinheim, (2007).
- [14] JONG, M. J. ; BEENAKEER, C. W. J. **Shot noise in mesoscopic systems.** (1996).

- [15] BEENAKER, C. W. **Quantum point contacts**, <http://www.lorentz.leidenuniv.nl/beenakker/>, acessado em (2013).
- [16] GOPAR, F. A. **Agortimos Numéricos de Matrizes Aleatória Aplicados a Sistemas Mesoscópicos**. Tese de Doutorado, UFPE, (2010).
- [17] SILVA, F. D. **Transporte quântico no regime de bloqueio de coulomb**. Tese de mestrado (2011).
- [18] THORNTON, S. T.; MARION J. B. **Classic Dynamic of particles and Systems**, 15 ed.
- [19] NAPOLITANO, J.; SAKURAI, J. J. **Mecânica Quântica Moderna**, tradução técnica: Sílvio Renato Dahmen, 2ed.-Porto Alegre, (2013).
- [20] KAMENEV, A.; NISHIGAKI, S. M.; GANGARDT, D. M. **Correlation functions of the bc calogero- sutherland model**. J. Phys. A: Math. Gen. 36, (2003).
- [21] DATTA, S. **Electronic Transport in Mesoscopic Systems**. Cambridge, University Press (1995).
- [22] RAMOS, J. G. G. S.; BARBOSA, A. L. R.; MÂCEDO, A. M. S. **Average shot-noise power via a diagrammatic method**. J. Phys. A: Math. Theor. 43, (2010).
- [23] BEENAKKER, C. W. J. **Applications of random matrix theory to condensed matter and optical physics**. arXiv:0904.1432v2, (2009).
- [24] NASCIMENTO-JUNIOR, A. J. **Bilhar de Dirac caótico: Uma abordagem via teoria de matrizes aleatória**. Tese de mestrado, UFRPE, (2014).
- [25] LEE, H.-W.; LEVITOV, L. S.; YAKOVETS, A. Y. **Universal statistics of transport in disordered conductors**. Phys. Rev. B, 51:4079–4083, (1995).
- [26] STONE, A. D.; BARANGER, H. U.; JALABERT, R. A. **Weak-localization and integrability in ballistic cavities**. arXiv.org > cond-mat > arXiv:cond-mat/9212002, (1993).
- [27] MAYOROV, A. S. et al. **Weak localization in bilayer graphene**. Phys. Rev. Lett. 98, 176805, (2007).
- [28] MOHANTY, P.; WEBB, R. A. **Anomalous conductance distribution in quasi- one-dimensional gold wires: Possible violation of the one-parameter scaling hypothesis**. Phy. Rev. Lett. 88, 146601, (2002).
- [29] RAO, N. R.; EDELMAN, A. **Random matrix theor**. Acta Numerica, 14, 233, (2005).
- [30] WESTERVELT, R. M. **Graphene nanoelectronic**. Science, 320:324325, 2008.
- [31] AKMEROV, A. R. **Dirac and Majorana edge states in graphene and topological superconductor**. ISBN 978-90-8593-101-0, (2011).

- [32] BEENAKKER, C. W. J. **Colloquium: Andreev reflection and Klein tunneling in graphene.** Rev. Mod. Phys. 80, 1337, (2008).
- [33] MAHAUX, C.; WEIDENMULLER, H. A. **Shell Model Approach to Nuclear Reaction.** North- Holland, Amsterdam, (1969).
- [34] BEENAKKER, C. W. J.; BROUWER, P. W. **Diagrammatic method of integration over the unitary group, with applications to quantum transport in mesoscopic systems.** J. Math. Phys. 37,4904, (1996).
- [35] BEENAKKER, C. W. J. **Random- matrix theory of quantum transport.** Rev. Mod. Phys. 69, 731, (1997).
- [36] BARANGER, H. ; MELLO, P. A. **Mesoscopic transport through chaotic cavities: A random S-matrix theory approach.** Phys. Rev. Lett. 73, 142, (1994).
- [37] WIMMER, I. A. et al. **Symmetry classes in graphene quantum dots: Universal spectral statistics, weak localization, and conductance fluctuations.** Phys. Rev. Lett. 102, 056806, (2008).
- [38] RICHTER, K.; WURM, J.; ADAGIDELE, I. **Edge effect in graphene nonstructures: Semi-classical theory of spectral fluctuations and quantum transport fluctuations and quantum transport.** Phys. Rev. B 84, 205421, (2011).
- [39] SOUZA-FILHO, C. A. **Cavidades balísticas caóticas e funções simétricas: resultados exatos para estatística de contagem de carga.** Tese de mestrado, (2013).
- [40] BARBOSA, A. L. R.; RAMOS, J. G. G. S.; MÂCEDO, A. M. S., Phys. Rev. B 84, 035453, (2011).
- [41] WIECZOREK, W.; SOMMERS, H.-J.; SAVIN, D. V. **Statistics of conductance and shot-noise power for chaotic cavities.** Acta Physica Polonica, A . vol.12, (2007).
- [42] SAVIN, D. V.; SOMMERS, H.-J. **Shot noise in chaotic cavities with an arbitrary number of open channels.** Phys. Rev. B 73, 081307(R)
- [43] SILVESTROV, P. G.; EFETOV, K. B. **Quantum dots in graphene.** Phys. Rev. Lett. 98, 016802, (2007).
- [44] COLLINS, B.; SNIADY, P., Commun. Math. Phys. 264, 773, (2006).
- [45] BÜTTIKER, M. **Dots of quantum coherence in series resistors.** Phys. Rev. B 33, 3020, (1986).
- [46] BÜTTIKER, M., Phys. Rev. Lett. 57, 1761, (1986).
- [47] BARANGER, H. U.; MELLO, P. A. **Effect of phase breaking on quantum transport through chaotic cavities.** Phys. Rev. B 51, 4703, (1995).

- [48] BROUWER, P. W.; BEENAKKER, C. W. J. **Effect of a voltage probe on the phase-coherence conductor of a ballistic chaotic cavity.** Phys. Rev. B 51, 7739, (1995).
- [49] JACQUOD, P.; WHITNEY, R. S.; PETITJEAN, C. **Dephasing in quantum chaotic transport: A semiclassical approach.** Phys. Rev. B 77, 045315, (2008).
- [50] BÜTTIKER, M. **Role of quantum coherence in series resistors.** Phys. Rev. B 33, 3020, (1986).
- [51] HUSSEIN, M.S. A. C.;BERTUOLA, M. P. **Técnicas e construções de ensembles de matrizes aleatórias e estatísticas correlatas.** Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 28, n. 3, p. 333-340, (2006).
- [52] RAO, N. R.; MACEDO- JUNIOR, A. F. **Universal transport properties of quantum dots with chiral symmetry.** Phys. Rev. B 66, 041307(R), (2002).
- [53] RAMOS, J. G. G. S., BARBOSA, A. L. R.; BAZEIA, A. M. S. **Presence of asymmetric noise in multiterminal chaotic cavities.** Phys. Rev. B 84, 115312, (2011).
- [54] GUSTIN, C. et al. **Dwell- time -limited coherence in open quantum dots.** Phys. Rev. Lett. 94, 1446802, (2005).
- [55] MELLO, P. A.; BARANGER, H. U. **Effect of phase breaking on quantum transport through chaotic cavities.** Phys Rev B Condens Matter.51(7):4703-4706., (1995).
- [56] MACEDO–JUNIOR, A.F.; MACÊDO, A.M.S. **Brownian-motion ensembles of random matrix theory: A classification scheme and an integral transform method.** Nuclear Physics B 752 [PM] (2006) 439â475.
- [57] BARANGER, H. U.; MELLO, P. A. Phys. Rev. B. 51, 47034706, (1995).
- [58] BEENAKKER, C. W. J. **Applications of random matrix theory to condensed matter and optical physics.** arXiv:0904.1432v2, (2009).
- [59] HOPKINS, P. F. et al. **Phase breaking in ballistic quantum dots: Experiment and analysis based on chaotic scattering.** Phys. Rev. B 48, 2460, (1993).
- [60] COLLINS, B.; SNIADY, P. **Integration with respect to the haar measure on unitary, orthogonal and symplectic group.** arXiv: math-ph/0402073v1, (2004).
- [61] SOMMERS, H.-J.; SAVIN, D. V.; WIECZOREK, W. **Nonlinear statistics of quantum transport in chaotic cavities.** Phys. Rev. B 77, 125332, (2008).
- [62] FUHER, M. S. et al. **Universal conductance fluctuations in Dirac materials in the presence of long–range disorder.** Phys. Rev. Lett. 109, 096801, (2012).
- [63] EVANGELOU, S. N.; KATSANOS, D. E. **Spectral statistics in chiral-orthogonal disordered systems.** Journal of Physics A: Mathematical and General, 36(12), 3237, (2003).

- [64] FISHER, D. S.; LEE, P. A. **Relation between conductivity and transmission matrix.** Phys. Rev. B 23, 6851(R), (1981).
- [65] GEIM, A. K.; NOVOSELOV, K. S. **The rise of graphene.** Nat. Mater. 6,183, (2007).
- [66] DYKEMA, K. et al. **Charcterization of singular numbers of products of operators in matrix algebras an infinite von neumann algebras.** arXiv: 1306.6434v1[math. OA], (2013).
- [67] WESS, B.B.J.; BEENAKKER, C. W. J.; VAN HOUTEN, H. **Semiconductores and semimetals.** vol.35.
- [68] VAN HOUTEN, H.; BEENAKKER, C. **Quantum point contacts: The quantization of ballistic electron transport through a constriction demonstrates that conduction is transmission.** arXiv:cond-mat/0512609v1, (2005).
- [69] BARBOSA, A. L. R.; RAMOS, J. G. G. S. ; MACÊDO, A. M. S. Phys. Rev. B 78, 235305, (2008).
- [70] BÉRI, B.; DAHLHAUS, J. P.; BEENAKKER, C.W. J. **Random-matrix theory of thermal conduction in superconducting quantum dots.** Phys. Rev. B 82, 014536, (2010).
- [71] ADAGIDELI, I. et al. **Symmetry classes in graphene quantum dots: Universal spectral statistics, weak localization, and conductance fluctuations.** Phys. Rev. Lett. 102, 056806, (2009).
- [72] WURN, M. W. J.; RICHTER, K. **Symmetries and the conductance of graphene nanoribbons with long-range disorder.** arXiv:1111. 5969v, (2011).
- [73] MOROZOV, S. V. et al. **Two-dimensional gas of massless Dirac fermions in graphene.** Nature 438, 197-200, (2008).
- [74] WETERVLT, R. M. et al. **Coherent electronic backscattering in ballistic microstructures.** Phys. Rev. B 50, 8857, (1994).
- [75] VÍCTOR, A.; MELLO, Méndez-Bermúdez; PIER A., GOPAR, **Quantum scattering and transport in classically chaotic cavities:an overview of past and new results,** arXiv:0906.5074v1, (2009).
- [76] MORPURGO, A. F.; GUINEA, F. **Intervalley scattering, long-range disorder, and effective time-reversal symmetry breaking in graphene.** Phys. Rev. Lett. 97, 196804, (2006).
- [77] NISHIGAKI, S. M.; GANGARDT, D. M.; KAMENEV, A. **Correlation functions of the bc calogeroâsutherland model.** Journal of Physics A: Mathematical and General, 36(12):3137â, 2003.

- [78] BEENAKKER, C. W. J.; BROUWER, P. W. **Effect of a voltage probe on the phase-coherent conductance of a ballistic chaotic cavity.** arXiv:cond-mat/9410076, (1994).
- [79] PASSOS, A. L. **Estudos numéricos de matrizes aleatórias aplicados a pontos quânticos.** Tese de mestrado, UFS, (2006).
- [80] RICHTER, K. ; SIEBER, M. **Semiclassical theory of chaotic quantum transport.** Phys. Rev. Lett. 89, 206801, (2002).
- [81] YANG, Ying-Cheng L. R.; HUANG, L.; GREBOGI, C. **Quantum chaotic scattering in graphene systems.** EPL 94, 40004, (2011).
- [82] SCHMIDT, B.; GROELING, A. M. **Resistance fluctuations in mesoscopic multiple lead devices.** Phys. Rev. B 47, 12732, (1993).
- [83] SOUZA-FILHO, C. A.; MACEDO-JUNIOR, A. F.; MACÊDO, A. M. S. **A hypergeometric generating function approach to charge counting statistics in ballistic chaotic cavities.** Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 47(10):105102â, 2014.
- [84] GREINER, W. **Relativistic quantum mechanics: wave equations.** 3 ed., Spring, (1990).
- [85] KOUWENHOVEN, L. P.; MARCUS, C. M. **Quantum dots.** Phys. World, pag. 35, junho, (1998).
- [86] VAN WEES, B.J. et al. **Quantized Conductance of Point Contacts in a Two-Dimensional Electron Gas.** Phys. Rev. Lett., vol.60, (1998).
- [87] WHARAM, D. A. et al. **One-dimensional transport and the quantisation of the ballistic resistance.** J. Phys. C: Solid State Phys. 21 (1988) L209-L214.
- [88] BREY, L.; FERTIG, H. A. **Electronic states of graphene nanoribbons studied with the Dirac equation.** Phys. Rev. B 73,235411, (2006).